ЛЕКЦИЯ №2. ТЕОРИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ

1. Источники и классификация погрешностей

Часто точное численное решение математических задач бывает достаточно сложным, поэтому используют приближённые вычисления. Однако при вычислении вручную некоторые выкладки могут привести к ошибкам.

Типы ошибок приближенных вычислений:

✔ вычислительные ошибки;

✔ ошибки округления;

✔ проблемы устойчивости вычислительной схемы.

Определение. *Численные методы* это методы решения задач, сводящиеся к арифметическим и некоторым логическим действиям над ними, т.е. к действиям которые выполняет ЭВМ.

При численном решении математических и прикладных задач на том или ином этапе возможно появление *погрешностей следующих типов*:

- ***Погрешность задачи***. Она связана с приближенным характером исходной содержательной модели (невозможно учесть все факторы в процессе изучения моделируемого явления) и ее математического описания, параметрами которого служат обычно приближенные числа.

- ***Погрешность метода***. При выборе способа решения поставленной математической задачи выбирают наиболее удобный приближенный способ, который не всегда является точным.

- ***Погрешность округлений***. При выполнении арифметических операций над числами, при вводе и выводе данных производится округление.

Погрешности, соответствующие этим причинам называют:

✔*Неустранимая погрешность;*

✔*Устранимая погрешность;*

✔*Вычислительная погрешность.*

2. Погрешность численного решения задачи

Введем некоторые переменные.

x^* − точное значение вычисляемого параметра;

$\tilde{x}$ − значение этого параметра соответствующее принятому математическому описанию;

$\tilde{x}_h$ − решение задачи, получаемое при реализации численного метода в предположении отсутствия округлений;

$\tilde{x}_h^*$ − приближенное решение задачи, получаемое при реальных вычислениях;

$|\tilde{x} - x^*| = \rho_1$ − неустранимая погрешность;

$|\tilde{x}_h - \tilde{x}| = \rho_2$ − погрешность метода;

$|\tilde{x}_h^* - \tilde{x}_h| = \rho_3$ − вычислительная погрешность;

$|\tilde{x}_h^* - x^*| = \rho_0$ − полная погрешность;

Чтобы численный метод считался *удачно выбранным*, необходимо выполнение некоторых условий:

- его погрешность должна быть в несколько раз меньше неустранимой погрешности ($\rho_0 < \rho_1$);
- вычислительная погрешность в несколько раз меньше погрешности метода ($\rho_3 < \rho_2$).

А также должно выполняться условие: $\rho_0 \leq \rho_1 + \rho_2 + \rho_3$.

Рассмотрим некоторые возможные подходы к учету погрешностей действий.

Пусть *A* и *a* − два близких числа.

A − точное значение некоторой величины;

a − приближенное значение этой величины.

Определение. Число *а* называется *приближенным значением по недостатку*, если оно меньше истинного значения, и по избытку, если больше.

Например, число 3,14 является приближенным значением числа π по недостатку, а 2,72 – приближенным значением числа *е* по избытку.

Величина $\Delta a = |A - a|$ называется *абсолютной погрешностью* приближенного числа *a*,

$$\delta\, a := \frac{\Delta(a)}{|\,a\,|}$$ − его *относительная* погрешность;

$A = \pm\, \alpha_{n}\, \alpha_{n-1}\, \alpha_{0}, \alpha_{-1}\ \alpha_{-2} \ldots$ − любое число (общий вид);

Определение. *Значащими цифрами числа а* называют все цифры его записи, начиная с первой ненулевой цифры слева. (27,076 − пять значащих цифр, 0,000560 − три значащих цифры).

Определение. Значащую цифру называют *<u>верной</u>*, если абсолютная погрешность числа не превосходит единицы разряда, соответствующего этой цифре:

Пусть a = 27,01768 Δa = 0,003

а) a = 27,01(7)68; «7»: единица ее разряда 0,001; 0,003 > 0,001 ⇒ цифра неверная;

б) a = 27,017(6)8; «6»: единица ее разряда 0,0001; 0,003 > 0,0001 ⇒ цифра неверная;

в) a = 27,0(1)768; «1»: единица ее разряда 0,01; 0,003 < 0,01 ⇒ цифра верная;

Теорема: *Погрешность, возникающая при округлении не превосходит ½ единицы* (по абсолютной величине) *меньшего из оставленных разрядов.*

A = 3,1415926 − округляют до двух знаков после запятой: a = 3,14.

$\Delta a = |A - a| = 0{,}0015926$ $(3{,}1415926 - 3{,}14 = 0{,}0015926)$.

Единица меньшего из оставленных разрядов −

$$0{,}01 \quad \Rightarrow \quad \frac{0{,}01}{2} = 0{,}005$$

$0{,}0015926 < 0{,}005 \Rightarrow$ теорема верна.

Повторное округление не рекомендуется, т.к. приводит к увеличению погрешности.

Например: Пусть число A = 34,24463, тогда

а) a = 34,25; б) a = 34,24

Рассмотрим абсолютные погрешности пунктов а) и b):

В случае а) погрешность $\Delta a = |A - a| = |34{,}24463 - 34{,}25| = 0{,}00537$, больше погрешности пункта б) $\Delta a = |A - a| = |34{,}24463 - 34{,}24| = 0{,}00463$, т.е. $0{,}00537 > 0{,}00463$.

Следовательно, приближенное значение числа *А* в пункте b) является более точным.

<u>При сложении и вычитании</u> приближенных чисел с различным числом верных значащих цифр после запятой результат округляется по минимальному числу верных цифр после запятой у исходных чисел.

<u>При умножении и делении</u> приближенных чисел с различным числом верных значащих цифр производится округление результата с числом значащих цифр, совпадающим с минимальным числом верных значащих цифр у исходных чисел.

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

1. Общая постановка задачи

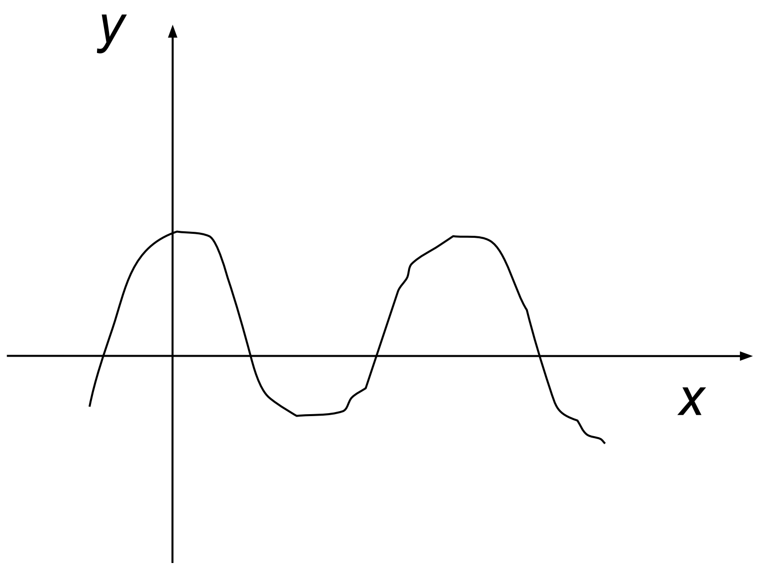
Пусть дано уравнение $f(x) = 0$, где $f(x)$ − непрерывная функция.

Требуется вычислить действительные корни этого уравнения с заданной точностью.

I. Отделение корней уравнения.

Отделить корни − значит указать отрезки $[a_i, b_i]$, на каждом из которых содержится ровно один корень уравнения.

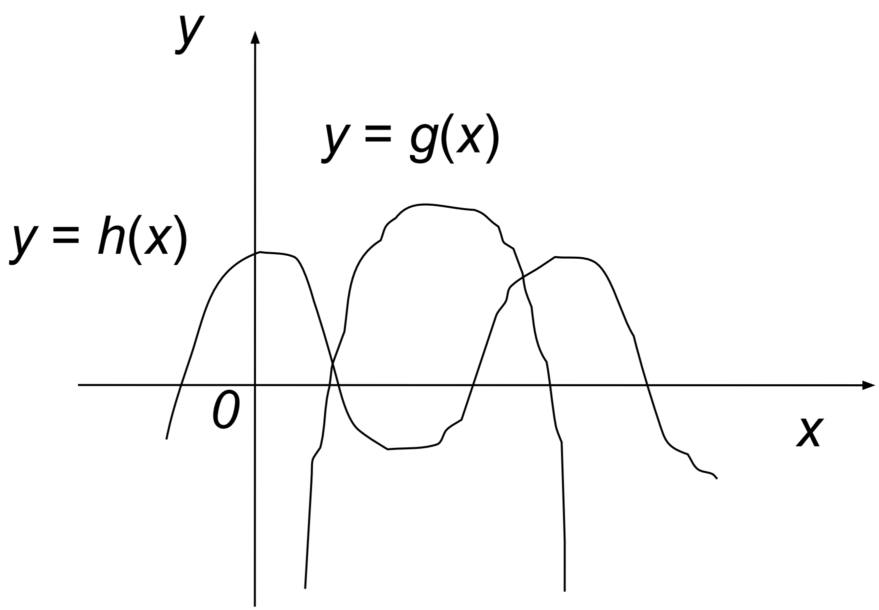
а) Обозначим $y = f(x)$ и построим график этой функции, корнями уравнения являются точки пересечения графика функции с осью (ox).



б) Если уравнение задано в виде $g(x) = h(x)$ (или $g(x) - h(x) = 0$)

Введем обозначения $y = g(x)$, $y = h(x)$ и построим эти графики в одной системе координат.

Абсциссы точек пересечения и являются корнями уравнения $f(x) = 0$.



II. Определение отрезка.

На выбранном отрезке [a, b] находится один корень уравнения $f(x) = 0$.

2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Рассмотрим несколько методов решения уравнений с одной переменной.

а) Метод половинного деления (метод вилки)

Вилка это любой отрезок, на концах которого функция имеет различные знаки.

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна при всех x на отрезке $[a,b]$ и имеет на концах этого отрезка значения разных знаков, т.е. $f(a) \cdot f(b)<0$, то существует по крайней мере одна точка C из этого отрезка, значение функции в которой равна нулю. ($f(c) = 0$)

Будем называть отрезок [a, b] *промежутком существования корня*, а точку c − *пробной точкой*.

Обозначим $a = a_0$, $b = b_0$.

Найдём середину этого отрезка: $$c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$$

В результате возможны два случая:

1) $f(c_0) = 0 \Rightarrow c_0$ − точное значение корня;

2) $f(c_0) \neq 0$ $(< > 0) \Rightarrow$ данный отрезок разбивается на два отрезка $[a_0, c_0]$ и $[c_0, b_0]$.

Найдем значение функции в этой точке $f(c_0)$.

Если знак функции в т.**C** совпадает со знаком функции в т. b_0, то в дальнейшем вместо $f(b_0)$ будем использовать $f(c_0)$.

(Соответственно, если знак функции в т.C совпадает со знаком функции в т. a_0, то вместо $f(a_0)$ будем использовать $f(c_0)$)

Таким образом из этих двух отрезков выбирают тот, на концах которого функция имеет значения разных знаков. Получается новый отрезок − $[a_1, b_1]$.

Т.е. $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$, и, определив точку $c_1 \in [a_1, b_1]$ как середину этого отрезка производим те же операции.

В результате:

Длина отрезка $[a_1, b_1]$ равна половине длины отрезка $[a_0, b_0]$:

$$|[a_1, b_1]| = ½\, |[a_0, b_0]|;$$

Длина отрезка $[a_2, b_2]$ равна ¼ длины отрезка $[a_0, b_0]$:

$$|[a_2, b_2]| = ¼\, |[a_0, b_0]| \quad \text{и т.д.}$$

Вывод: $|[a_n, b_n]| = \dfrac{|[a_0, b_0]|}{2^n}$

В качестве приближенного значения корня берем середину отрезка $[a_n, b_n]$

$$\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)$$

$$|x^* - c_n| \le \frac{|[a_n, b_n]|}{2} = \frac{|[a_0, b_0]|}{2^{n+1}} < \varepsilon \Rightarrow n \quad -$$

– число шагов алгоритма

x* − точное значение корня

$\boldsymbol{c_n}$ − приближенное значение корня

Метод половинного деления позволяет вычислять искомый корень с любой наперед заданной точностью. Он особенно удобен для проведения вычислений на ЭВМ.

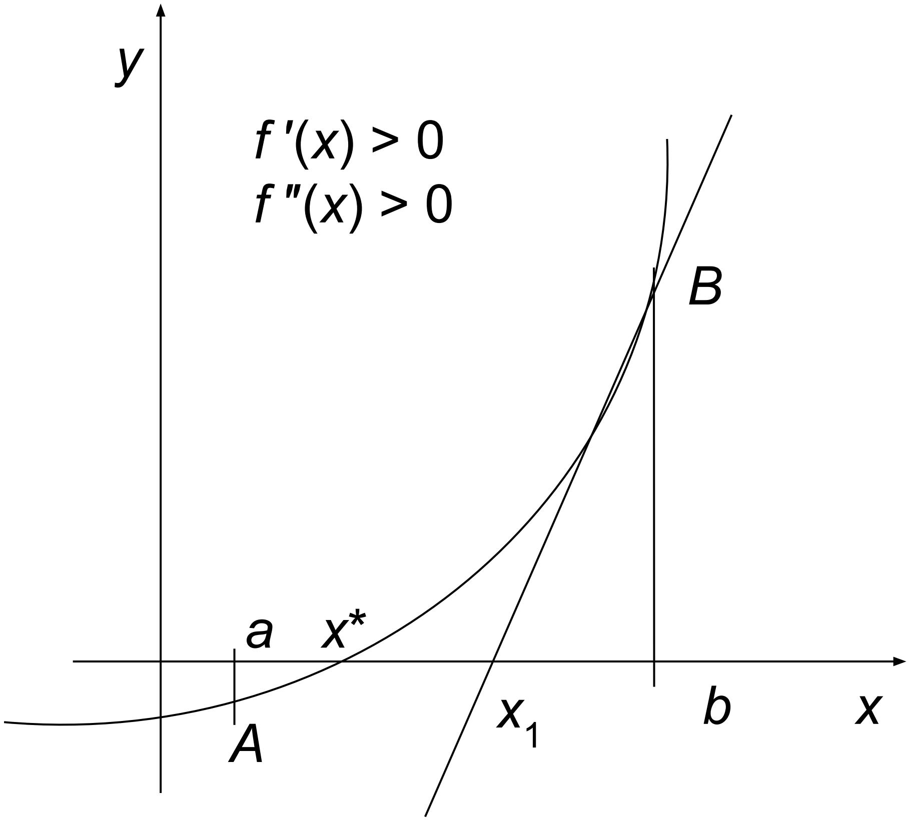
б) *метод касательных (метод Ньютона)*

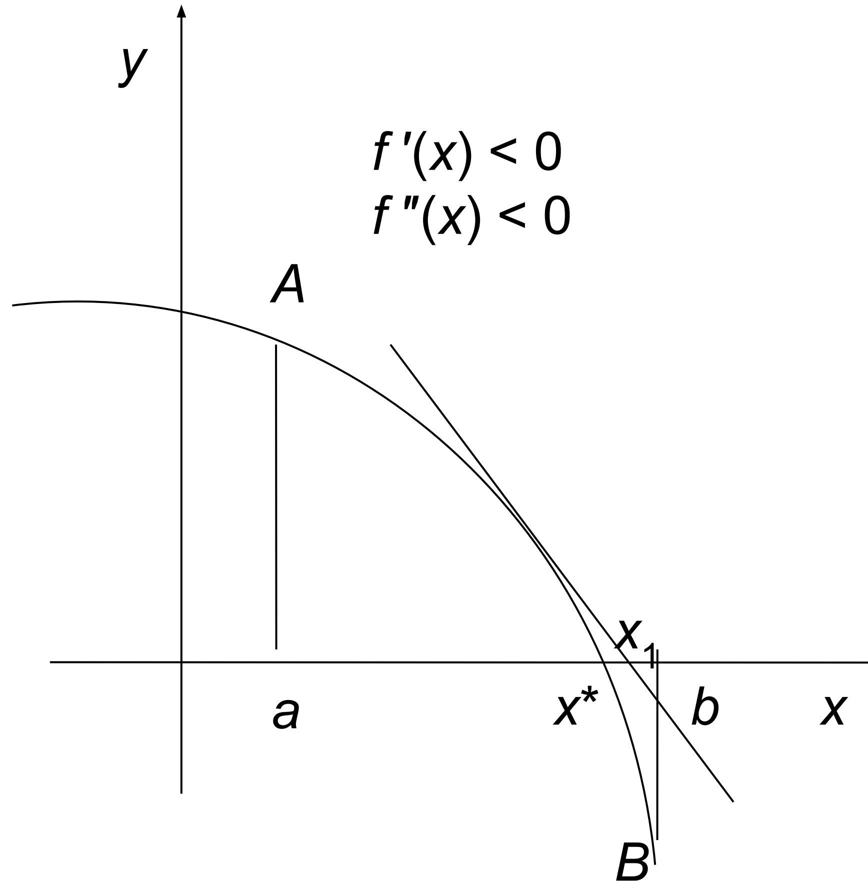
Пусть действительный корень уравнения $f(x) = 0$ изолирован на отрезке $[a, b]$, где $f(x)$ – непрерывная функция, а значения $f(a)$ и $f(b)$ на концах отрезка имеют разные знаки и обе производные $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют знак на всем отрезке $[a, b]$.

Возьмем на $[a, b]$ такое число x_0, при котором $f(x_0)$ имеет тот же знак, что и $f''(x_0)$, т.е. такое, что $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ (в частности за x_0 можно принять тот из концов отрезка $[a, b]$, в котором соблюдено это условие).

Проведем в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ касательную к кривой $f(x)$. За приближенное значение корня берется абсцисса точки пересечения этой касательной с осью (ox), т.е. точка $M_1(x_1, 0)$.

Рассмотрим случай, когда f′(x) и f″(x) имеют одинаковые знаки.





Пусть y = f(x). Напишем уравнение касательной в точке $M_0(x_0, f(x_0))$

***$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ – общее уравнение касательной*.**

Подставим точку $M_1(x_1, 0)$ в уравнение касательной:

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

$$f'(x_0)(x_1 - x_0) = - f(x_0)$$

$$x_1 - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Проведем теперь касательную в точке $M_1(x_1, f(x_1))$

$$y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$$

и подставим точку $M_2(x_2, 0)$.

$$0 = f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

$$f'(x_1)(x_2 - x_1) = -f(x_1)$$

$$x_2 - x_1 = -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Полученная таким образом последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots$ имеет своим пределом искомый корень.

Вывод:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$ где $x_n > x_{n+1}$

Замечание: В случае, когда $f'(x)$ и $f''(x)$ имеют разные знаки, формулы для нахождения x_{n+1} имеют тот же вид. (Доказать самостоятельно)

Правила выбора исходной точки x_0:

За исходную точку x_0 следует выбирать тот конец отрезка [a, b], в котором знак функции совпадает со знаком $f''(x)$.

Оценка погрешности (имеет место не только для метода касательных).

$y = f(x)$ – дифференцируема на [a, b]

x^* – точное значение корня уравнения $f(x) = 0$.

$x^* \in [a, b], c \in [a, b], c \neq x^*$

Рассмотрим отрезок с концами **x*** и **c** и к этому отрезку применим теорему Лагранжа:

Существует такая точка λ из отрезка с концами **x*** и **c** для которой выполняется равенство

$$f(c) - f(x^*) = f'(\lambda)(c - x^*),$$

так как x* – точное значение корня уравнения f(x) = 0, то f(x*) = 0 $\Rightarrow$ f(c) = f ′(λ)(c – x*).

Т.к. точка ***c*** не является корнем этого уравнения, то можем записать f(c) ≠ 0 $\Rightarrow$ f ’(λ) ≠ 0.

Выразим (c – x*):

$$c - x^* = \frac{f(c)}{f'(\lambda)}$$

Отсюда можем написать

$$|x^* - c| = \frac{|f(c)|}{|f'(\lambda)|} \le \frac{|f(c)|}{m}$$

где $m = \min\limits_{a \le x \le b} |f'(\lambda)|$ $\Rightarrow |x^* - c| \le \dfrac{|f(c)|}{m}$ $\Rightarrow$

$|x^* - c| \le \dfrac{|f(x_n)|}{m}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{|f(x_n)|}{m} < \varepsilon$ – условие окончания вычислений.

в) ***метод хорд***

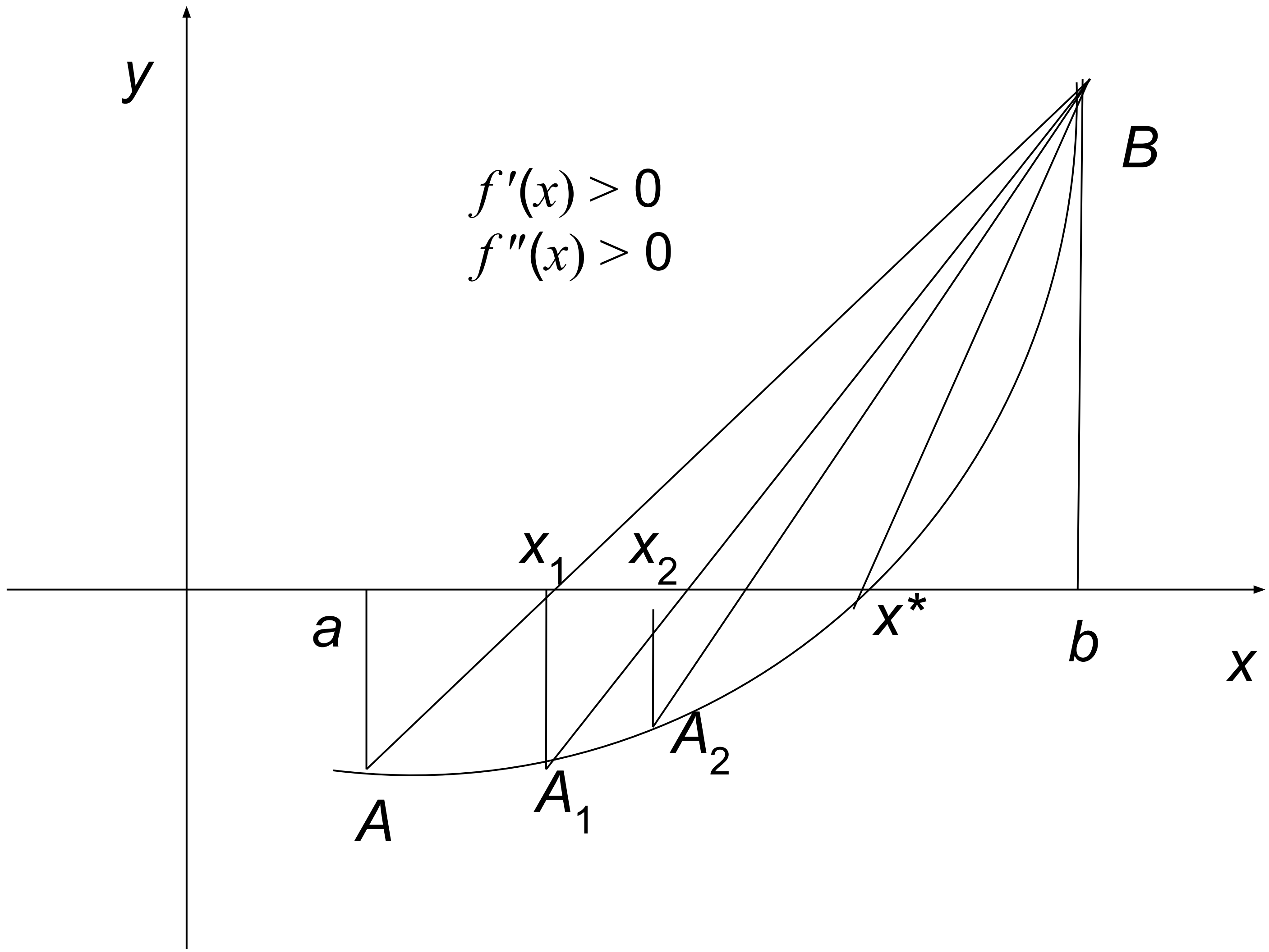
Метод заключается в том, что дуга графика функции $f(x) = 0$ на отрезке $[a,b]$ заменяется стягивающей ее хордой.

В качестве приближенного значения корня берется точка пересечения хорды с осью (ox).

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна при всех $x \in [a, b]$ и на $[a, b]$ меняет знак, т.е. $f(a) \cdot f(b) < 0$. Тогда данное уравнение имеет хотя бы один корень.

<u>I случай:</u>

$f'(x)$ и $f''(x)$ имеют одинаковые знаки.


y
B
$f'(x) > 0$
$f''(x) > 0$
x_1
x_2
a
x^*
b
x
A_2
A_1
A

Напишем общее уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$:

(M_1M_2): $$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Используя это уравнение, проведем хорду через точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$:

$$\frac{x - a}{b - a} = \frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)}$$

возьмем точку пересечения хорды с осью (ox) с координатами $y = 0$, $x = x_1$.

$$\frac{x_1 - a}{b - a} = \frac{-f(a)}{f(b) - f(a)}$$, отсюда $$x_1 - a = \frac{-f(a)\cdot(b - a)}{f(b) - f(a)}$$, или

$$x_1 = a - \frac{f(a)\cdot(b - a)}{f(b) - f(a)}$$

Проведем хорду через точки $A(x_1, f(x_1))$ и $B(b, f(b))$:

$$\frac{x - x_1}{b - x_1} = \frac{y - f(x_1)}{f(b) - f(x_1)}$$

возьмем точку пересечения хорды с осью (ox) с координатами $y = 0$, $x = x_2$.

$$\frac{x_2 - x_1}{b - x_1} = \frac{-f(x_1)}{f(b) - f(x_1)}$$

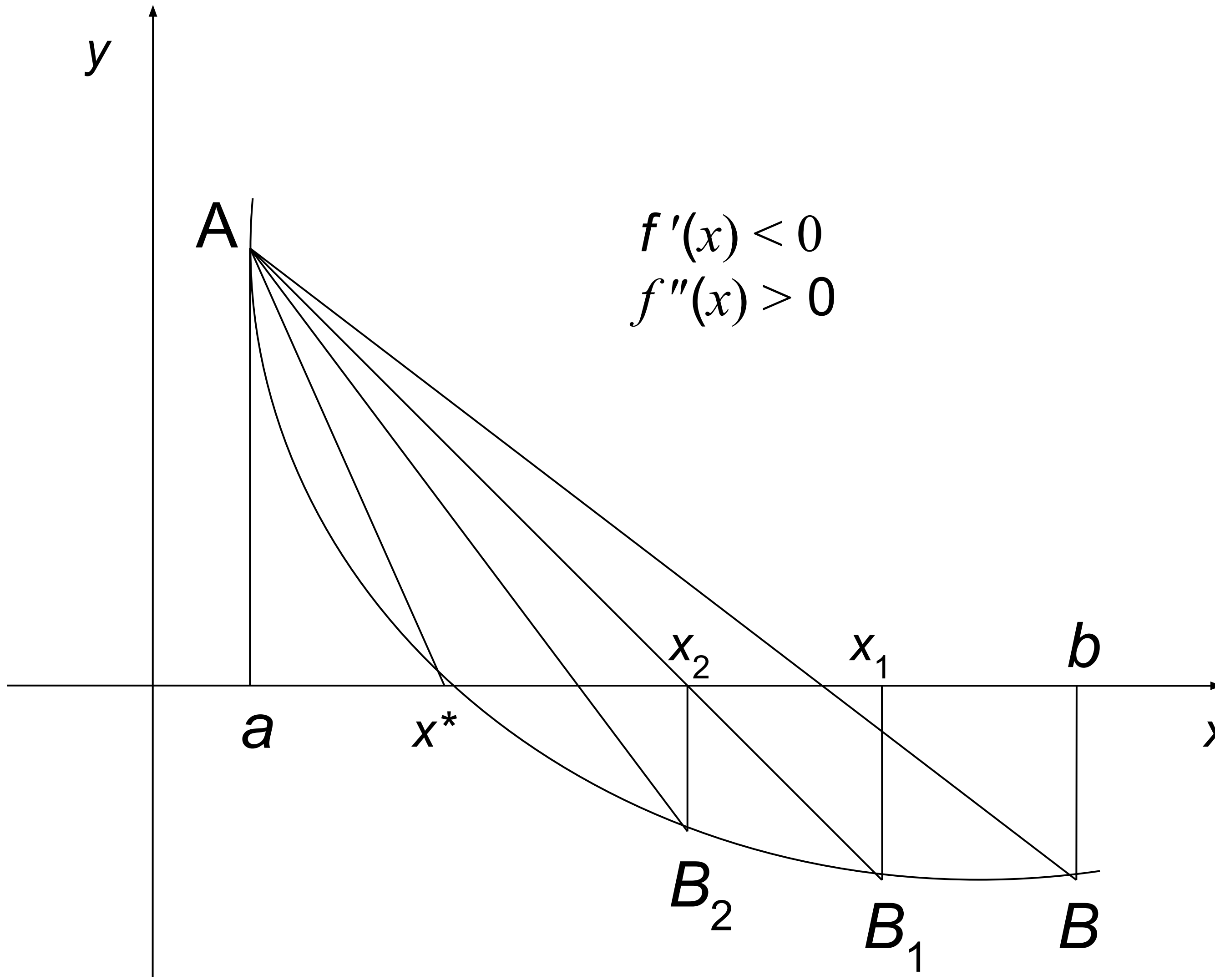
отсюда $x_2 - x_1 = \dfrac{-f(x_1)\cdot(b - x_1)}{f(b) - f(x_1)}$ или $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)\cdot(b - x_1)}{f(b) - f(x_1)}$

Полученная таким образом последовательность x_0, x_1, x_2, … имеет своим пределом искомый корень.

Вывод: $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\cdot(b - x_n)}{f(b) - f(x_n)}$$

II случай:

$f'(x)$ и $f''(x)$ имеют разные знаки.



$$\frac{x-b}{a-b}=\frac{y-f(b)}{f(a)-f(b)}$$, $y = 0$, $x = x_1$

$$\frac{x_1-b}{a-b}=\frac{-f(b)}{f(a)-f(b)}$$, отсюда $$x_1-b=\frac{-f(b)\cdot(b-a)}{f(b)-f(a)}$$, или

$$x_1=b-\frac{f(b)\cdot(b-a)}{f(b)-f(a)}$$

Проведем хорду через точки $A(a, f(a))$ и $B(x_1, f(x_1))$:

$$\frac{x-x_1}{x_1-a}=\frac{y-f(x_1)}{f(x_1)-f(a)}$$, возьмем точку пересечения хорды с осью (ox) с координатами $y = 0$, $x = x_2$.

$$\frac{x_2-x_1}{x_1-a}=\frac{-f(x_1)}{f(x_1)-f(a)}$$, отсюда $$x_2-x_1=\frac{-f(x_1)\cdot(x_1-a)}{f(x_1)-f(a)}$$, или

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)\cdot(x_1-a)}{f(x_1)-f(a)}$$

Полученная таким образом последовательность x_0, x_1, x_2, … имеет своим пределом искомый корень.

Вывод:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\cdot(x_n - a)}{f(x_n) - f(a)}$$

В качестве начального приближения x_0 надо взять тот конец [a, b], в котором знак $f(x)$ и знак $f''(x)$ противоположны.

Оценка погрешности и условие окончания вычислений такие же, что и в методе касательных.

г) *комбинированное применение методов хорд и касательных*

Необходимо найти действительный корень уравнения *f*(*x*) = 0, изолированный на отрезке [*a*, *b*].

Предполагается, что *f*(*a*) и *f*(*b*) имеют разные знаки, а каждая из производных сохраняет определенный знак на отрезке изоляции.

Возьмем на отрезке [*a*, *b*] такую точку x_0, что $f(x_0)$ и $f''(x_0)$ имеют одинаковые знаки.

Воспользуемся формулами методов хорд и касательных:

$$x_{11} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad x_{12} = a - \frac{f(a)\cdot(b-a)}{f(b) - f(a)}$$

Величины x_{11} и x_{12} принадлежат промежутку изоляции, причем $f(x_{11})$ и $f(x_{12})$ имеют разные знаки.

Построим новую пару приближений к корню:

$$x_{21} = x_{11} - \frac{f(x_{11})}{f'(x_{11})} \qquad x_{22} = x_{11} - \frac{f(x_{11}) \cdot (x_{12} - x_{11})}{f(x_{12}) - f(x_{11})}$$

Точки x_{21} и x_{22} на числовой оси расположены между точками x_{11} и x_{12}, причем $f(x_{21})$ и $f(x_{22})$ имеют разные знаки.

Вычислим теперь значения:

$$x_{31} = x_{21} - \frac{f(x_{21})}{f'(x_{21})} \qquad x_{32} = x_{21} - \frac{f(x_{21}) \cdot (x_{22} - x_{21})}{f(x_{22}) - f(x_{21})}$$

и т.д.

Каждая из последовательностей

$$x_{11}, x_{21}, x_{31}, \ldots, x_{n1}, \ldots \quad \text{и} \quad x_{12}, x_{22}, x_{32}, \ldots, x_{n2}, \ldots$$

стремится к искомому корню, причем одна из последовательностей монотонно возрастает, а другая монотонно убывает.

Пусть $\bar{x}_n$ – приближенное значение корня, полученное на n-ом шаге методом касательных, а $\tilde{x}_n$– приближенное значение корня, полученное на n-м шаге методом хорд.

Тогда условием окончания вычисления будет:

$$|\bar{x}_n - \tilde{x}_n| < \varepsilon, \quad \text{а} \quad x^* \approx \frac{\bar{x}_n + \tilde{x}_n}{2}$$

ТЕМА 3. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§1. Постановка задачи

Рассмотрим систему из *n* линейных уравнений с *n* неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Предположим, что система имеет единственное решение.

Найти решение системы *A*, т.е. $\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ с заданной точностью.

§2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

I. Точные (Прямые) методы

Точные (Прямые) методы *– это методы, которые приводят к решению за конечное число арифметических операций.*

а) Формулы Крамера:

Запишем систему (1) в матричном виде: *A* · *X* = *B*, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ – матрица системы;

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ – вектор (столбец) неизвестных;

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$ – вектор (столбец) свободных членов.

Потребуем от системы выполнение определенных условий:

1. Матрица *A* должна быть размерностью $n \times n$;

2. $\det A \neq 0$.

Тогда при небольших n можем использовать формулы Крамера:

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n) \qquad (2)$$

где A_i – матрица n×n, получена из матрицы системы A заменой i-го столбца столбцом свободных членов.

При использовании формулы Крамера необходимо вычислить (n + 1) определителей.

Если определители вычислять разложением по строке (столбцу), то на вычисление определителя n-го порядка будет затрачиваться n! операций умножения.

Факториальный рост числа операций с увеличением размерности n называется ***проклятием размерности*** ($100! \approx 10^{158}$), а размерность n = 100 для современных задач не велика.

б) ***Метод Гаусса.***

Последовательное исключение неизвестных.

Выпишем расширенную матрицу.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \multicolumn{4}{c|}{\dotfill} & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \qquad (3)$$

Предположим, что коэффициент a_{11}, называемый ведущим элементом первой строки, не равен нулю. Разделив первую сроку на a_{11}, получим

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \multicolumn{4}{c|}{\dotfill} & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

где $$a_{1j}^{(1)} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}, \quad j = 2, 3, ..., n.$$

С помощью первой строки получаем в первом столбце, начиная со второй строки, нули. Для этого, сложим первую строку со следующими строками. Умножив ее на элементы a_{i1} (i = 2, 3, …, n) с противоположным знаком.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right) \sim$$

где $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{1j}^{(1)} a_{i1}, \quad i = 2, 3, ..., n, \ j = 2, 3, ..., n.$

Допустим, что ведущий элемент второй строки, т.е. коэффициент $a_{22}^{(1)}$, тоже отличен от нуля. Тогда, разделив на него вторую сроку, получим

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & 1 & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right) \sim$$

С помощью второй строки получаем во втором столбце ниже единицы все нули. Получаем

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & 1 & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array}\right) \sim \quad \text{и т.д.}$$

В результате получим

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & 1 & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_n^{(n-1)} \end{array}\right) \qquad (4)$$

Переход от расширенной матрицы к матрице (4) называется ***прямой ход метода Гаусса*** (получение треугольной матрицы).

С помощью последней строки, получаем в последнем столбце все нули выше единицы.

Затем с помощью предпоследней строки в предпоследнем столбце получаем нули выше единицы и т.д.

Получим

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_1^0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_2^0 \\ \multicolumn{4}{c|}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_n^0 \end{array}\right) \qquad (5)$$

Это преобразование называется – ***обратный ход метода Гаусса*** (переход от треугольной матрицы к единичной).

$$\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \ldots \\ x_n^0 \end{pmatrix} = X^0$$ – решение системы (1).

в) *Метод Гаусса с выбором главного элемента*

Рассмотренный выше простейший вариант метода Гаусса, называемый *схемой единственного деления*, обладает следующими недостатками.

Если делить на число, близкое к нулю, то получится большая ошибка округления, поэтому если на диагонали матрицы стоят числа близкие к нулю, то приблизительное решение системы получаются с большой погрешностью.

Чтобы уменьшить ошибки округления, используют метод Гаусса с выбором главного элемента.

Пусть дана система (1).

Выпишем расширенную матрицу.

В первом столбце среди всех элементов выбираем наибольший по модулю элемент и ту строку, в которой он находится, меняем местами с первой строкой.

Затем как в методе Гаусса получаем в первом столбце первой строки единицу, а ниже ее нули.

Затем во втором столбце среди элементов, начиная со второго, выбираем наибольший по модулю элемент и строку, в которой он находится, меняем со второй строкой и т.д.

Обратный ход тот же, что и в методе Гаусса.

Прямые методы приводят к точным решениям, если все вычисления производились без округлений.

Невязкой решения называется вектор $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$,

который равен $|AX^0 - B|$.

$$\varepsilon_1 = |a_{11} x_1^0 + a_{12} x_2^0 + \ldots + a_{1n} x_n^0 - b_1|$$
$$\varepsilon_2 = |a_{21} x_1^0 + a_{22} x_2^0 + \ldots + a_{2n} x_n^0 - b_2|$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varepsilon_n = | a_{n1} x_1^0 + a_{n2} x_2^0 + \ldots + a_{nn} x_n^0 - b_n|$$

По малости невязки решения можно с осторожностью судить о близости найденного приближенного решения x^0 и точного решения x^*.

Замечание. Правило Крамера в ЭВМ не применяется, т.к. оно требует значительно большего числа арифметических действий, чем метод Гаусса. Метод Гаусса используется в ЭВМ при решении систем до порядка 10^3, а итерационные методы – до порядка 10^6.

II. Итерационные методы

Итерационные методы *– это методы, в которых точное решение может быть получено лишь в результате бесконечного повторения единообразных, как правило, простых действий.*

а) ***метод простых итераций***.

Предположим, что диагональные элементы системы (1) не равны 0 ($a_{ij} \neq 0$). Из первого уравнения выражаем x_1, из второго – x_2 и т.д. Из n-ого – x_n.

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}} - \dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \dfrac{a_{13}}{a_{11}} x_3 - \ldots - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} x_n \\ x_2 = \dfrac{b_2}{a_{22}} - \dfrac{a_{21}}{a_{22}} x_1 - \dfrac{a_{23}}{a_{22}} x_3 - \ldots - \dfrac{a_{2n}}{a_{22}} x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}} - \dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1 - \dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} x_2 - \ldots - \dfrac{a_{nn-1}}{a_{nn}} x_{n-1} \end{cases}$$

Обозначим $\dfrac{b_i}{a_{ii}} = \beta_i$, $\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} = \alpha_{ij}$

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \ldots + \alpha_{1n}x_n \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3 + \ldots + \alpha_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nn-1}x_{n-1} \end{cases} \qquad (6)$$

Система (6) приведена к нормальному виду. Запишем ее в матричном виде: $X = \beta + \alpha x$, где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Будем решать систему (6) методом последовательных приближений.

$x^0 = \beta$ – нулевое приближение. Общая формула имеет вид:

$$x^{k+1} = \alpha\, x^k + \beta$$

т.е. $x^0 = \beta\,;\ \ x^{(1)} = \alpha\, x^{(0)} + \beta\,;\ \ x^{(2)} = \alpha\, x^{(1)} + \beta\ \ldots$

<u>Теорема 1</u>. *Если максимальная сумма модулей коэффициентов при неизвестных в правой части каждого уравнения системы* (6) *меньше единицы, то последовательность приближений имеет предел.*

$$\max\left\{\sum_{j=1}^{n}|\alpha_{1j}|,\ \sum_{j=1}^{n}|\alpha_{2j}|,\ \ldots,\ \sum_{j=1}^{n}|\alpha_{nj}|\right\} < 1.$$

Если последовательность приближений имеет предел, то

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$$ – точное решение системы (6)

следовательно, системы (1).

Теорема 2. *Необходимым и достаточным условием сходимости метода простых итераций при любом начальном векторе x^0 к решению x^* системы* (6) *является требование, чтобы все собственные числа матрицы α были по модулю меньше* **1**.

Условие окончания вычисления.

Пусть $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – точное решение системы.

$$X^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}$$ – *k*-ое приближенное значение неизвестных, вычисленных по методу итераций.

Тогда $| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} | < \varepsilon$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$.

Оценка погрешности:

Определим:

(Норма) $$\| \alpha \| = \max\left\{ \sum_{j=1}^{n} | \alpha_{1j} |, \sum_{j=1}^{n} | \alpha_{2j} |, \dots, \sum_{j=1}^{n} | \alpha_{nj} | \right\}$$

$$\| \beta \| = max \{|\beta_1|, |\beta_2|, \dots, |\beta_n|\}$$

Тогда

$$\max \{| x_1 - x_1(k) |, | x_2 - x_2(k) |, \dots, | x_n - x_n(k) |\} \le \frac{\|\alpha\|^{k+1}}{1 - \|\alpha\|} \cdot \|\beta\| \le \varepsilon$$

Пример. Показать, что для данной системы итерационный процесс сходится и определить, сколько итераций следует выполнить, чтобы найти неизвестные с точностью **ε** = 10**^–4^**.

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}01x_1 + 0{,}15x_2 - 0{,}26x_3 \\ x_2 = -0{,}02x_1 + 0{,}32x_2 + 0{,}21x_3 + 0{,}41 \\ x_3 = -0{,}07x_1 - 0{,}04x_2 + 0{,}29x_3 - 0{,}13 \end{cases}$$

$||\alpha|| = max\ \{0{,}42;\ 0{,}55;\ 0{,}4\} < 1$

$||\alpha|| = 0{,}55$ – итерационный процесс сходится.

Найдем количество итераций, которое необходимо выполнить, чтобы найти неизвестные с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

||β|| = 0,41, $\frac{\|\alpha\|^{k+1}}{1-0{,}55}\cdot 0{,}41 < 10^{-4}$, $\frac{0{,}53^{k+1}\cdot 0{,}41}{0{,}45} < 10^{-4}$,

$(k + 1)$ lg 0,55 + lg 0,41 – lg 0,45 < – 4;

$(k + 1)$ lg 0,55 < – 4 – lg 0,41 + lg 0,45;

$$(k+1) < \frac{-4 - lg\,0{,}41 + lg\,0{,}45}{lg\,0{,}55}$$

б) *метод Зейделя.*

Пусть дана система линейных уравнений

$$Ax = b, \tag{7}$$

Где у матрицы $A=(c_{ij})_{i,j=1}^{n}$ все диагональные элементы отличны от нуля, т.е. $a_{ii} \neq 0$, $i = 1,2, \ldots, n$.

Если i-ое уравнение системы (7), $i = 1,2,\ldots,n$, разделить на a_{ii}, а затем все неизвестные, кроме x_i, перенести вправо, то мы придем к эквивалентной системе вида

$$x = Cx + d, \tag{8}$$

где $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$, $d_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}}, C=(c_{ij})_{i,j=1}^{n}, \; c_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}, & j \neq i \\ 0, & j = i \end{cases}$

Метод Зейделя состоит в том, что итерации производятся по формуле

$$x_i^k = \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} x_j^k + \sum_{j=i+1}^{n} c_{ij} x_j^{k-1} + d_i \qquad (9)$$

где x_i^0 произвольны, i = 1, 2, …, n, k = 1, 2, …

Итерации (9) по методу Зейделя отличаются от простых итераций тем, что при нахождении i-ой компоненты k-ого приближения сразу используются уже найденные компоненты k-ого приближения с меньшими номерами.

Условия сходимости метода простых итераций и метода Зейделя не совпадают, но пересекаются.

В некоторых случаях метод Зейделя дает более быструю сходимость.

Сформулируем теорему о двух различных достаточных условиях сходимости метода Зейделя.

<u>Теорема 3.</u> *Для существования единственного решения системы (7) и сходимости метода Зейделя достаточно выполнения хотя бы одного из двух условий:*

а) $\sum\limits_{j \neq i} \left| a_{ij} \right| < \left| a_{ii} \right|$, i = 1, 2, …, n;

в) матрица *A* – симметричная положительно определенная (все ее собственные значения положительны).

ТЕМА 4. ЧИСЛЕННАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

§1. Интерполяционные многочлены

Пусть в точках x_0, x_1, …, x_n заданы значения функции $f(x_0)$, $f(x_1)$, …, $f(x_n)$ ($a<x_0<x_1<\ldots<x_n<b$).

Например, эти значения получены из эксперимента или найдены с помощью достаточно сложных вычислений.

Возникает задача приближенного восстановления функции f в произвольной точке x.

Часто для решения этой задачи строится алгебраический многочлен $L_n(x)$ степени n, значения которого в точках x_i совпадают со значениями функции в заданных точках.

$$\begin{aligned} &L_n(x_0) = f(x_0) = f_0 \\ &L_n(x_1) = f(x_1) = f_1 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &L_n(x_n) = f(x_n) = f_n \end{aligned} \qquad (1)$$

Точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$ называются узлами интерполяции.

Сам многочлен $L_n(x_i)$ называется интерполяционным многочленом.

Для удобства под многочленом степени n будем подразумевать многочлен не выше n.

Например, если $f_i = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$, то интерполяционный многочлен $L_n(x) \equiv 0$ фактически имеет нулевую степень, но его тоже будем называть интерполяционным многочленом n-ой степени.

Приближенное восстановление функции f по формуле

$$f(x) \approx L_n(x) \qquad (2)$$

называется ***интерполяцией*** функции f (с помощью алгебраического многочлена).

Если **x** расположен вне минимального отрезка, содержащего все узлы интерполяции $x_0, x_1, \ldots, x_n$, то замену функции f по формуле (2) называют также ***экстраполяцией***.

§2. ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ МНОГОЧЛЕН ЛАГРАНЖА

Терема 1. *Существует единственный интерполяционный многочлен n-ой степени, удовлетворяющий условиям* ***(1)****.*

Доказательство. Запишем выражение интерполяционного многочлена.

Пусть n = 1, тогда

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot f_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot f_1 \qquad (3)$$

При n = 2

$$L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \cdot f_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \cdot f_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \cdot f_2 \ldots \qquad (4)$$

и, наконец, в общем случае при любом натуральном *n*

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} p_{ni}(x) f_i \qquad (5)$$

где

$$p_{ni}(x) = \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} \qquad (6)$$

(i = 0, 1, …, n.)

Действительно, выражение (3) представляет собой линейную функцию, т.е. многочлен первой степени, причем, $L_1(x_0) = f_0$, $L_1(x_1) = f_1$.

Таким образом, требования (1) при n = 1 выполнены.

Аналогично, формула (4) задает некоторый многочлен $L_2(x)$ второй степени, удовлетворяющий при $n = 2$ условиям (1).

При произвольном натуральном n функции (6), описываемая дробью, в числителе которой стоит произведение n линейных множителей, а в знаменателе – некоторое отличное от нуля число, являются алгебраическими многочленами степени n.

Следовательно, функция (5) тоже является алгебраическим многочленом степени n, причем, поскольку $p_{ni}(x_i)=1$, а $p_{ni}(x_j) = 0$ при $j \neq i$, $0 \leq j \leq n$, то выполнены требования (1).

Докажем единственность интерполяционного многочлена.

Допустим, что кроме интерполяционного многочлена (5) имеется еще некоторый алгебраический многочлен $\widetilde{L}_n(x)$ *n*-й степени, удовлетворяющий условиям

$$\widetilde{L}_n(x_i) = f_i, \quad i = 0,1,...,n \tag{7}$$

Тогда согласно (1) и (7)

$$\widetilde{L}_n(x_i) - L_n(x_i) = 0, \quad i = 0,1,\ldots,n. \tag{8}$$

Если $\widetilde{L}_n(x_i) - L_n(x_i) \neq 0$, то эта разность, будучи алгебраическим многочленом не выше *n*-ой степени, в силу основной теоремы высшей алгебры имеет не более *n* корней, что противоречит равенствам (8), число которых равно *n* + 1.

Следовательно, $\widetilde{L}_n(x_i) = L_n(x_i)$.

Теорема 1 полностью доказана.

Интерполяционный многочлен, представленный в виде (5), называется ***интерполяционным многочленом Лагранжа***, а функции (многочлены) (6) – ***лагранжевыми коэффициентами.***

§3. ПОГРЕШНОСТЬ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Запишем равенство $f(x) = L_n(x) + R_n(x)$, где $R_n(x)$ – остаточный член, т.е. погрешность интерполяции.

Возьмем некоторую точку **$\xi \in$** $[a, b]$, обозначим $\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$

Тогда
$$R_n(x) = \omega_n(x) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \qquad \textbf{(9)}$$

Следовательно,
$$f(x) = L_n(x) + \omega_n(x) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \qquad \textbf{(10)}$$

Из равенства **(10)** вытекает *оценка погрешности интерполяции* (в частности, экстраполяции) в текущей точке $x \in [a, b]$**:**

$$|f(x) - L_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_n(x)|, \qquad \textbf{(11)}$$

где

$$M_{n+1} = \max_{[a,b]} |f^{(n+1)}(x)| < +\infty,$$

и *оценка максимальной погрешности интерполяции* на всем отрезке *[a, b]*:

$$\max_{[a,b]} |f(x) - L_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{[a,b]} |\omega_n(x)| \qquad \textbf{(12)}$$

§4. Интерполяционный многочлен Ньютона

Предположим, что узлы интерполяции отстоят друг от друга на одинаковом расстоянии

$$x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, \ldots x_k = x_0 + k \cdot h, \qquad \textbf{(1)}$$

$$h > 0, k = 0, 1, \ldots, n$$

(т.е. узлы интерполяции образуют арифметическую прогрессию с разностью *h*)

Такое расположение узлов обычно имеет место при интерполировании функций, заданных в виде таблицы с постоянным шагом.

Определение. Пусть $x_k = x_0 + k \cdot h$, где k – целое, h **> 0,** $f_k = f(x_k)$. Величина $\Delta f_k = f_{k+1} - f_k$**,** называется ***конечной разностью первого порядка*** функции f в точке x_k (с шагом h),

$$\text{Т.е. } \Delta f_0 = f(x_1) - f(x_0) = y_1 - y_0,$$

$$\Delta f_1 = f(x_2) - f(x_1) = y_2 - y_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta f_k = f(x_{k+1}) - f(x_k) = y_{k+1} - y_k,$$

а величину $\Delta^n f_k = \Delta^{n-1} f_{k+1} - \Delta^{n-1} f_k$**,** называют ***конечной разностью n-ого порядка*** функции f **в точке** x_k**.**

$$\text{Т.е. } \Delta^2 f_k = \Delta f_{k+1} - \Delta f_k(x_k),$$

$$\Delta^3 f_k = \Delta^2 f_{k+1} - \Delta^2 f_k(x_k), \text{ и т.д.}$$

Конечные разности функции ***f*** удобно записывать в таблице

x_0	f_0	Δf_0	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$
x_1	f_1	Δf_1	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_1$
x_2	f_2	Δf_2	$\Delta^2 f_2$	
x_3	f_3	Δf_3		
x_4	f_4			

Пусть x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, … $x_k = x_0 + k \cdot h$ **-** узлы интерполяции функции $f(x)$**.**

Тогда интерполяционный многочлен имеет вид

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + a_n(x - x_0) \ldots (x - x_{n-1})$$

где a_0 , a_1 , …, a_n найдены из условия, что $P_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

$$P_n(x_0) = a_0 = y_0$$

$$P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = y_1$$

$$y_0 + a_1 h = y_1; \quad a_1 = \frac{y_1 - y_0}{h}; \quad a_1 = \frac{\Delta y_0}{h};$$

$$P_n(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2$$

$$y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} \cdot 2h + a_2\, 2h \cdot h = y_2$$

$$2h^2 a_2 = y_2 - y_0 - \Delta y_0 \cdot 2;$$

$$a_2 = \frac{y_2 - y_0 - 2(y_1 - y_0)}{2h^2};$$

$$a_2 = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2};$$

итак, $$a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2!\, h^2}$$

$$P_n(x_3) = a_0 + a_1(x_3 - x_0) + a_2(x_3 - x_0)(x_3 - x_1) +$$

$$+ a_3(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) = y_3$$

$$y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} \cdot 3h + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2} \cdot 3h \cdot 2h + a_3 \cdot 3h \cdot 2h \cdot h = y_3$$

$$6h^3 a_3 = y_3 - y_0 - 3\Delta y_0 + 3 \cdot \Delta^2 y_0;$$

$$a_3 = \frac{y_3 - y_0 - 3(y_1 - y_0) + 3(y_2 - 2y_1 + y_0)}{6h^3} = \frac{\Delta^3 y_0}{3!\, h^3}$$

и т.д.

Общий вид $$a_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!\, h^n}$$

Таким образом, ***формула Ньютона для интерполирования вперед*** имеет вид

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x - x_0)(x - x_1) +$$

$$+ \frac{\Delta^3 y_0}{3!\,h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}) \qquad \textbf{(2)}$$

В нем начало отсчета $\frac{x - x_0}{h}$ расположено в крайнем левом узле x_0, а используемые конечные разности идут в таблице разностей от f_0 вправо вниз.

Интерполяционный многочлен **(2)** удобно использовать в начале таблицы и для экстраполяции левее точки x_0, т.е. $\frac{x - x_0}{h} < 0$.

§5. ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ НАЗАД

Интерполяционный многочлен с узлами $\mathbf{x_0}$, $\mathbf{x_{-1}}$, …, $\mathbf{x_{-n}}$,

где $x_{-k} = x_0 - k \cdot h$, имеет вид

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) +$$

$$+ \frac{\Delta^3 y_0}{3!\,h^3}(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x - x_n)\ldots(x - x_1) \qquad (3)$$

И называется ***интерполяционным многочленом Ньютона для интерполирования назад***.

В нем начало отсчета $\frac{x - x_0}{h}$ расположено в крайнем правом узле $\mathbf{x_0}$, а используемые конечные разности идут в таблице от $\mathbf{f_0}$ вправо вверх:

x_{-4}	f_{-4}	Δf_{-4}	$\Delta^2 f_{-4}$	$\Delta^3 f_{-4}$
x_{-3}	f_{-3}	Δf_{-3}	$\Delta^2 f_{-3}$	$\Delta^3 f_{-3}$
x_{-2}	f_{-2}	Δf_{-2}	$\Delta^2 f_{-2}$	
x_{-1}	f_{-1}	Δf_{-1}		
x_0	f_0			

Интерполяционный многочлен **(3)** удобно использовать при интерполяции в конце таблицы и для экстраполяции правее точки x_0, т.е. $\frac{x - x_0}{h} > 0$.

§6. ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Рассмотрим численный процесс приближения производной ***f(x):***

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \textbf{(1)}$$

Выберем последовательность $\{h_k\}$ так, что $h_k \to 0$, и вычисляем ее предел:

$$D_k = \frac{f(x+h_k) - f(x)}{h_k} \qquad \textit{для} \quad k = 1, 2, \dots, n, \dots \qquad \textbf{(2)}$$

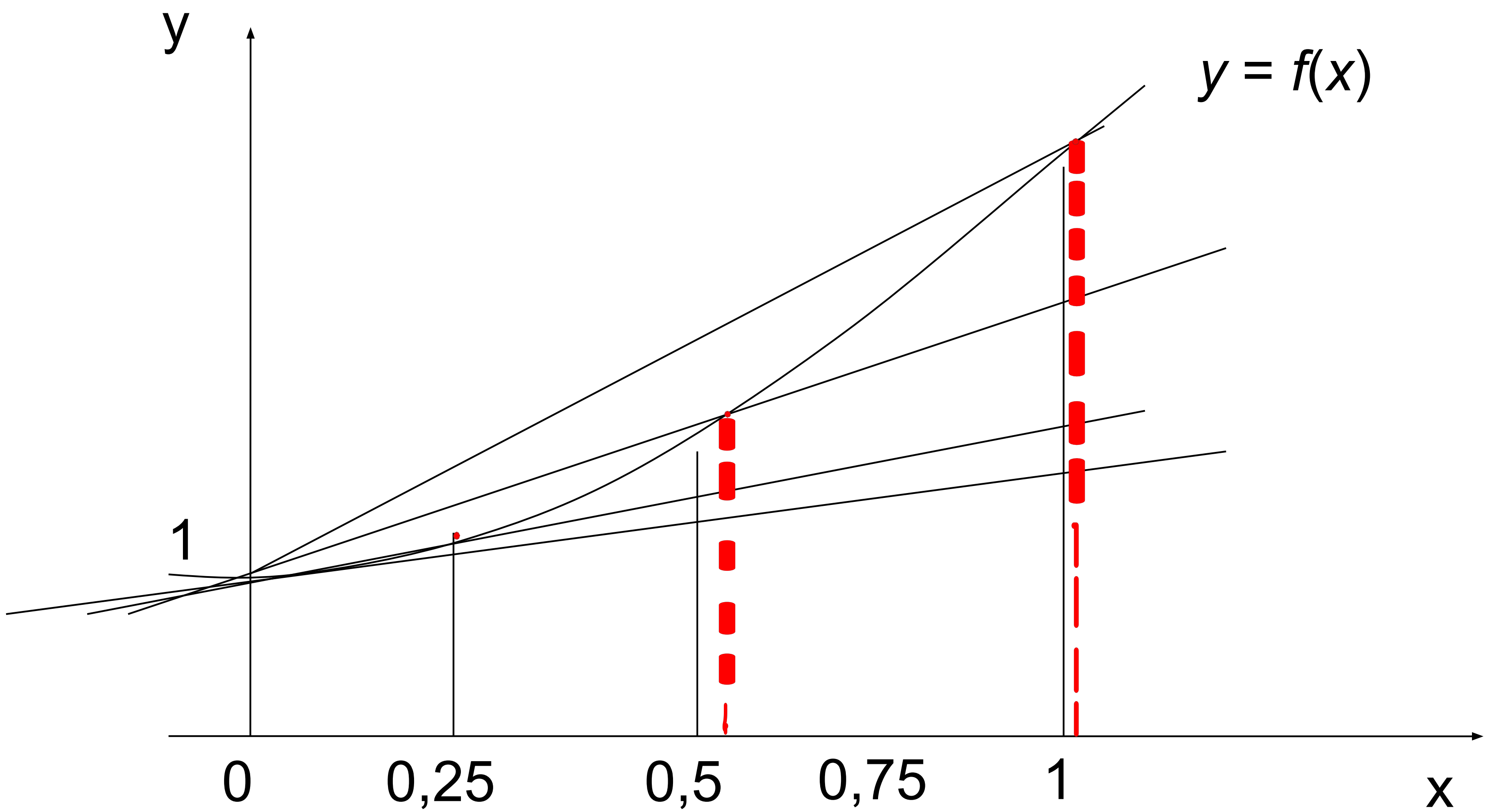
Будем вычислять только конечное количество членов D_1, D_2, **…,** D_n последовательности **(2)**.

Следовательно, для ответа следует использовать D_n.

Причем необходимо выбирать значение h_n так, чтобы D_n было хорошим приближением к производной $\boldsymbol{f'(x)}$**.**

Для примера рассмотрим функцию $\boldsymbol{f(x) = e^x}$ и используем длину шагов, равную h **=** 1**, ½ и ¼**, чтобы построить секущую линию, которая проходит между точками **(0;** 1**)** и **(**h**,** f **(**h**))** соответственно.

Так как h уменьшается, то секущая приближается к касательной, как показано на рисунке.



Нужно произвести вычисления при h **= 0,00001**, чтобы получить приемлемый численный ответ, и для этого значения h графики касательной и секущей должны быть неразличимы.

ТЕМА 5. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

§1. Приближенные методы вычислений определенных интегралов

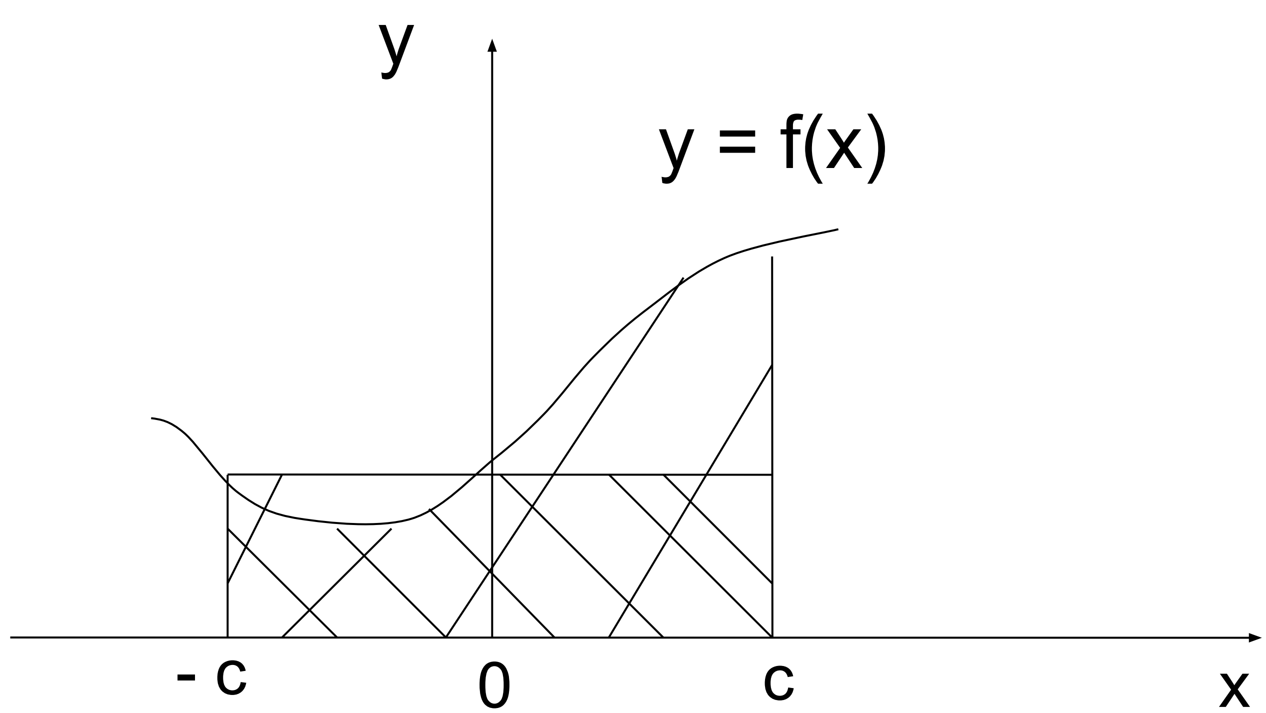
Формула Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла имеет вид $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Однако, вычисление по этой формуле не всегда возможно.

В таких случаях используются приближенные методы вычисления интегралов.

Наиболее употребительными среди них являются метод прямоугольников, метод трапеций и метод парабол.

Пусть дан интеграл: $\int_{-c}^{c} f(x)\,dx$



Основная идея: Заменить подынтегральную функцию ***f(x)*** на многочлен, совпадающий с этой функцией в узлах интерполяции.

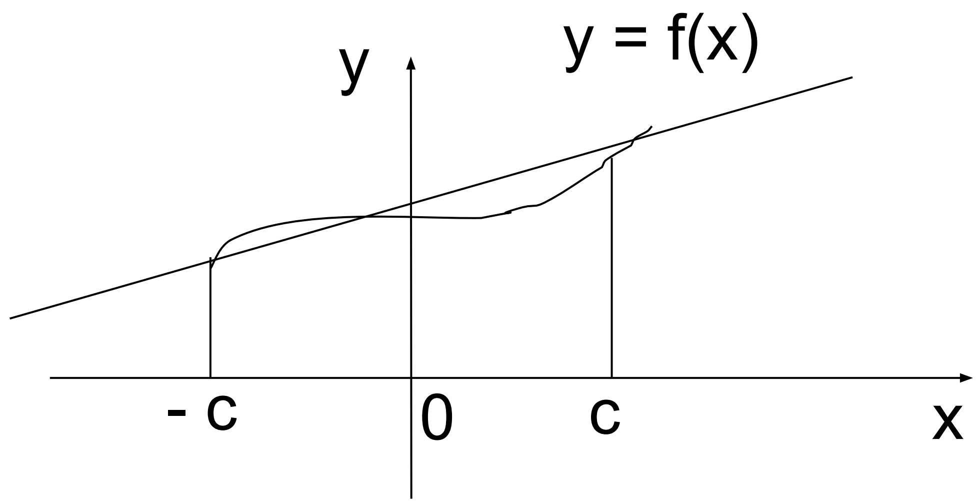
1) **f(x)** заменим многочленом нулевого порядка **y = f(0):**

$$\int_{-c}^{c} f(x)\,dx \approx f(0)\cdot 2c$$

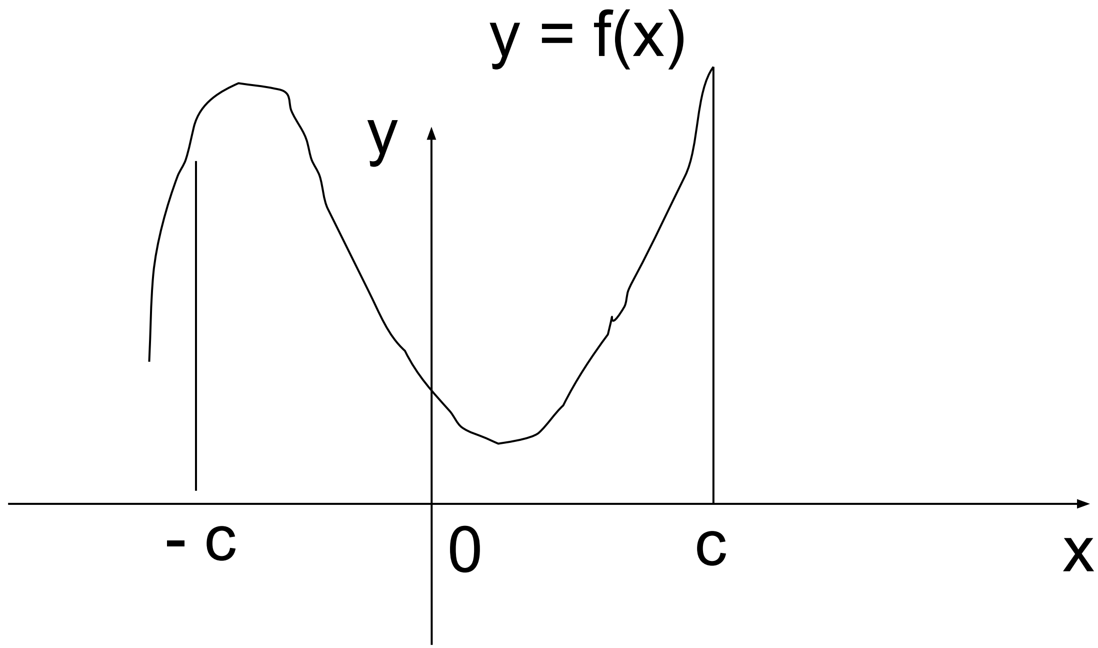
2) **f(x)** заменим многочленом первого порядка, который совпадает с функцией **f(x)** в точках **–c** и **c**.
Т.е. **y = kx + b**

$$\int_{-c}^{c} f(x)\,dx \approx \frac{f(-c)+f(c)}{2}\cdot 2c = c\,(f(-c)+f(c))$$

(площадь трапеции **(a + b)/2 · h**)



3) **f(x)** заменим многочленом второго порядка, который совпадает с функцией **f(x)** в точках **–c, 0** и **c**. Т.е. $\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$.



1. Метод прямоугольников

Пусть дан интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$

Отрезок интегрирования **[a, b]** разобьем на **n** равных частей: $\mathbf{a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n = b}$, тогда длина каждого отрезка $h = \dfrac{b-a}{n}$, $\mathbf{x_k = x_0 + kh}$.

Формулы прямоугольников имеют вид:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\cdot(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})) + R_n$$

или

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\cdot(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots + f(x_n)) + R_n$$

Однако для удобства вычислений поступают следующим образом:

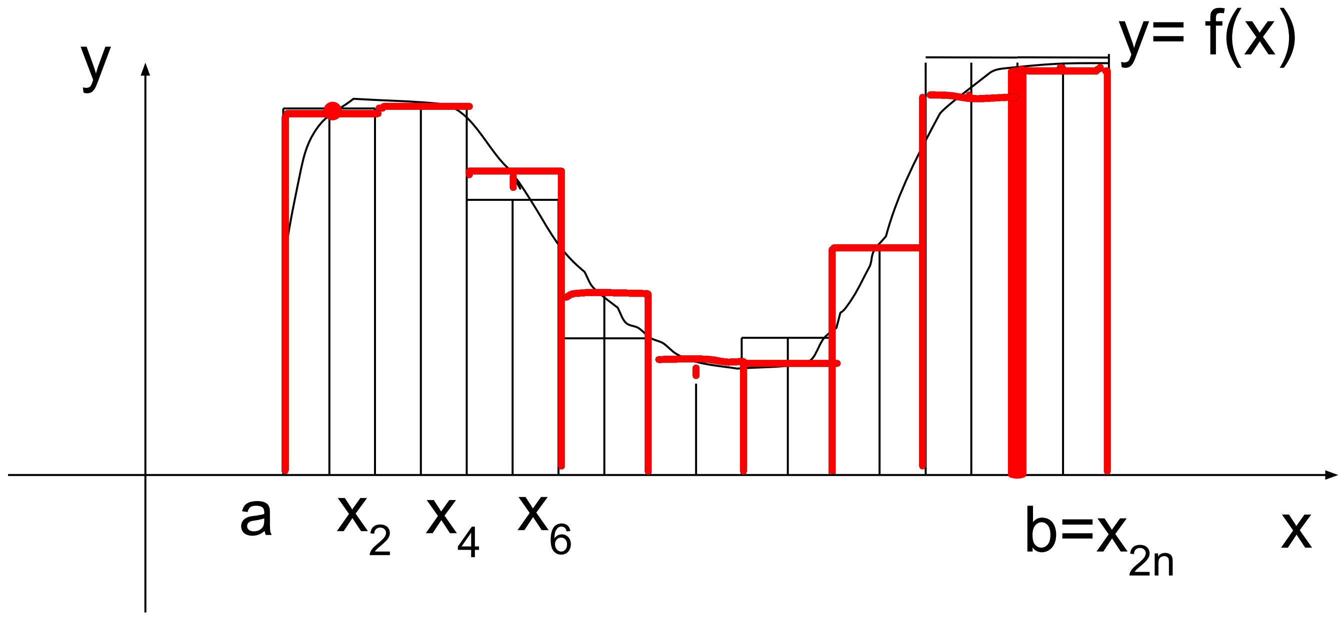
Точку $\mathbf{x_1}$ выбирают таким образом, чтобы она являлась серединой первого отрезка, т.е. при разбивании отрезка на части таким образом:

$\mathbf{a = x_0 < x_2 < x_4 < x_6 < \ldots < x_{2n} = b}$, точка $x_1 = \dfrac{x_0 + x_2}{2}$

Остальные точки получаются прибавлением шага **h** к каждой предыдущей точке. В результате получается формула:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n} \cdot (f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + \ldots + f(x_{2n-1})) + R_n$$

– обобщенная формула прямоугольников.



Оценка погрешности формулы прямоугольников:

$$|R_n(x)| \le \frac{(b-a)^3}{24\,n^2} M_2 < \varepsilon, \quad \text{где} \quad M_2 = \max_{a \le x \le b} |f''(x)|$$

2. Метод трапеций

Пусть дан интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$

Отрезок интегрирования **[a, b]** разобьем на **n** равных частей: $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n = b$, тогда длина каждого отрезка $h = \frac{b-a}{n}$, $x_k = x_0 + kh$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \cdot h =$$

$$= \frac{b-a}{2n}\{ f(x_0) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_3) + \ldots + f(x_{n-1}) + f(x_n)\} =$$

$$= \frac{b-a}{2n}\{f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\}$$

Вывод:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2n}\{f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\}$$

– формула трапеций.

Оценка погрешности формулы трапеций.

$$|R_n(x)| \le \frac{(b-a)^3}{12\,n^2} M_2, \quad \text{где} \quad M_2 = \max_{a\le x\le b} |f''(x)|$$

3) *Метод парабол (Симпсона).*

Пусть дан интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$

Отрезок интегрирования **[a, b]** разобьем на 2**n** равных частей: $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{2n} = b$.

Заменим функцию f(x) на $[x_0, x_2]$ интерполяционным многочленом Ньютона с узлами x_0, x_1, x_2.

$$P_2(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1)$$

Где $(x - x_1) = x - x_0 - h$

Тогда $(x - x_0)(x - x_1) = (x - x_0)(x - x_0 - h) =$

$$=(x - x_0)^2 - h(x - x_0)$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)\,dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_2} \{\ y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}[(x - x_0)^2 - h(x - x_0)]\ \}\,dx =$$

$$= \left(y_0 x + \frac{\Delta y_0}{h}\frac{(x - x_0)^2}{2} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}\frac{(x - x_0)^3}{3} - \frac{\Delta^2 y_0}{2!h}\frac{(x - x_0)^2}{2} \right)\Bigg|_{x_0}^{x_2} =$$

$$= y_0 (x_2 - x_0) + \frac{\Delta y_0}{h}\frac{(x_2 - x_0)^2}{2} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}\frac{(x_2 - x_0)^3}{3} - \frac{\Delta^2 y_0}{2!h}\frac{(x_2 - x_0)^2}{2} =$$

$$= y_0 2h + \frac{\Delta y_0}{h}\frac{(2h)^2}{2} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}\frac{(2h)^3}{3} - \frac{\Delta^2 y_0}{2!h}\frac{(2h)^2}{2} =$$

$$= 2h\, y_0 + 2h\Delta y_0 + \frac{4}{3}\ h\Delta 2y_0 - \Delta 2y_0\, h =$$

$$= h\,(2y_0 + 2(y_1 - y_0) + \frac{1}{3}\ (y_2 - 2y_1 + y_0)) =$$

$$= h\,(\frac{1}{3}\ y_2 + \frac{4}{3} y_1 + \frac{1}{3} y_0) = \frac{h}{3}\ (y_2 + 4y_1 + y_0)$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_2 + 4y_1 + y_0)$$

тогда на промежутке $[x_0, x_2]$ имеем:

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_4 + 4y_3 + y_2)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b P_2(x)\,dx =$$

$$= \frac{h}{3}(\, y_2 + 4y_1 + y_0 + y_4 + 4y_3 + y_2 + y_6 + 4y_5 + y_4 + \ldots + 4y_{2n-1} + y_{2n-2}) =$$

$$= \frac{h}{3}\ \{f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + 4\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1})\}$$

Вывод:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\ \{f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + 4\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1})\}$$

Оценка погрешности формулы парабол:

$$|R_n(x)| \le \frac{(b-a)^5}{180\,(2n)^4} M_4$$

где $$M_4 = \max_{a\le x\le b} |f^{IV}(x)|$$

§2. Формулы Ньютона-Котеса

Необходимо вычислить $\int\limits_a^b f(x)dx$

Делим отрезок [a, b] на n равных частей.

Шаг разбиения $h = \dfrac{b-a}{n}$ и $x_0 = a$, $x_i = x_{i-1} + h$ ($i=1,2,\ldots,n-1$), $x_n = b$.

Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} H_i y_i \qquad \textbf{(1)}$$

– *квадратурная формула Ньютона-Котеса*,

где

$$H_i := \frac{1}{n}\cdot\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\int\limits_0^n \frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{q-i}\,dq \qquad \textbf{(2)}$$

– <u>*коэффициенты Котеса*</u>.

(значению x = a, соответствует значение $q = 0$, а $x = b$ – значение $q = n$ и $dx = hdq$)

Эти формулы определяют *семейство квадратурных формул.*

Параметром этого семейства является число *n* – степень интерполяционного многочлена, которым заменяется подынтегральная функция.

Рассмотрим несколько простейших частных случаев, соответствующих небольшим значениям n ∈ N.

При этом конкретные формулы будем получать не на основе общих формул, а используя для этой цели вместо многочлена Лагранжа

$$L_n(x_0 + qh) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i} y_i}{i!(n-i)!} \cdot \frac{q(q-1)...(q-n)}{q-i}$$

Эквивалентный ему первый интерполяционный многочлен Ньютона:

$$P_n(x_0 + qh) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots +$$

$$+ \frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \qquad \textbf{(3)}$$

1. Пусть n=1, т.е. имеется всего две точки x_0 и $x_1=x_0 + h$, в которых известны значения функции ($y_0 = f(x_0)$ и $y_1 = f(x_1)$)

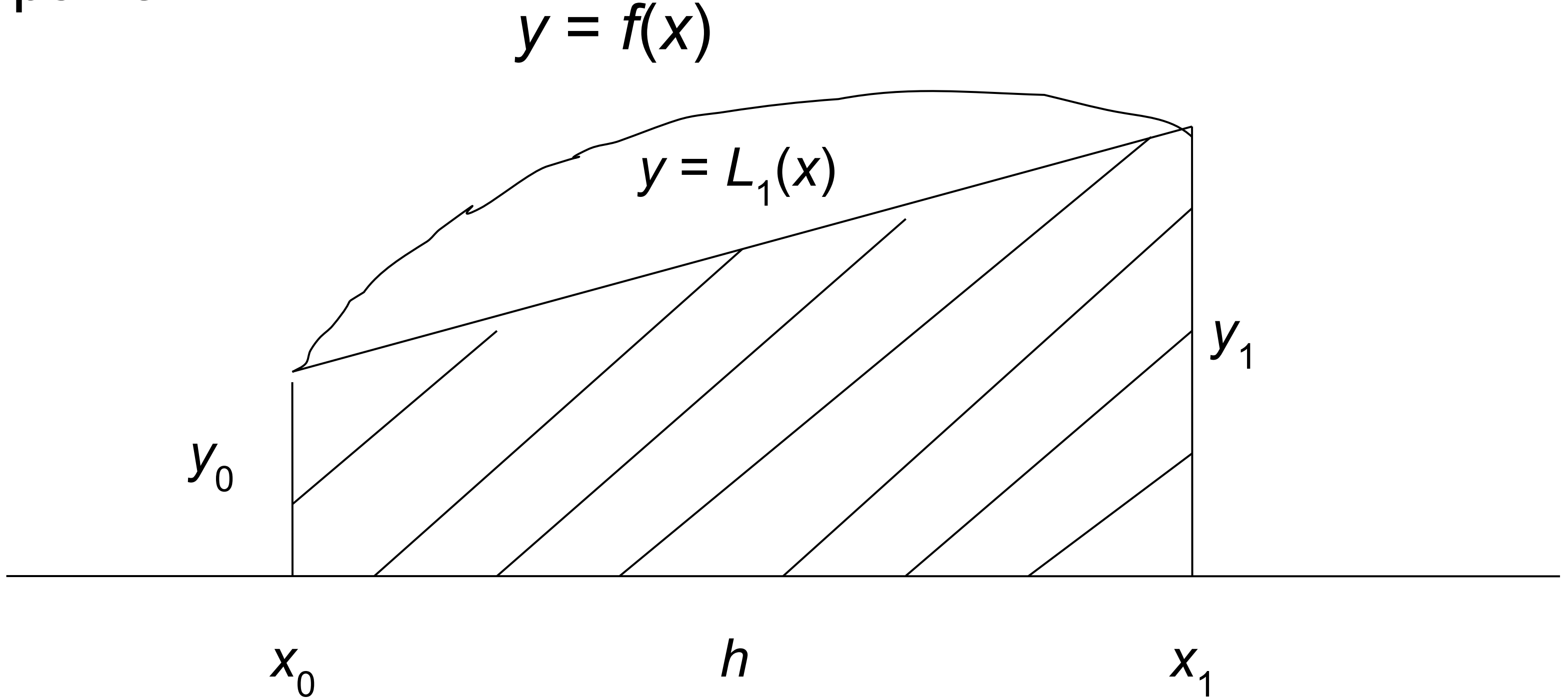
Этим точкам соответствуют значения 0 и 1 переменной q.

Следовательно

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \int_0^1 (y_0 + q\,\Delta\,y_0)\,h\,dq = h\left[y_0\,q + \frac{q^2}{2}\Delta\,y_0\right]_0^1 =$$

$$= h\left(y_0 + \frac{y_1 - y_0}{2}\right) = h\frac{y_0 + y_1}{2} \qquad \textbf{(4)}$$

Получена ***простейшая квадратурная формула трапеций***, к которой можно прийти и из геометрических соображений:



Остаточный член ***этой формулы:***

$$r_1 := -\frac{f''(\xi_1)}{12} h^3 \qquad \textbf{(5)}$$

где $\xi_1 \in (x_0, x_1)$ – *некоторая точка.*

2. Положим в **(3)** n = 2, т.е. проинтерполируем функцию f(x) по трем точкам: x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 = 2h$.

Тогда

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \int_0^2 \left(y_0 + q\,\Delta\,y_0 + \frac{q\,(q-1)}{2}\Delta^2 y_0\right) h\,dq =$$

$$= h\,[\,2y_0 + 2(y_1 - y_0) + \frac{1}{3}\,(y_2 - 2y_1 + y_0)] =$$

$$= \frac{h}{3}\,(y_0 + 4y_1 + y_2) \qquad \textbf{(6)}$$

Полученное приближенное равенство называется ***простейшей формулой Симпсона.***

Ее *остаточный член*: $r_2 := -\frac{h^5}{90} f^{IV}(\xi),\ \xi \in (x_0, x_2)$ **(7)**

3. Предполагая теперь n = k, мы придем к частным формулам Ньютона-Котеса:

$$\int_{x_0}^{x_k} f(x)dx = B_k\ h\sum_{i=0}^{k} a_i^{(k)} f(x_i) + r_k(h) \qquad \textbf{(6)}$$

где $\boldsymbol{x_i = x_0 + ih}$, а коэффициенты $\boldsymbol{B_k}$, $\boldsymbol{a_i^{(k)}}$, и остаточные члены $\boldsymbol{r_k(h)}$ задаются таблицей (точка $\xi \in (x_0, x_k)$, для каждого k своя).

Параметры некоторых частных формул *Ньютона-Котеса вида (8)*

k	B_k	$a_0^{(k)}$	$a_1^{(k)}$	$a_2^{(k)}$	$a_3^{(k)}$	$a_4^{(k)}$	$a_5^{(k)}$	…	$r_r(h)$
1	$\frac{1}{2}$	1	1						$-\frac{h^3}{12} f''(\xi)$
2	$\frac{1}{3}$	1	4	1					$-\frac{h^5}{90} f^{IV}(\xi)$
3	$\frac{3}{8}$	1	3	3	1				$-\frac{3h^5}{80} f^{IV}(\xi)$
4	$\frac{2}{45}$	7	32	12	32	7			$-\frac{8h^7}{945} f^{VI}(\xi)$
5	$\frac{5}{288}$	19	75	50	50	75	19		$-\frac{275h^7}{12096} f^{VI}(\xi)$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

§3. КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА ГАУССА

Общий вид линейной квадратурной формулы – это

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_i A_i f(x_i) \qquad \textbf{(8)}$$

где фиксированные аргументы x_i называют ***узлами***, а коэффициенты A_i – ***весами (весовыми коэффициентами) квадратурной формулы*** (определенный интеграл приближенно равен среднему взвешенному значений подынтегральной функции, вычисленных в определенных точках промежутка интегрирования).

Все рассмотренные выше квадратурные формулы характерны тем, что узла в них брались равноотстоящими с шагом h, а веса находились в результате подмены подынтегральной функции f(x) кусочно-постоянной в случае формул прямоугольников, кусочно-линейной в случае формул трапеций, кусочно-квадратичной в случае формулы Симпсона и т.д.

Например, у составной формулы трапеций набор весов получился следующий:

$$\frac{h}{2}, h, h, \ldots, h, \frac{h}{2}$$

а у составной формулы Симпсона –

$$\frac{h}{3}, \frac{4h}{3}, \frac{2h}{3}, \frac{4h}{3}, \frac{2h}{3}, \ldots, \frac{4h}{3}, \frac{h}{3}.$$

Далее откажемся от равномерного распределения узлов x_i на промежутке интегрирования [a, b].

В таком случае целесообразно предварительно сделать линейную замену

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$$

и преобразовать исходный интеграл к интегралу со стандартным промежутком интегрирования [–1, 1]:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right)dt \qquad \textbf{(9)}$$

Это равенство позволяет рассматривать вычисление интеграла

$$\overset{\boxtimes}{I} \approx \int_{-1}^{1} \varphi(t)dt$$

т.е. строить квадратурные формулы вида

$$\overset{\boxtimes}{I} \approx \sum_{i=1}^{n} A_i \varphi(t_i) \qquad \textbf{(10)}$$

от которых на основе **(9)** легко перейти к квадратурным формулам **(8).**

Формула **(10)** имеет ***2n*** параметров: ***n*** узлов $\boldsymbol{t_i}$ и ***n*** весов $\boldsymbol{A_i}$.

Если считать, что мы свободны в выборе как узлов, так и весов, можно попытаться подобрать их такими, чтобы равенство

$$\int_{-1}^{1} \varphi(t)dt = \sum_{i=1}^{n} A_i \varphi(t_i) \qquad \textbf{(11)}$$

было точным для многочленов степени 2n – 1 или, что тоже, для 2n степенных функций $\phi(t) = 1, t, t^2, \ldots, t^{2n-1}$.

Формула (11) называется ***квадратурной формулой Гаусса.***

Ее решение упирается в решение нелинейной системы:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} A_i = 2, \qquad \sum_{i=1}^{n} A_i t_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^{\,2} = \dfrac{2}{3}, \qquad \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^{\,3} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^{\,2n-2} = \dfrac{2}{2n-1}, \quad \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^{\,2n-1} = 0 \end{cases}$$

Однако, решение этой системы затруднительно, но его не сложно обойти, если знать конечный результат. Но мы рассматривать их не будем.