Схема Бернулли

Независимые повторные испытания.

- Если производится несколько испытаний, причем вероятность события А в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют независимыми повторными испытаниями.

- В разных независимых испытаниях событие А может иметь либо различные вероятности, либо одну и ту же вероятность. Будем далее рассматривать лишь такие независимые испытания, в которых событие А имеет одну и ту же вероятность.

Независимые повторные испытания.

Примеры:

1. Подбрасываем игральный кубик n раз. Выпадение числа очков от 1 до 6 происходит с вероятностью 1/6 в каждом из испытаний;
2. Приобретаем n лотерейных билетов. Для каждого из лотерейных билетов вероятность выигрыша есть величина постоянная;
3. Подбрасывается n раз монета. Выпадение орла или решки происходит с вероятностью ½ в каждом испытании.

Пример 1 и примеры 2,3 отличаются друг от друга тем, что в первом примере возможно появление 6-ти событий, а во втором и третьем – появление только 2-х событий: выиграл - не выиграл, орел – решка, т.е. условно можно назвать такие исходы «успех – неуспех». Такие испытания называются **испытаниями Бернулли**.

Независимые повторные испытания.

Независимые повторные испытания, в каждом из которых возможно появление события А (успех) с постоянной вероятностью p или непоявление события А (неуспех) с постоянной вероятностью q=1-p, называются **испытаниями Бернулли** или **схемой Бернулли.**

Швейцарский математик Якоб Бернулли (1654-1705).

Формула Бернулли.

Пусть производится n испытаний Бернулли. Вероятность того, что в этих испытаниях событие А произойдет ровно m раз можно найти по **формуле Бернулли:**

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

n – число испытаний

p – вероятность появления события А в одном испытании

q=1-p - вероятность не появления события А в одном испытании

$P_n(m)$ – вероятность того, что событие А появится ровно m раз в n испытаниях

Формула Бернулли.

Пример. Вероятность того, что расход электроэнергии в продолжении суток не превысит установленной нормы, равна 0,75. Найти вероятность того, что в ближайшую неделю расход электроэнергии в течении четырех суток не превысит норму.

Решение. Обозначим А- расход не превысит норму.

По условию n = 7, m = 4, p = 0.75, q=1-p=0,25

По формуле Бернулли: $$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

$$P_7(4) = C_7^4 \cdot p^4 \cdot q^{7-4} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} \cdot 0{,}75^4 \cdot 0{,}25^3 = 35 \cdot 0{,}316 \cdot 0{,}0156 \approx 0{,}172$$

Ответ: вероятность того, что в ближайшую неделю расход электроэнергии в течении четырех суток не превысит норму равна 0,1969

Формула Бернулли

Пример. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть одному из них 2 партии из 4-х или 3 партии из 6-ти?

Решение.

1) Найдем вероятность выиграть одному из них 2 партии из 4-х:
n=4, m=2, p=1/2, q=1/2. По формуле Бернулли:

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot p^2 \cdot q^{4-2} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

2) Найдем вероятность выиграть одному из них 3 партии из 6-ти:
n=6, m=4, p=1/2, q=1/2. По формуле Бернулли:

$$P_6(3) = C_6^3 \cdot p^3 \cdot q^{6-3} = \frac{6!}{3!\cdot 3!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 20 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{16}$$

Сравним полученные результаты: т.к. 3/8 > 5/16, то вероятнее выиграть одному из них 2 партии из 4-х.

Формула Бернулли

Пример. Исследование инкубации яиц яичного кросса Беларусь-9 показало, что цыплята выводятся в среднем из 70% заложенных в инкубатор яиц. Из общего количества заложенных в инкубатор яиц случайным образом отобраны и помечены 6. Найти вероятность того, что из помеченных яиц выведутся:

a) менее трех цыплят $P_6(m < 3)$; (0,07047)

b) более трех цыплят $P_6(m > 3)$; (0,74431)

c) не менее трех цыплят $P_6(m \geq 3)$; (0,92953)

d) не более трех цыплят $P_6(m \leq 3)$; (0,25569)

Наивероятнейшее число появлений события.

Пример. Вероятность изготовления на автоматическом станке стандартной детали равна 0,8. Найти вероятности возможного числа появления бракованных деталей среди 5 отобранных.

Решение. Вероятность изготовления бракованной детали

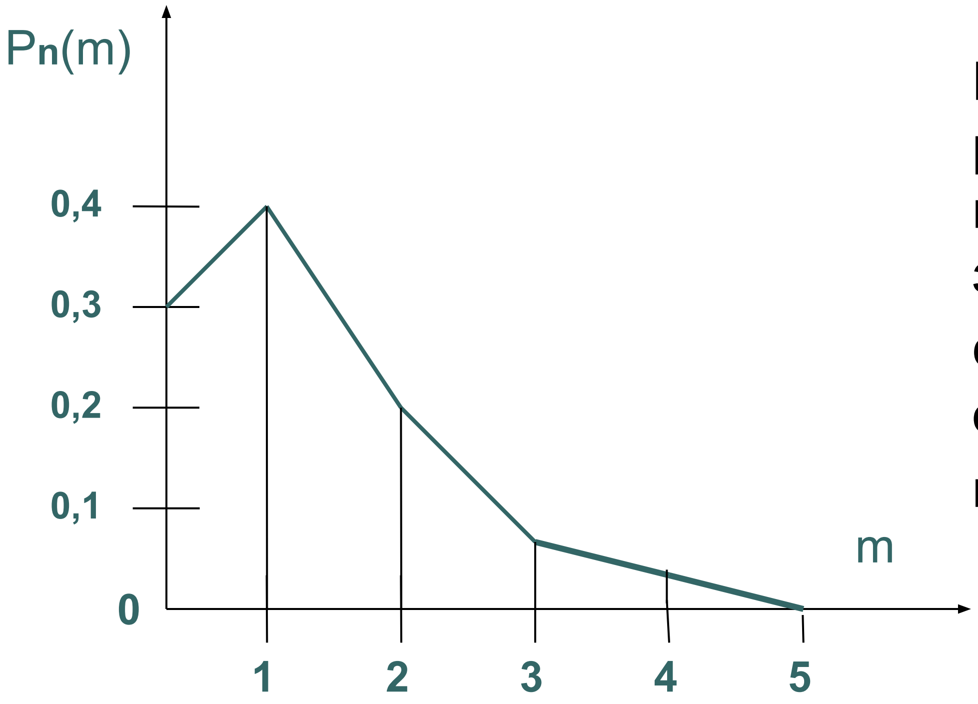
$P = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

Искомые вероятности находим по формуле Бернулли:

$P_5(0)=0{,}32768$;	$P_5(3)=0{,}0512$;
$P_5(1)=0{,}4096$;	$P_5(4)=0{,}0064$;
$P_5(2)=0{,}2048$;	$P_5(5)=0{,}00032$.

Полученные вероятности изобразим графически точками с координатами $(m, P_n(m))$. Соединяя эти точки, получим **многоугольник, или полигон, распределения вероятностей.**

Наивероятнейшее число появлений события.



Рассматривая многоугольник распределения вероятностей мы видим, что есть такие значения m (в данном случае, одно - $m_0=1$), обладающие наибольшей вероятностью $P_n(m)$.

Наивероятнейшее число появлений события.

Число m_0 наступления события А в n независимых испытаниях называется **наивероятнейшим**, если вероятность осуществления этого события $P_n(m_0)$ по крайней мере не меньше вероятностей других событий $P_n(m)$ при любом m.

Для нахождения m_0 используется двойное неравенство:

$$\mathbf{n \cdot p - q \leq m_0 \leq n \cdot p + p}$$

Наивероятнейшее число появлений события.

Пример. В результате многолетних наблюдений вероятность дождя 21 июля в городе N составляет 0,3. Найти наивероятнейшее число дождливых дней 21 июля на ближайшие 30 лет.

Решение. По условию: $p=0.3$, $q=0.7$, $n=30$.

$n \cdot p - q \le m_0 \le n \cdot p + p$

$0.3 \cdot 30 - 0.7 \le m_0 \le 0.3 \cdot 30 + 0.3$

$8.3 \le m_0 \le 9.3$

$m_0 = 9$

Ответ: наивероятнейшее число дождливых дней 21 июля на ближайшие 30 лет равно 9.

Т.е. вероятнее всего 9 раз за 30 лет 21 июля будет дождливым.