Тема 2. КИНЕМАТИКА ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

- 2.1. Понятие механики, модели в механике
- 2.2. Система отсчета, тело отсчета
- 2.3. Кинематика материальной точки
  - 2.3.1. Путь, перемещение
  - 2.3.22.3.2.2.3.2. Скорость
  - 2.3.3. Проекция вектора скорости на оси координат
  - 2.3.4. Ускорение. Нормальное и тангенциальное ускорение
- 2.4. Кинематика твердого тела
  - 2.4.1. Поступательное движение2.4.1. Поступательное движение твердого тела
  - 2.4.2. Вращательное движение вокруг неподвижной оси

2.1. Понятие механики, модели в механике

Механика *– часть физики, которая изучает закономерности механического движения и причины, вызывающие или изменяющие это движение.*

Механическое движение *– это изменение с течением времени взаимного расположения тел или их частей.*

Механика вообще подразделяется на три части: ***статику, кинематику и динамику***.

Кинематика (*от греческого слова kinema – движение) – раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета их массы и действующих на них сил.*

Динамика (*от греческого dynamis – сила*) изучает движения тел в связи с теми причинами, которые обуславливают это движение.

Статика (*от греческого statike – равновесие*) изучает условия равновесия тел.

Без знаний механики невозможно представить себе развитие современного машиностроения.

Развитие механики, как науки, начиналось с III в. до н.э., когда древнегреческий ученый **Архимед** (287 – 312 до н.э.) сформулировал закон рычага и законы равновесия плавающих тел.

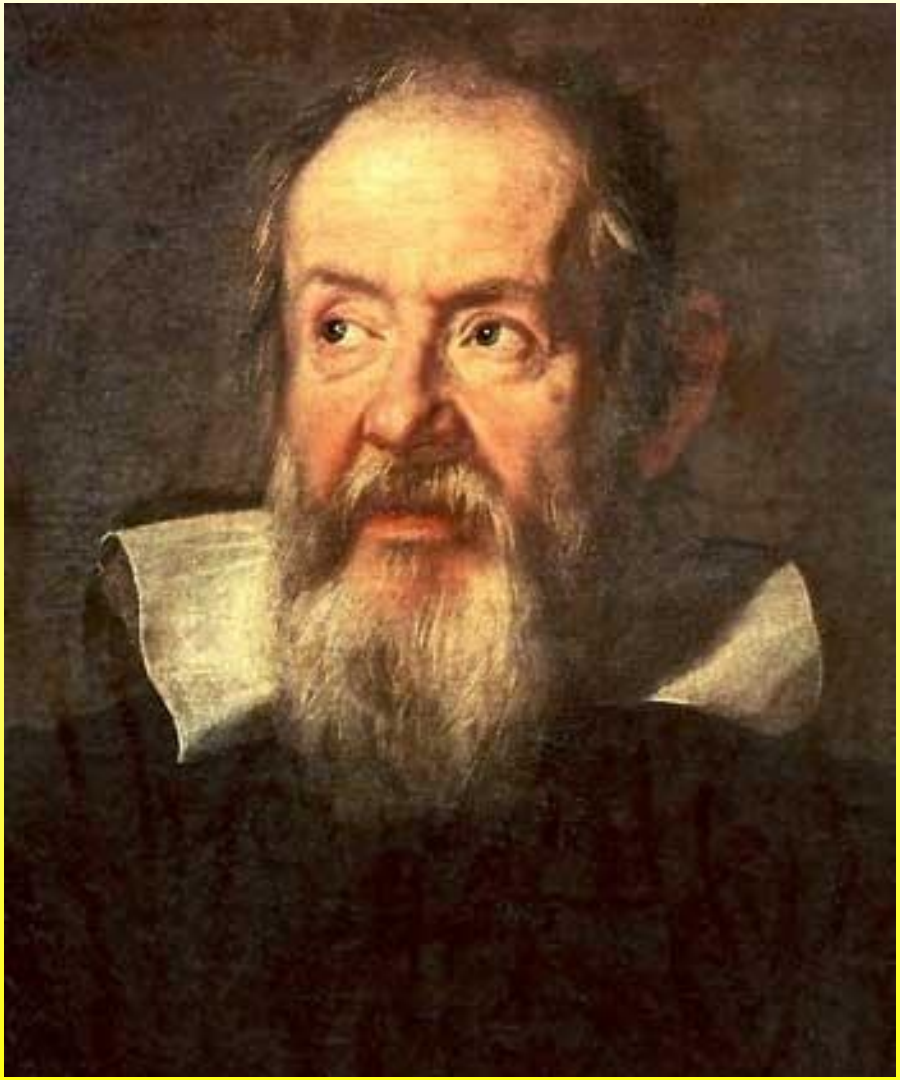
Основные законы механики установлены итальянским физиком и астрономом **Г. Галилеем** (1564 – 1642) и окончательно сформулированы английским физиком **И. Ньютоном** (1643 – 1727).

Механика Галилея и Ньютона называется ***классической***, *т.к. она рассматривает движение макроскопических тел со скоростями, значительно меньшими скорости света в вакууме*.

Галилео Галилей

(Galileo Galilei)

Родился	*15 февраля 1564* *Пиза (Pisa)* *Италия*
Умер	*8 января 1642* *Арчетри (Arcetri)* *Италия*



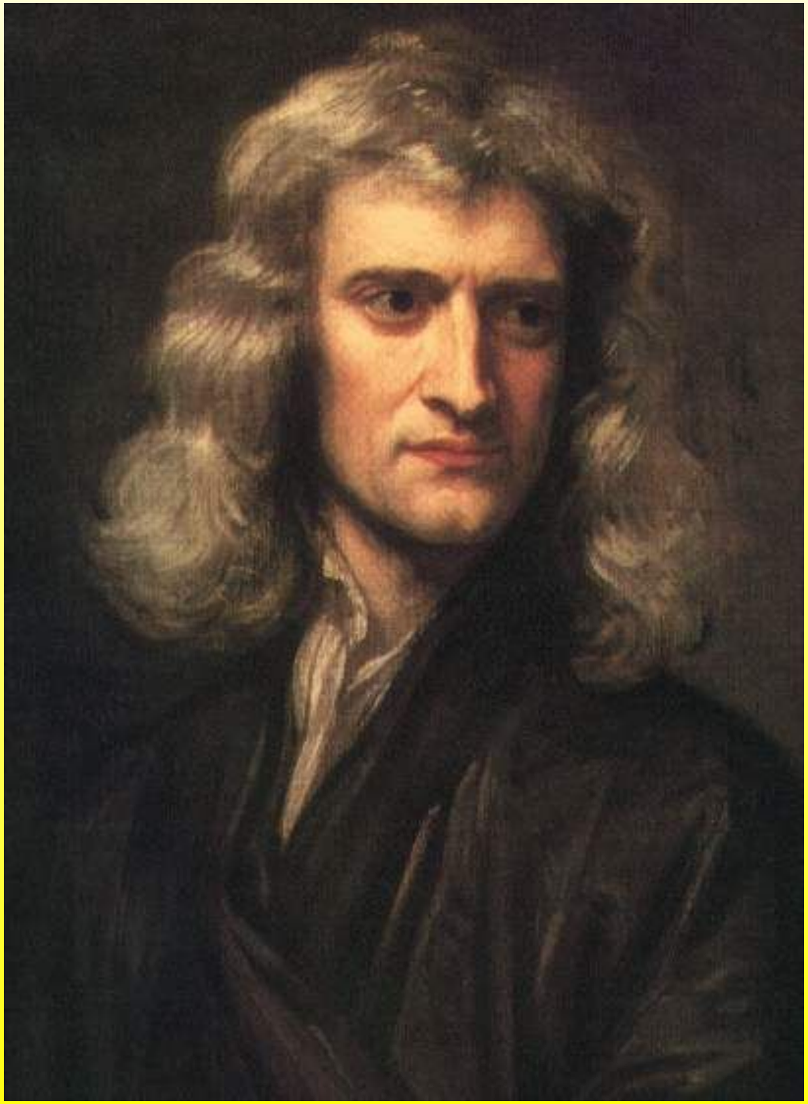
астроном, философ и физик.

Важнейшие роботы

улучшение телескопа;
астрономические наблюдения;

первый закон движения

Исаак Ньютон
(Isaac Newton)



Родился	***4 января 1643*** ***Вулсторп (Woolsthorpe)*** ***Англия***
Умер	***31 марта 1727*** ***Лондон (London)*** ***Англия***

физик, математик, астроном, алхимик и философ

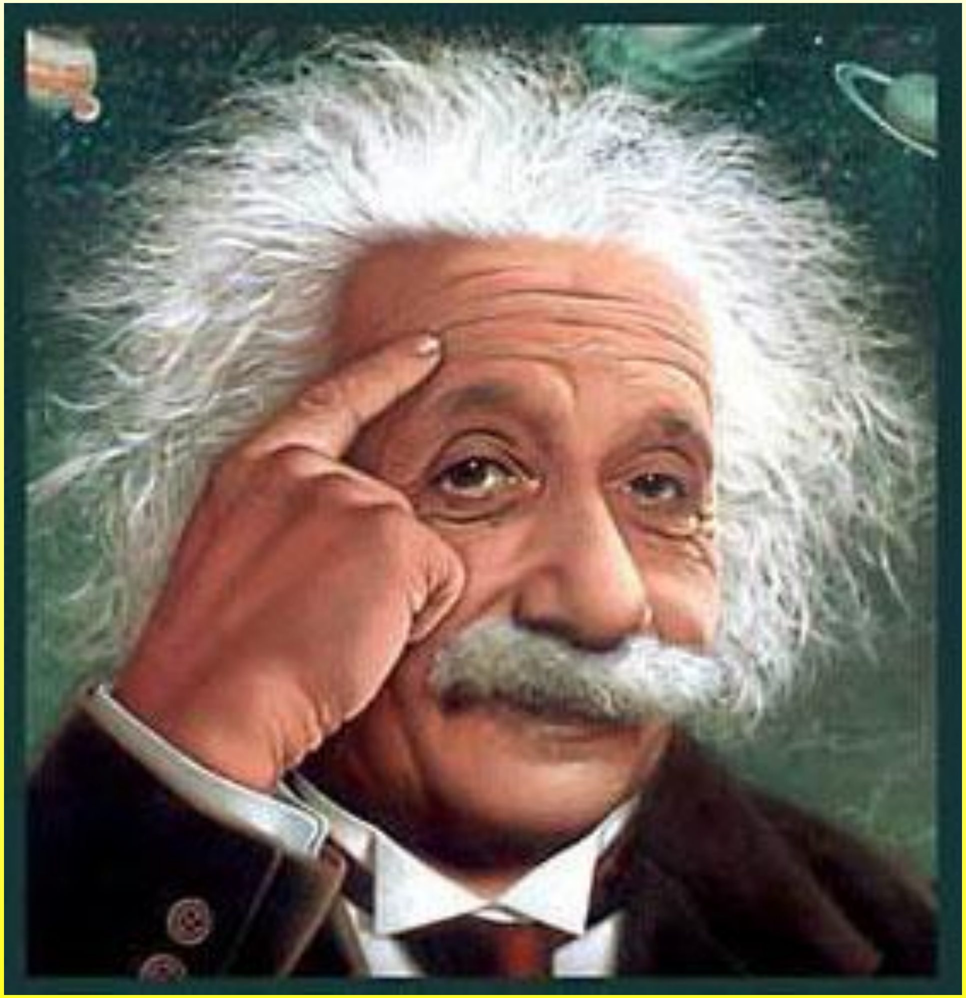
Важнейшие работы

закон всемирного тяготения
дифференциальное и интегральное исчисления
изобрел зеркальный телескоп
развил корпускулярную теорию света

Альберт Эйнштейн

(Albert Einstein)

Родился	*14 марта 1879* *Ульм (Ulm)* *Германия*
Умер	*18 апреля 1955* *Принцетон (Princeton)* *США (New Jersey)*



величайший ученый 20 века

Важнейшие работы:

теория относительности; квантовая и статистическая механика; космология

Нобелевская премия по физике 1921

Для описания движения тел в зависимости от условий задачи используют различные *физические модели.* Чаще других используют понятия *абсолютно твердого тела* и *материальной точки.*

Движение тел происходит под действием сил. Под действием внешних сил тела могут деформироваться, т.е. изменять свои размеры и форму.

Тело, деформацией которого можно пренебречь в условиях данной задачи, называют абсолютно твердым телом (*хотя абсолютно твердых тел в природе не существует*).

Тело, размерами которого в условиях данной задачи, можно пренебречь, называется ***материальной точкой.***

Можно ли данное тело рассматривать как материальную точку или нет, зависит не от размеров тела, а от условия задачи (например, наше огромное Солнце – тоже материальная точка в Солнечной системе).

2.2. Система отсчета, тело отсчета

Всякое движение *относительно,* поэтому для описания движения необходимо условиться, относительно какого другого тела будет отсчитываться перемещение данного тела. *Выбранное для этой цели тело называют* ***телом отсчета.***

Практически, для описания движения приходится связывать с телом отсчета *систему координат* (декартова, сферическая, и т.д.).

Система отсчета – совокупность системы координат и часов*, связанных с телом по отношению к которому изучается движение.*

Движения тела, как и материи, вообще не может быть вне времени и пространства. Материя, пространство и время неразрывно связаны между собой (нет пространства без материи и времени и наоборот).

Пространство трехмерно, поэтому «естественной» системой координат является, декартова или прямоугольная система координат, которой мы в основном и будем пользоваться.

В декартовой системе координат, положение точки ***A*** в данный момент времени по отношению к этой системе характеризуется тремя координатами *x*, *y*, *z* или радиус-вектором $\vec{r}$ проведенным из начала координат в данную точку (рисунок 2.1).

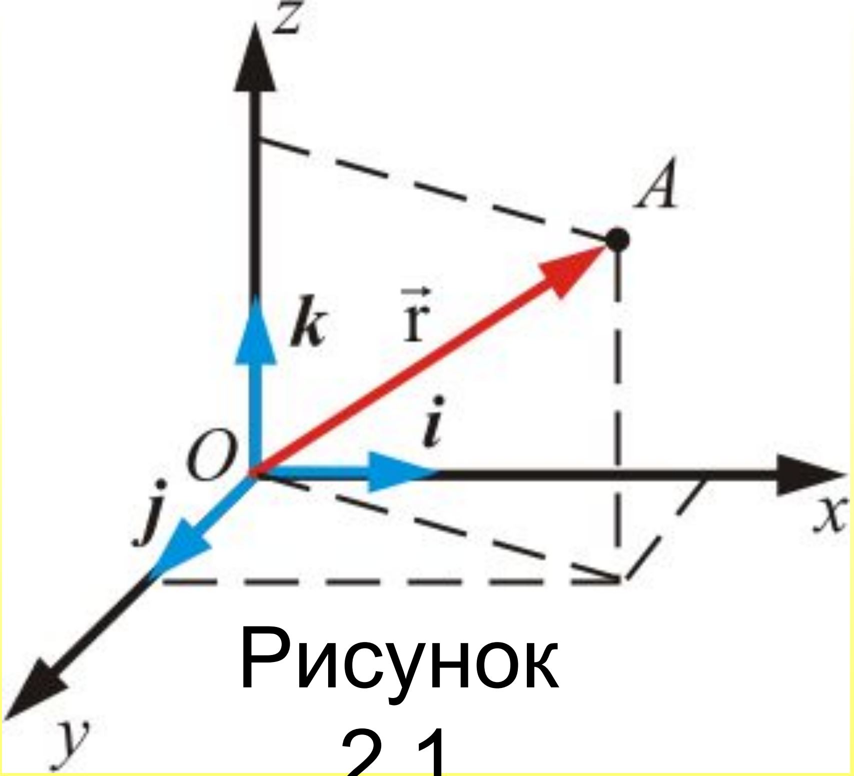


Рисунок 2.1

При движении материальной точки её координаты с течением времени изменяются.

В общем случае её движение определяется скалярными уравнениями:

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t). \qquad (2.2.1)$$

Уравнения движения

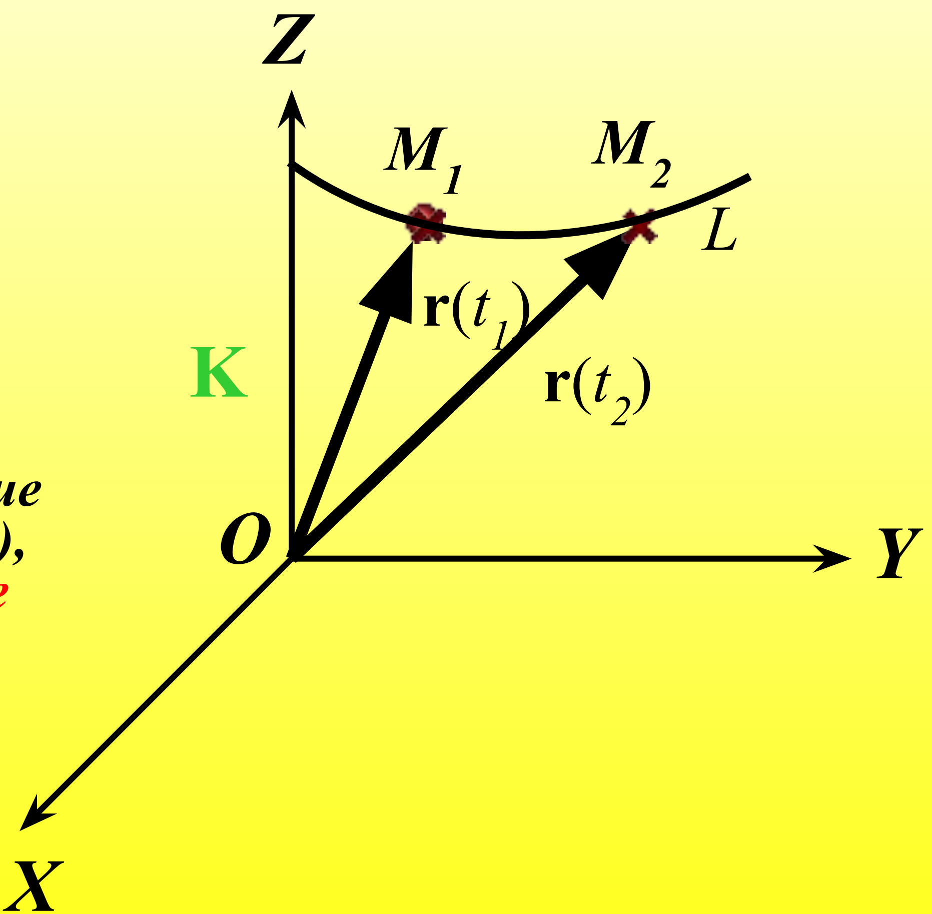
Рассмотрим движение материальной точки относительно некоторой СО K

Пусть за некоторый промежуток времени материальная точка переместилась из точки пространства M_1 в точку M_2

Соединим начало координат с точками M_1 *и* M_2

- это радиус-векторы $\mathbf{r}(t_1)$ *и* $\mathbf{r}(t_2)$

Уравнения движения, *описывающие положение материальной точки), можно записать в векторном виде или в координатной форме*



$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Эти уравнения эквивалентны векторному уравнению

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, \quad (2.2.2)$$

где *x*, *y*, *z* – проекции радиус-вектора $\vec{r}$ на оси координат, а ***i***, ***j***, ***k*** – ***единичные векторы*** (***орты***), направленные по соответствующим осям.

Уравнения (2.2.1) и (2.2.2) называются ***кинематическими уравнениями движения материальной точки.***

Число независимых координат, полностью определяющих положение точки в пространстве, называется ***числом степеней свободы.***

Если материальная точка движется в пространстве, то она имеет три степени свободы (координаты x, y, z). Если она движется на плоскости – две степени свободы. Если вдоль линии – одна степень свободы.

2.3. Кинематика материальной точки

2.3.1. Путь, перемещение

Положение точки *A* в пространстве можно задать с помощью радиус-вектора $\vec{r}_1$ проведенного из точки отсчета *O* или начала координат

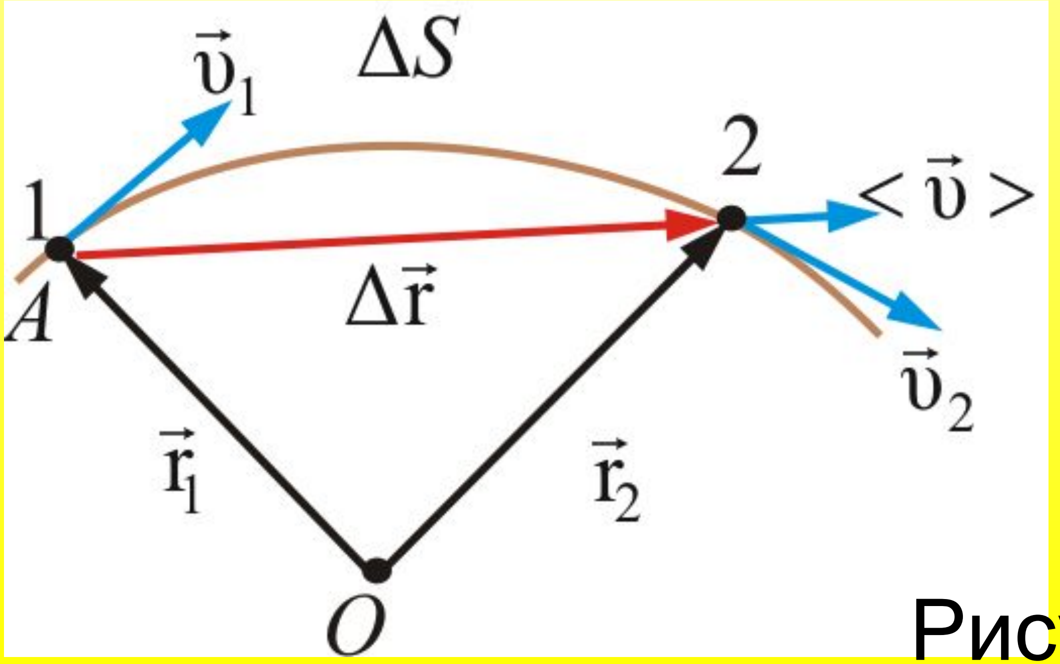
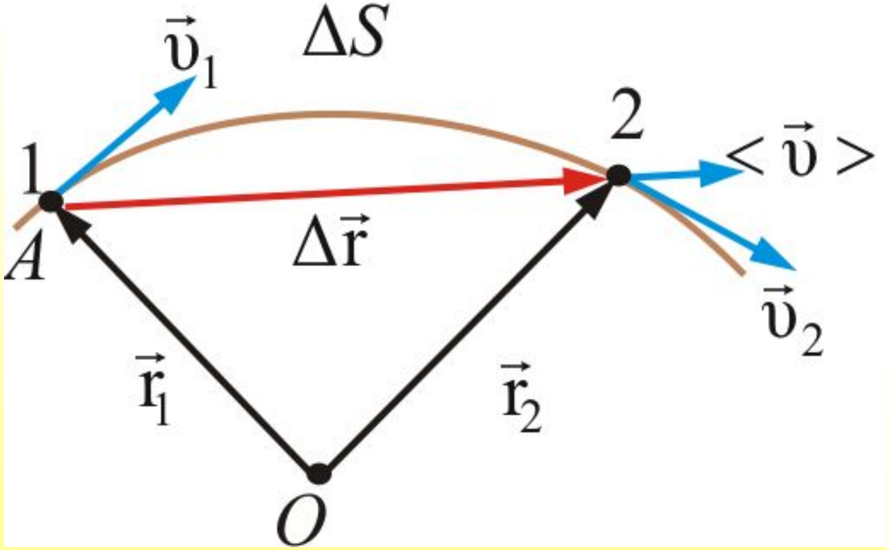


Рисунок 2.4



При движении точки *А* из точки 1 в точку 2 её радиус-вектор изменяется и по величине, и по направлению, т.е. $\vec{r}$ зависит от времени *t.*

Геометрическое место точек концов $\vec{r}$ называется ***траекторией точки***.

Длина траектории есть путь ***ΔS***. Если точка движется по прямой, то приращение $\Delta\vec{r}$ равно пути Δ*S*.

Пусть за время Δt точка A переместилась из точки 1 в точку 2.

Вектор перемещения $\Delta\vec{r}$ есть приращение $\vec{r}_1$ за время Δt

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x - x_0)\boldsymbol{i} + (y - y_0)\boldsymbol{j} + (z - z_0)\boldsymbol{k}; \quad (2.3.1)$$

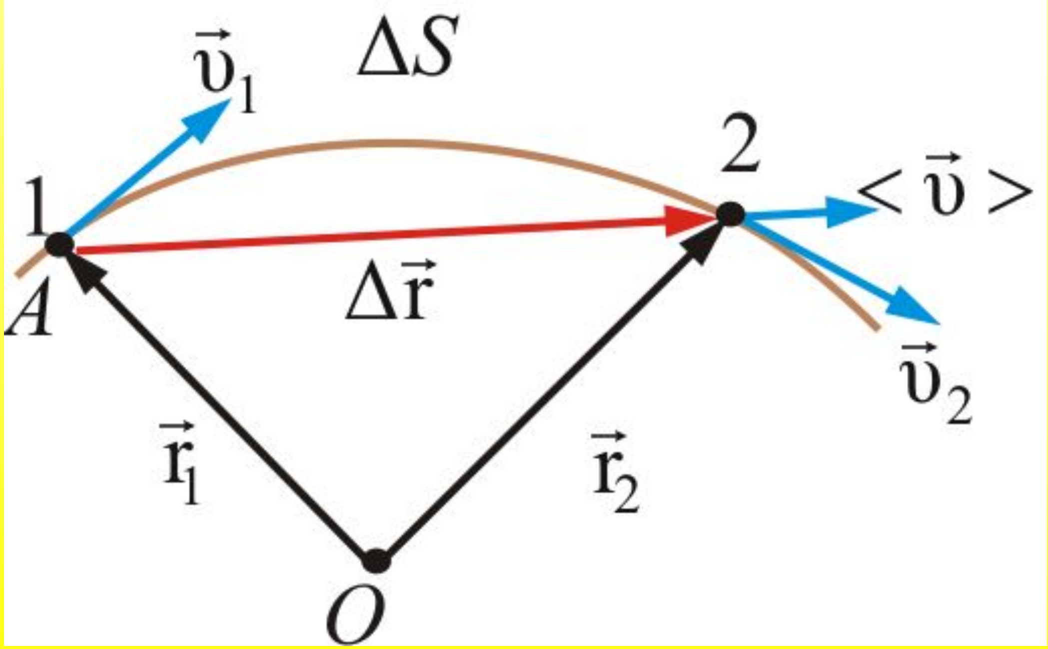
$$\Delta\vec{r} = \Delta x\boldsymbol{i} + \Delta y\boldsymbol{j} + \Delta z\boldsymbol{k}; \quad (2.3.2)$$

$$\left|\Delta\vec{r}\right| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}. \quad (2.3.3)$$

2.3.2. Скорость

Средний вектор скорости определяется как отношение вектора перемещения $\Delta\vec{r}$ ко времени Δt, за которое это перемещение произошло

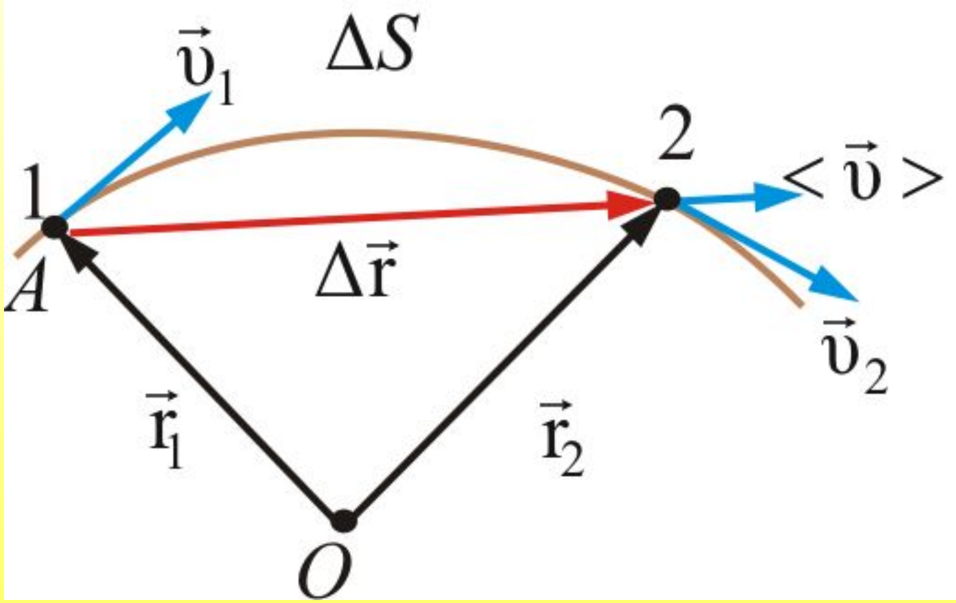
$$\boxed{\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \langle \vec{\upsilon} \rangle}$$



Вектор $\Delta\vec{r}$ совпадает с направлением вектора $\langle \vec{\upsilon} \rangle$

Мгновенная скорость в точке 1:

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$



Мгновенная скорость $\vec{\upsilon}$*-вектор скорости в данный момент времени равен первой производной от* $\vec{r}$ *по времени и направлен по касательной к траектории в данной точке в сторону движения точки А.*

Модуль вектора скорости $\upsilon \equiv \left|\vec{\upsilon}\right| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|.$

При $\Delta t \to 0$ т.е. на бесконечно малом участке траектории $\Delta S = \Delta r$ (перемещение совпадает с траекторией). В этом случае мгновенную скорость можно выразить через скалярную величину – ***путь:***

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}; \qquad \text{или} \qquad \upsilon = \frac{dS}{dt}.$$

Так вычислять скорость проще, т.к. S – скаляр

Обратное действие – интегрирование

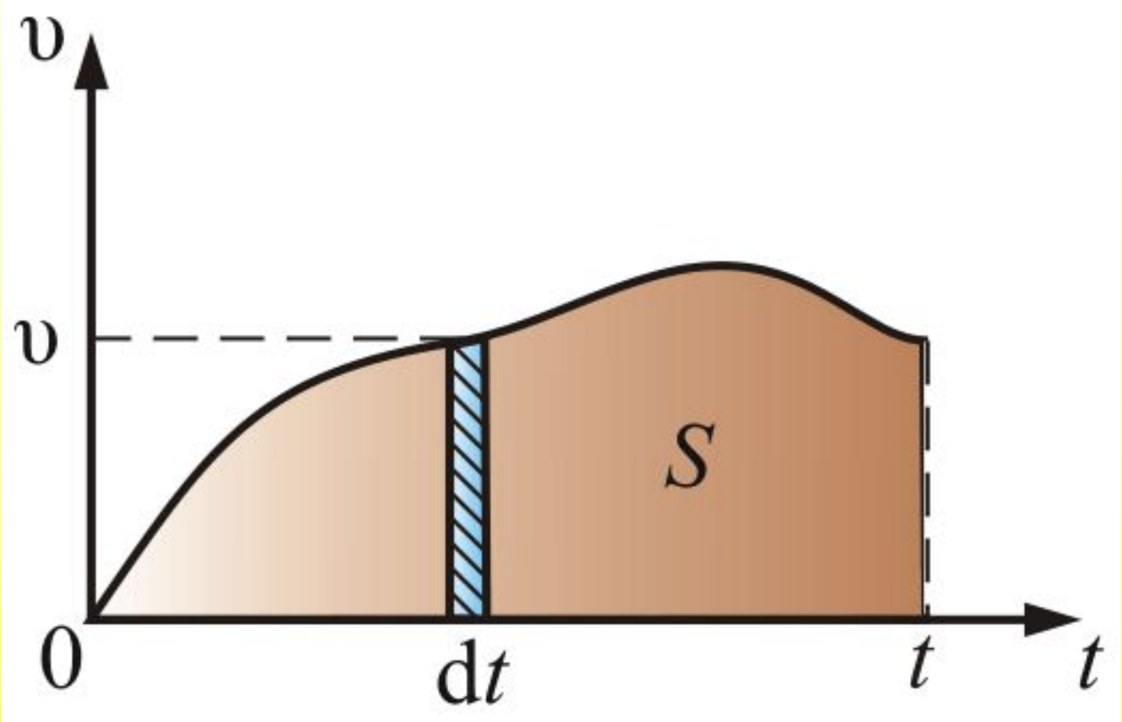
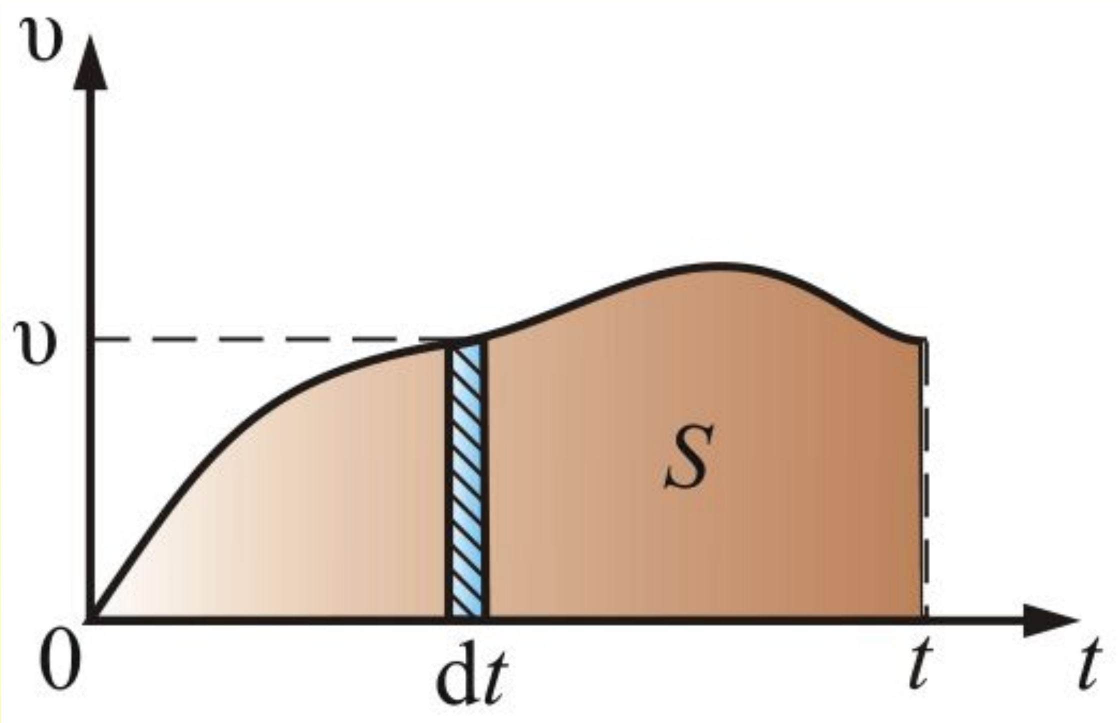


Рисунок 2.5

$dS = \upsilon dt$ – площадь бесконечно узкого прямоугольника. Чтобы вычислить весь путь *S* за время *t*, надо сложить площади всех прямоугольников.

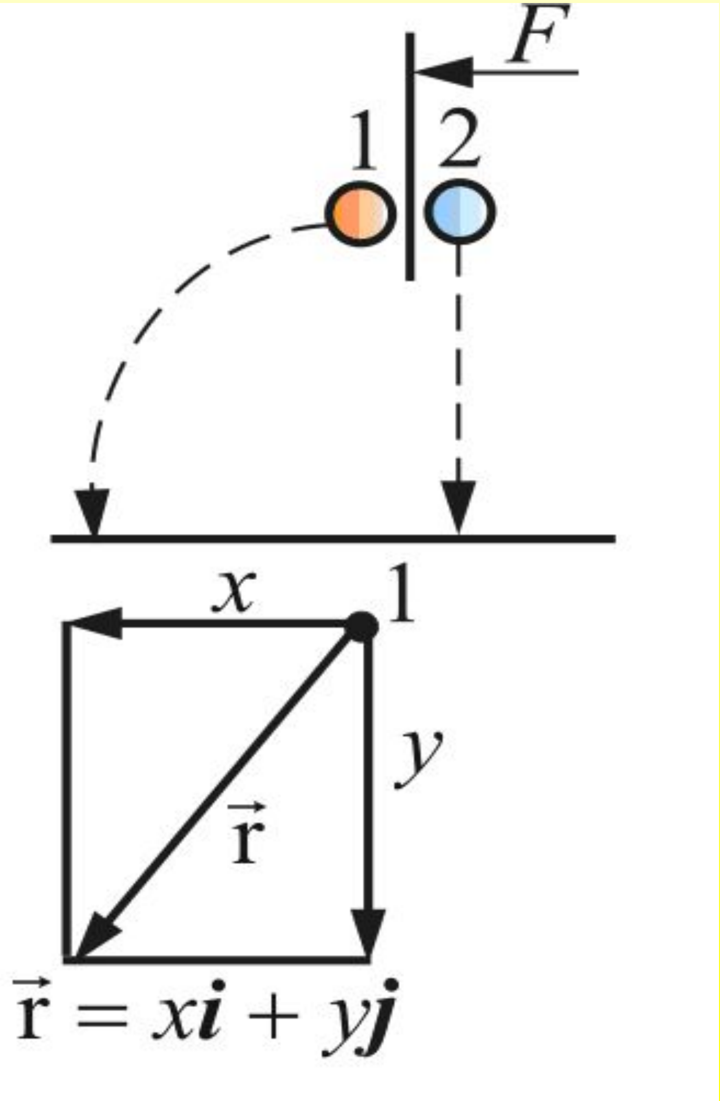


$$S = \int_0^t \upsilon \mathrm{d}t. \qquad (2.3.5)$$

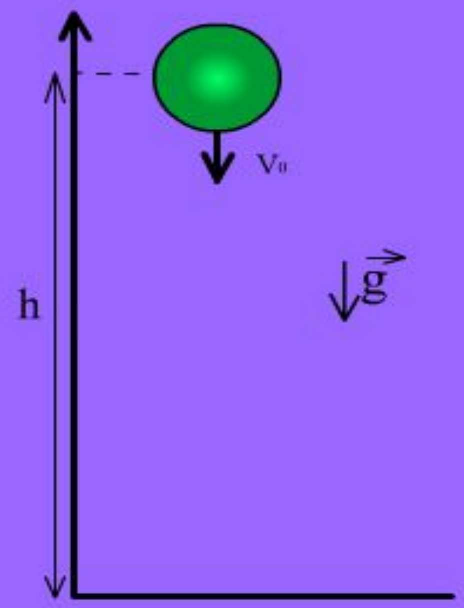
Геометрический смысл этого интеграла в том, что ***площадь под кривой*** $\upsilon(t)$ ***есть путь тела за время t.***

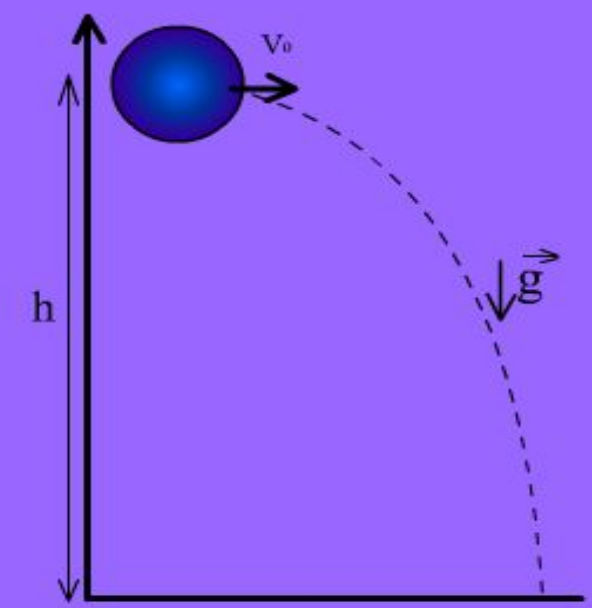
Принцип независимости движения. (*Принцип суперпозиции*)

Рассмотрим простой опыт



Этот опыт доказывает *принцип независимости движения* (*действия сил*).





$$y = h_{0y} + \upsilon_{0y} t + \frac{g_y t^2}{2}$$

$$y = h_{0y} + \upsilon_0 t \sin\alpha + \frac{g_y t^2}{2}$$

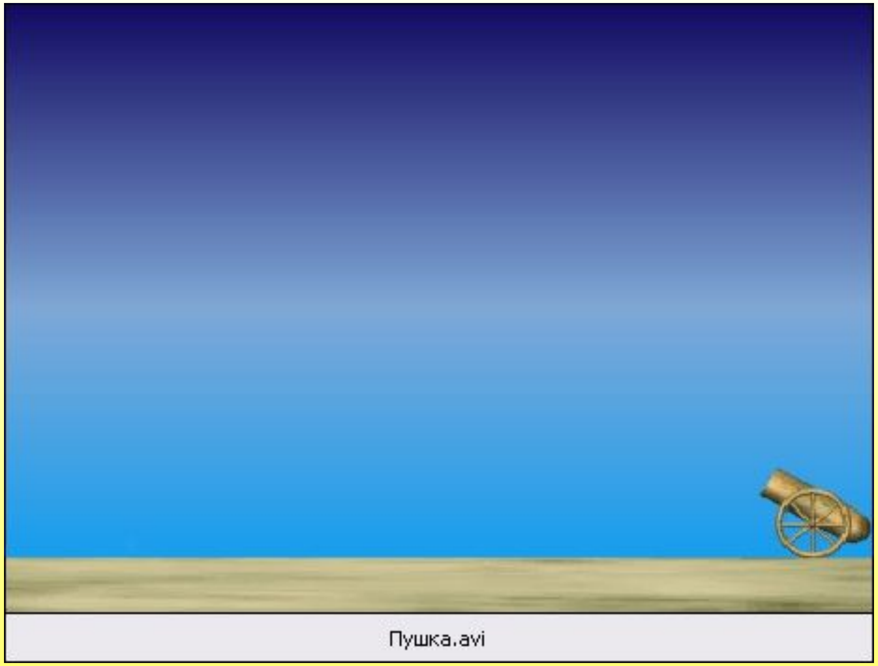
$h_{0y} = 0;\ \upsilon_{0y} = 0;\ g_y = g;\ y = h$

$h_{0y} = 0;\ y = h;\ g_y = g;\ \alpha = 0 \Rightarrow \sin\alpha = 0$

Назад

$h = \frac{gt^2}{2}$ $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ **время падения в обоих случаях зависит лишь от высоты**

Движение тел в поле тяжести Земли



Если пушка расположена в точке с координатами (0, 0, 0), то снаряд будет двигаться по траектории, которая описывается следующими уравнения-ми:

$$X = (v\cos\phi)t$$

$$Y = (v\sin\phi)t - gt^2/2,$$

где v - скорость снаряда вдоль ствола пушки, ϕ - угол между стволом пушки и горизонтом (ось X), t - время, g - ускорение свободного падения в поле тяжести Земли.

Подставляя t из первого уравнения во второе, находим уравнение траектории движения снаряда:

$$Y = X\,\mathrm{tg}\phi - (g/2v^2)(1 + \mathrm{tg}^2\phi)\,X^2$$

Из этого уравнения находим максимальную дальность стрель-бы X_{max} (при этом Y=0) и макси-мальную высоту полёта Y_{max} (первая производная Y по координате X равна нулю):

$$X_{max} = v^2\sin(2\phi)/g$$

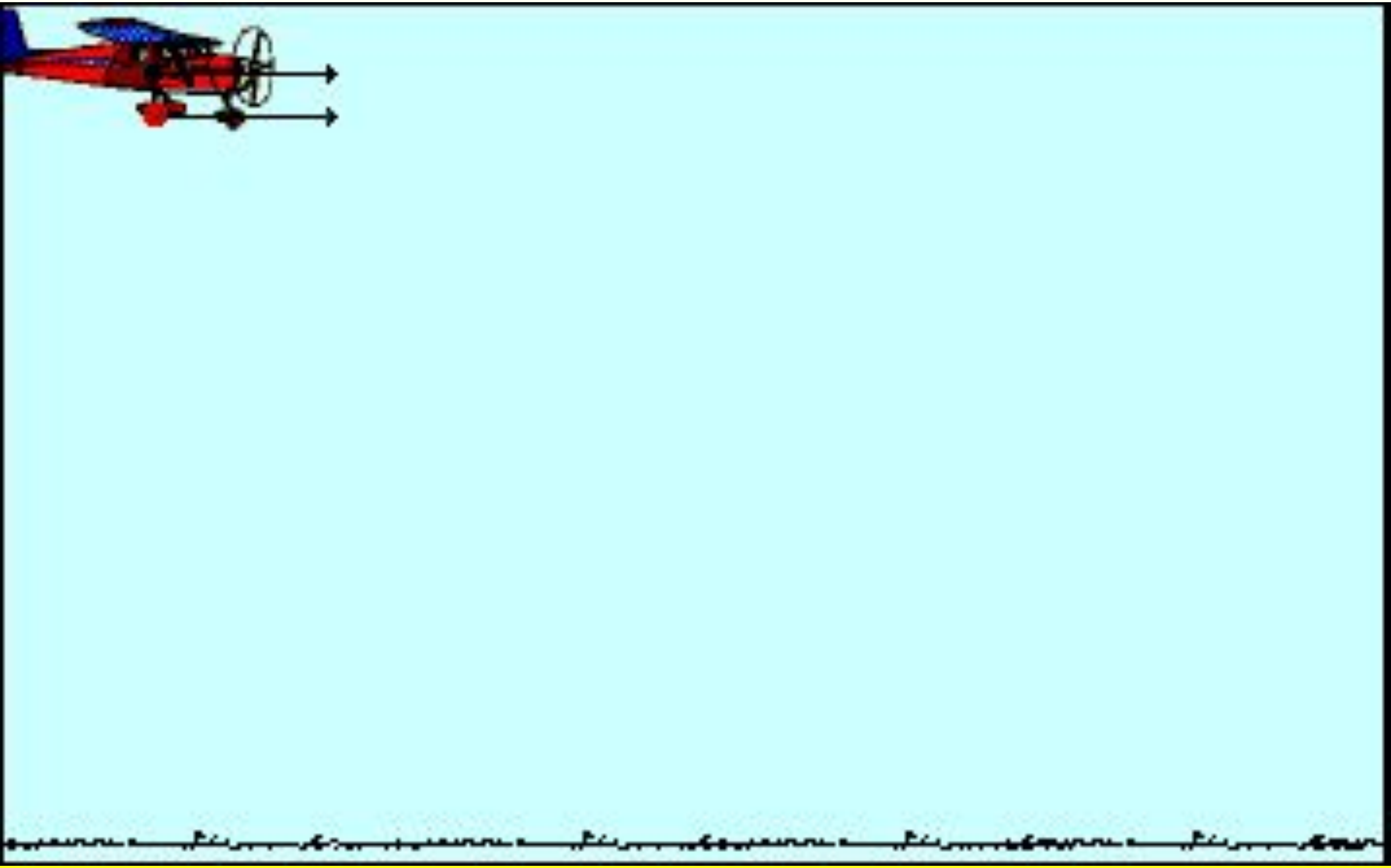
$$Y_{max} = v^2\sin^2\phi/2g$$

Из первого уравнения видно, что максимальная дальность полёта снаряда достигается при стрельбе под углом ϕ, равном 45°.

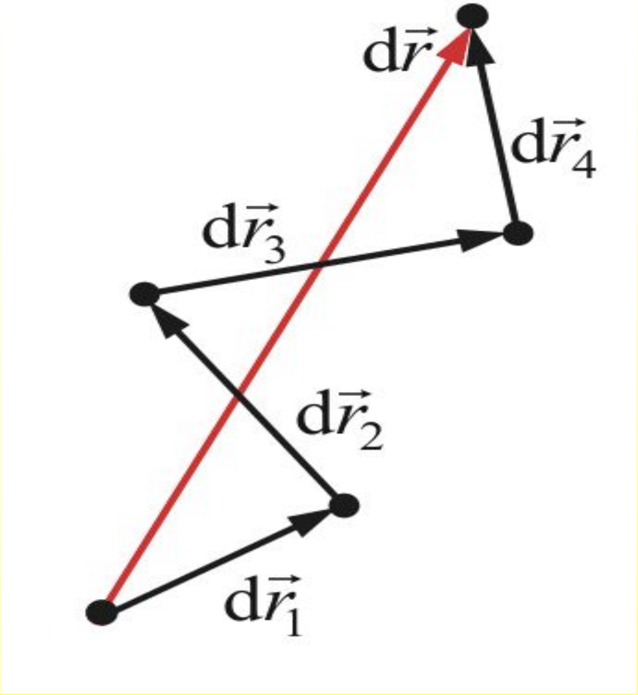

30°


45°


60°



Принцип независимости движения (действия сил)



- Если материальная точка участвует в нескольких движениях, то ее *результирующее перемещение* $d\vec{r}$ *равно векторной сумме перемещений*, обусловленных каждым из этих движений в отдельности:

$$\boxed{d\vec{r} = d\vec{r}_1 + d\vec{r}_2 + \ldots + d\vec{r}_i + d\vec{r}_n = \sum_{i=1}^{n} d\vec{r}_i,}$$

Так как $$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Тогда $$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2 + \ldots + \vec{\upsilon}_i + \vec{\upsilon}_n$$

$$\vec{\upsilon} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\upsilon}_{\mathrm{i}}.$$

Таким образом, *скорость тоже подчиняется принципу независимости движения.*

В дальнейшем мы подробнее рассмотрим принцип независимости действия сил.

В физике существует общий принцип, который называется ***принцип суперпозиций (принцип наложения)*** – *допущение, согласно которому* ***результирующий эффект сложного процесса взаимодействия представляет собой сумму эффектов, вызываемых каждым воздействием в отдельности,*** *при условии, что последние взаимно не влияют друг на друга.*

Принцип суперпозиции играет большую роль во многих разделах физики и техники.

2.3.3. Проекция вектора скорости на оси координат

В векторной форме уравнения записываются легко и кратко. Но для практических вычислений нужно знать проекции вектора на оси координат выбранной системы отсчета.

Положение точки *A* (рисунок 2.8) задается радиус-вектором $\vec{r}$. Спроецируем вектор $\vec{r}$ на оси – *x*, *y*, *z*.

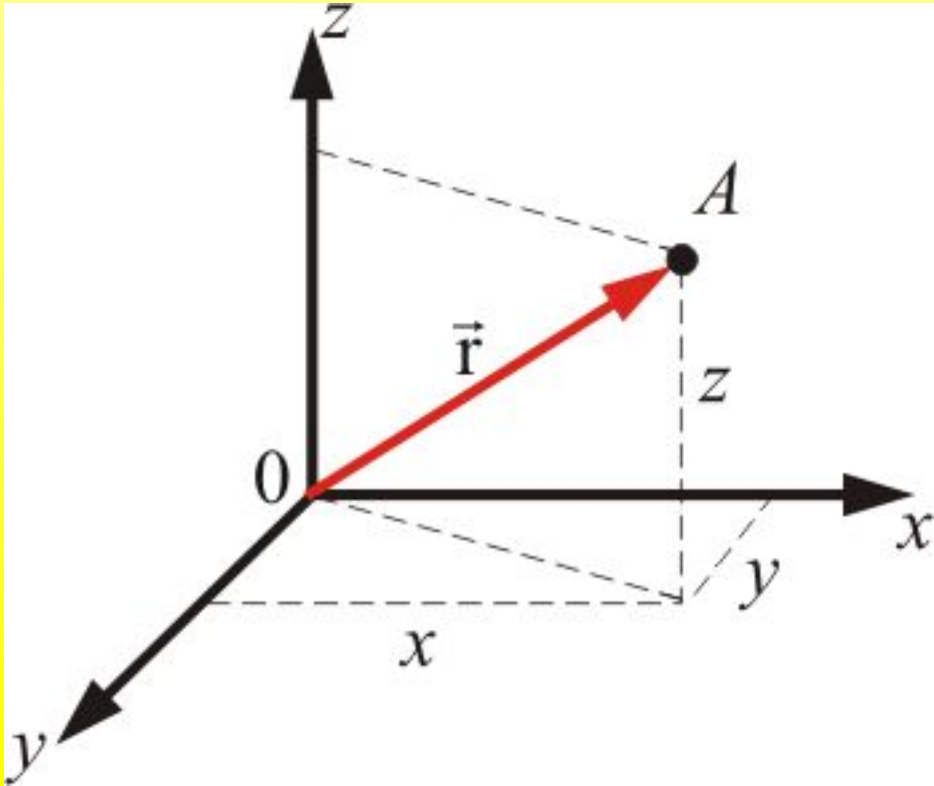


Рисунок 2.8

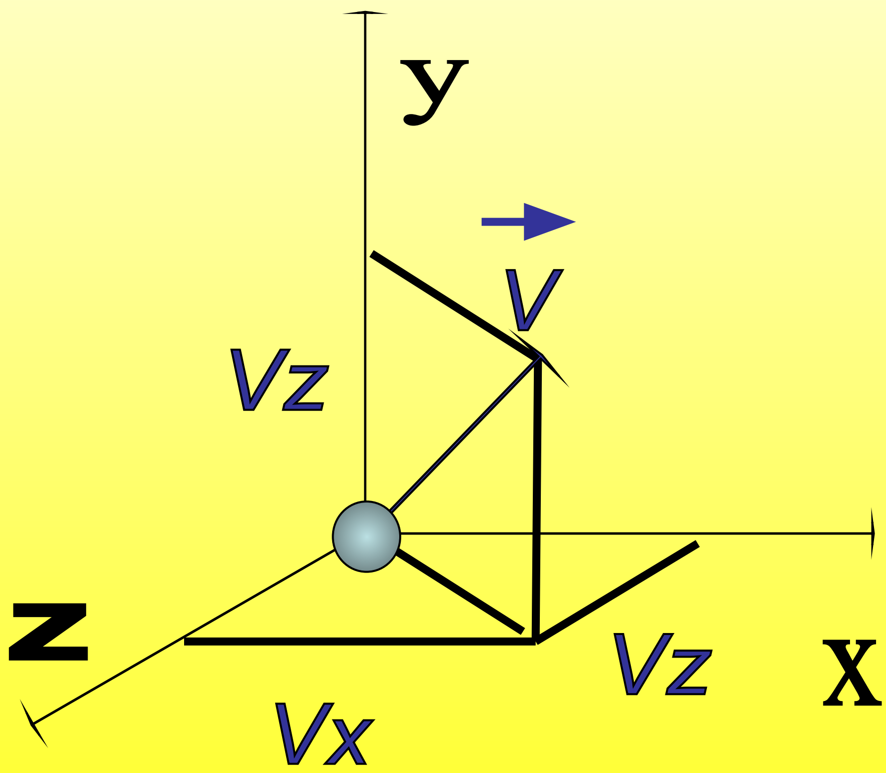
Понятно, что *x*, *y*, *z* зависят от времени *t*, т.е. *x*(*t*), *y*(*t*), *z*(*t*). Зная зависимость этих координат от времени (закон движения точки) можно найти в каждый момент времени скорость точки.

Проекция вектора скорости $\vec{\upsilon}$ на ось *x*

равна: $$\boxed{\upsilon_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$$

Здесь d*x* – проекция вектора перемещения $\mathrm{d}\vec{r}$ на ось *x.*

Аналогично: $$\boxed{\upsilon_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}; \;\; \upsilon_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}.}$$


y
V
Vz
z
Vz
X
Vx

Так как $\vec{\upsilon}$ вектор, то

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_x \boldsymbol{i} + \upsilon_y \boldsymbol{j} + \upsilon_z \boldsymbol{k} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}, \quad (2.3.6)$$

где ***i, j, k*** единичные векторы – орты.

Модуль вектора скорости:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon^2{}_x + \upsilon^2{}_y + \upsilon^2{}_z}$$

2.3.4. Ускорение. Нормальное и тангенциальное ускорения

В произвольном случае движения скорость не остается постоянной. *Быстрота изменения скорости по времени и направлению характеризуются* ***ускорением***:

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}} \qquad (2.3.7)$$

Ускорение величина векторная.

При криволинейном движении $\vec{\upsilon}$ изменяется и по времени и по направлению. В какую сторону? С какой скоростью? Из выражения (2.3.7) на эти вопросы не ответишь.

Введем *единичный вектор* $\vec{\tau}$ (рисунок 2.9), связанный с точкой 1 и направленный по касательной к траектории движения точки 1 (векторы $\vec{\upsilon}$ и $\vec{\tau}$ в точке 1 совпадают).

Тогда можно записать:

$$\boxed{\vec{\upsilon} = \upsilon\vec{\tau},}$$

Где $\upsilon = \left|\vec{\upsilon}\right|$ – модуль вектора скорости.

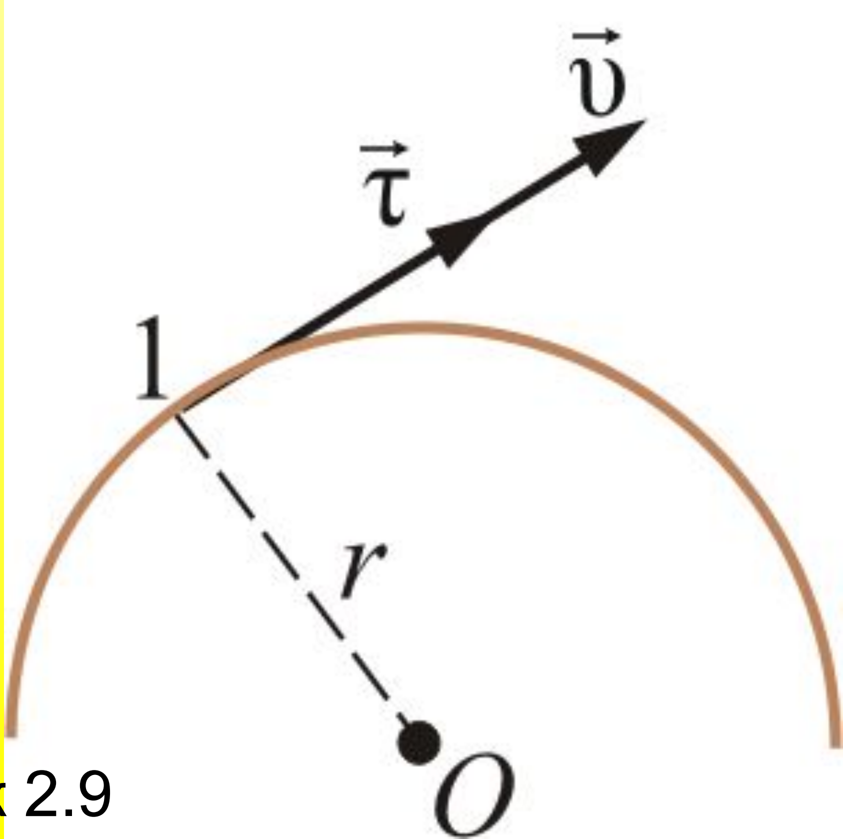


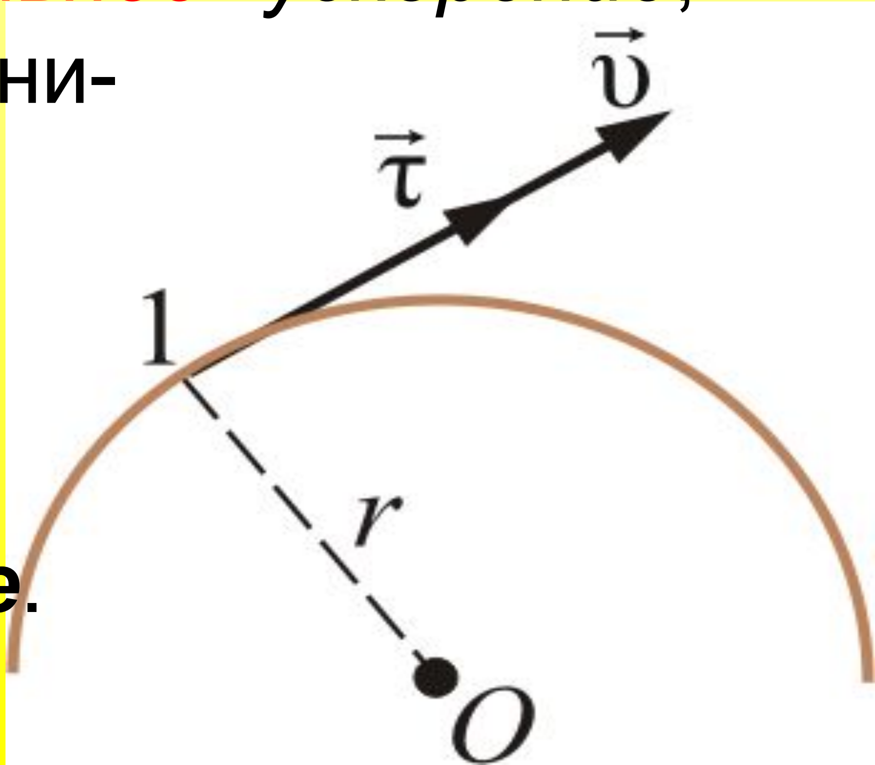
Рисунок 2.9

Найдем общее ускорение:

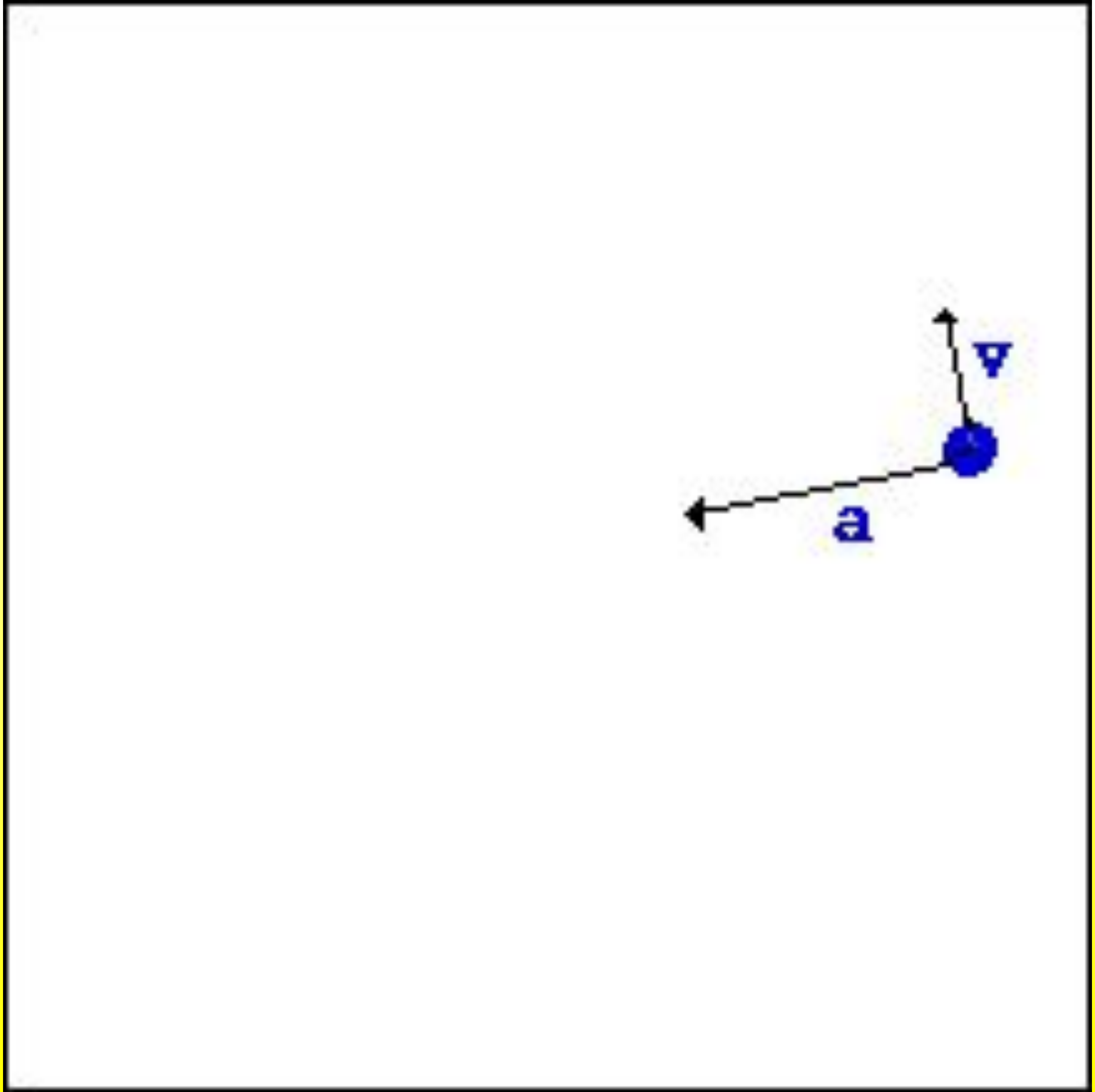
$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau} + \upsilon\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \vec{a}_{\tau} + \vec{a}_{n}.} \quad (2.3.8)$$

Получили два слагаемых ускорения:

$\vec{a}_{\tau}$ – тангенциальное ускорение, совпадающее с направлением $\vec{\upsilon}$ в данной точке.



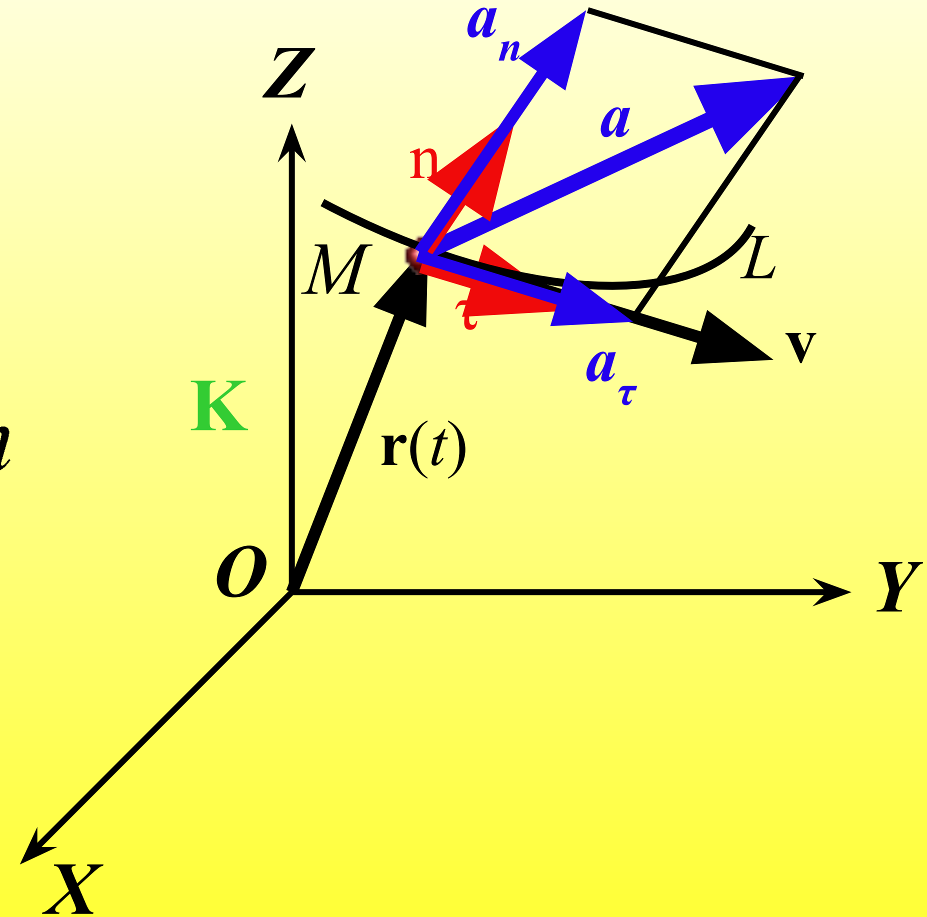
$\vec{a}_{n}$ – **нормальное** ***ускорение*** или ***центростремительное***.


v
a

При произвольном движении

точки имеем:

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$



$$\boxed{\vec{a}_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau}}$$ или по модулю $$\boxed{a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}}$$

$\vec{a}_\tau$ показывает изменение вектора скорости по величине:

- если $\frac{d\upsilon}{dt} > 0$ то $\vec{a}_\tau$ направлено в ту же сторону, что и вектор $\vec{\upsilon}$ т.е. ускоренное движение;

- если $\frac{d\upsilon}{dt} < 0$ то $\vec{a}_\tau$ направлено в противоположную сторону $\vec{\upsilon}$ т.е. замедленное движение;

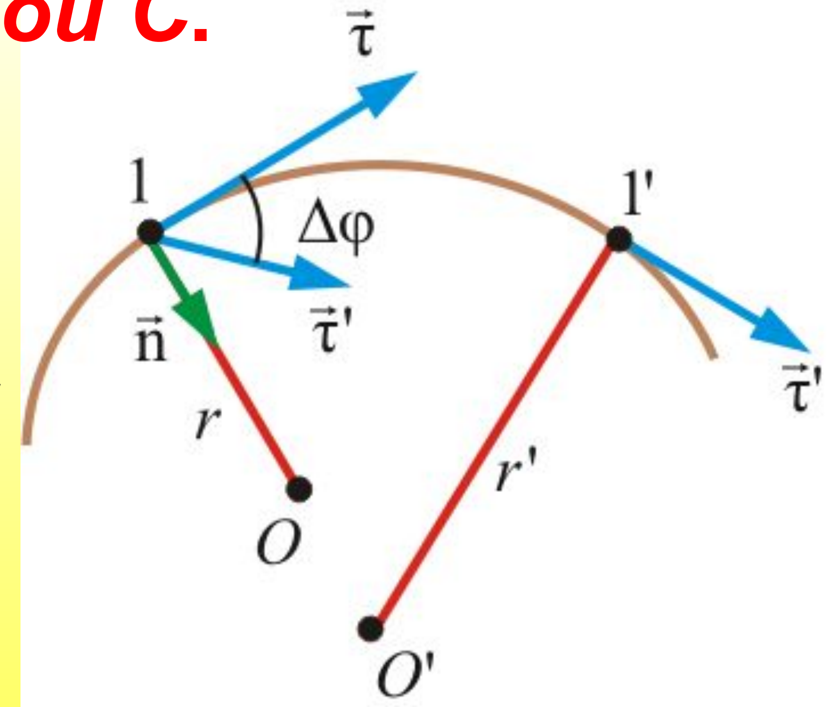
- при $\frac{d\upsilon}{dt} = 0$ то $\vec{a}_\tau = 0$, $\vec{\upsilon} = \mathrm{const}$ – движение с постоянной по модулю скоростью.

Рассмотрим подробнее второе слагаемое уравнения (2.3.8), т.е. *нормальное ускорение:*

$$\vec{a}_n = \upsilon \frac{d\vec{\tau}}{dt}.$$

Быстрота изменения направления касательной $(d\vec{\tau}/dt)$ к траектории определяется скоростью движения точки по окружности и степенью искривленности траекторий.

Степень искривленности плоской кривой характеризуется **кривизной С.**



Радиус кривизны r – *радиус такой окружности, которая сливается с кривой в данной точке на бесконечно малом ее участке* d*S*.

$$r = \frac{1}{C} = \lim_{\Delta\varphi \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta\varphi} = \frac{dS}{d\varphi}.$$

Ускорение при произвольном движении

При **произвольном** ***движении материальной точки*** **величина** ***r будет равна*** **радиусу некоторой моментальной** ***(т.е. соответствующей данному моменту времени)*** **окружности**

в любой точке траектории ***движение материальной точки*** *можно рассматривать как* **вращательное движение по окружности,** ***(с касательным a_τ и нормальным a_n ускорениями)***

Саму величину r называют **радиусом кривизны траектории** ***в данной точке***

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{n}$$

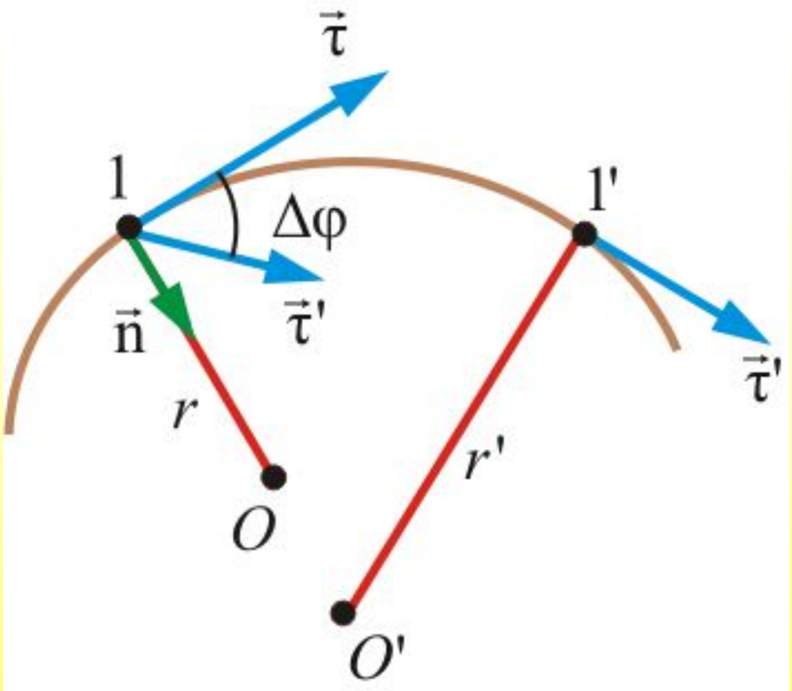


Рисунок 2.10

Скорость изменения направления касательной можно выразить как произведение скорости изменения угла на единичный вектор $\vec{n}$, показывающий направление изменения угла.

Т.о. $\vec{n}$ единичный вектор, направленный перпендикулярно касательной $(\vec{\tau})$ в данной точке, т. е. по радиусу кривизны к центру кривизны.

$$d\varphi = \frac{dS}{r} \qquad dS = \upsilon dt \qquad d\varphi = \frac{\upsilon dt}{r} \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\upsilon}{r}$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{\upsilon}{r}\vec{n} \qquad \upsilon\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{\upsilon^2}{r}\vec{n}$$

отсюда $\boxed{\vec{a}_n = \frac{\upsilon^2}{r}\vec{n},}$ – ***нормальное ускорение*** или ***центростремительное*** т.к. направлено оно к центру кривизны, перпендикулярно $\vec{\tau}$

Нормальное ускорение *показывает быстроту изменения направления вектора скорости*

Модуль нормального ускорения:

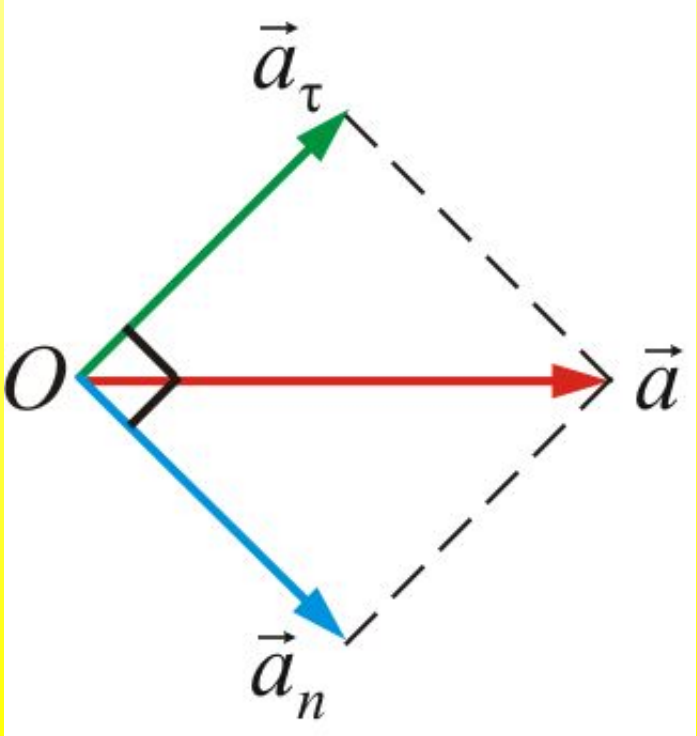
$$\left|\vec{a}_n\right| = a_n = \frac{\upsilon^2}{r}.$$

Центростремительным называют ускорение – когда движение происходит по окружности.

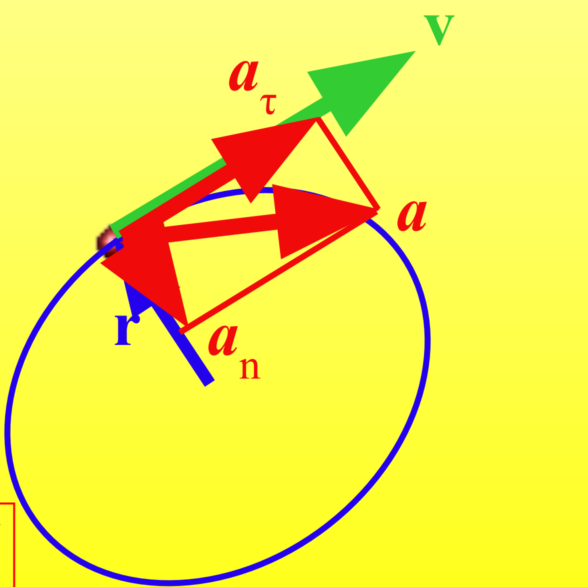
А когда движение происходит по произвольной кривой – говорят, *нормальное ускорение*, перпендикулярное к касательной в любой точке траектории.

Возвращаясь к выражению (2.3.8), можно записать что, **суммарный вектор ускорения** при движении точки вдоль плоской кривой равен:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau} + \frac{\upsilon^2}{r}\vec{n}.$$



$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$



Как видно из этого рисунка, модуль общего ускорения равен:

$$\boxed{a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}}$$

Рассмотрим несколько предельных (частных) случаев:

$a_\tau = 0;\ a_n = 0$ – равномерное прямолинейное движение;

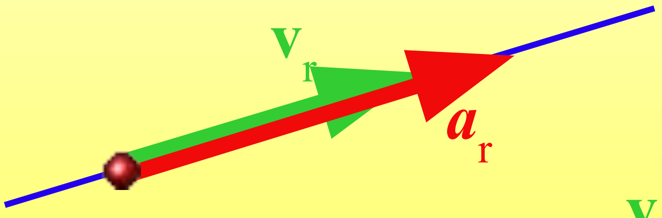
$a_\tau = \text{const};\ a_n = 0$ – равноускоренное прямолинейное движение;

$a_\tau = 0;\ a_n = \text{const}$ – равномерное движение по окружности.

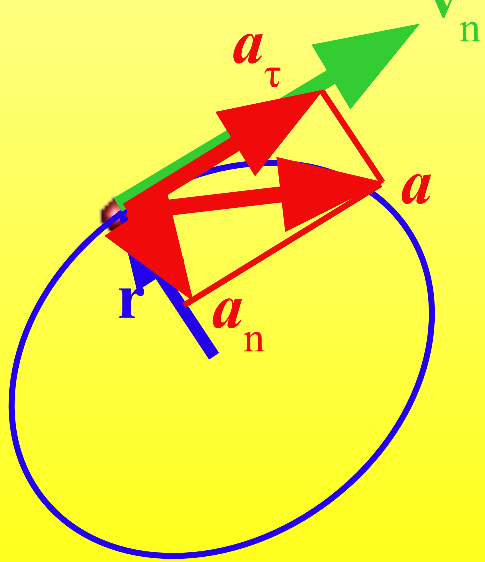
Типы ускорений

Чтобы более **наглядно** ***представить свойства введенных*** **составляющих полного ускорения,** ***рассмотрим примеры движений частицы, при которых эти составляющие возникают***

Частица движется **прямолинейно**



Частица движется **по дуге окружности**



Вспомним несколько полезных формул:

При равномерном движении $S = \int_0^t \upsilon \mathrm{d}t = \upsilon t$

При движении с постоянным ускорением

$$S = \upsilon_0 t \pm \frac{at^2}{2}.$$

$$\upsilon = \upsilon_0 \pm at$$

Обратная задача кинематики заключается в том, что по известному значению ускорения *a*(*t*) найти скорость точки и восстановить траекторию движения *r*(*t*).

По определению $$a(t) = \frac{\mathrm{d}\upsilon(t)}{\mathrm{d}t},$$

отсюда $$\boxed{\upsilon(t) = \upsilon(t_0) + \int_{t_1}^{t_2} a(t)\mathrm{d}t}$$

или, так как $\upsilon(t) = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$,

Следовательно $$\boxed{r(t) = r(t_0) + \int_{t_1}^{t_2} \upsilon(t)\mathrm{d}t.}$$

2.4. Кинематика твердого тела

Различают пять видов движения твердого тела:

- поступательное;

- вращательное вокруг неподвижной оси;

- плоское;

- вокруг неподвижной точки;

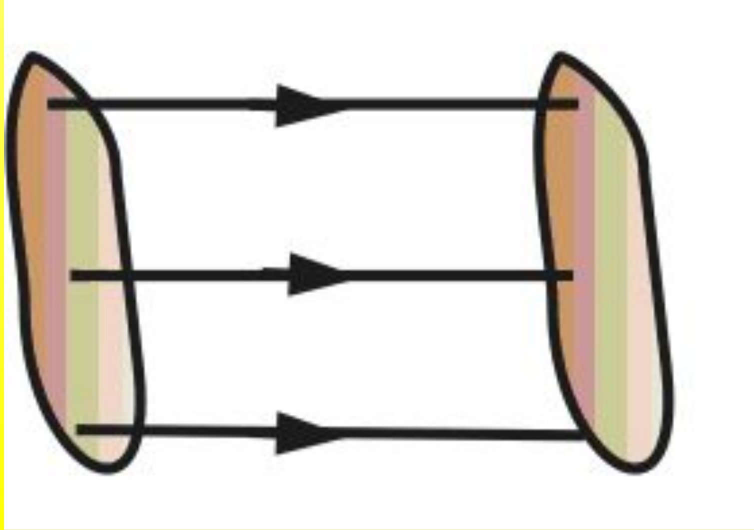
- свободное.

Поступательное **движение *и* *вращательное* движение вокруг оси – основные виды движения твердого тела.**

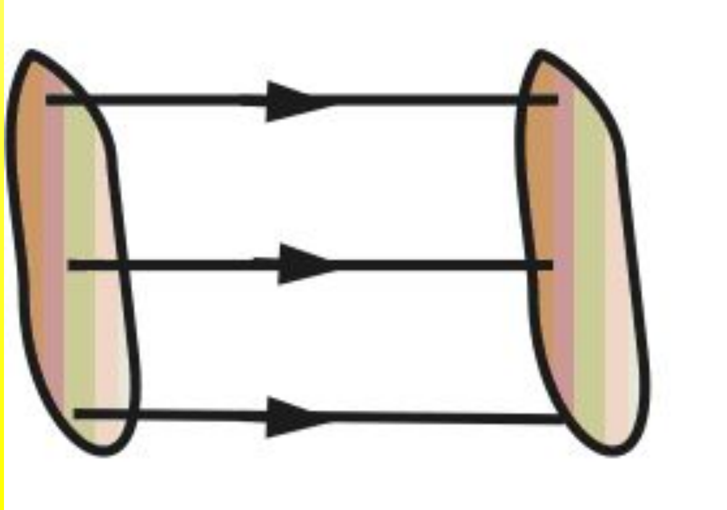
Остальные виды движения твердого тела можно свести к одному их этих основных видов или к их совокупности.

2.4.1. Поступательное движение твердого тела

Поступательное движение *– это такое движение твердого тела, при котором любая прямая, связанная с телом, остается параллельной своему начальному положению и при этом, все точки твердого тела совершают* ***равные перемещения.***



Скорости и ускорения *всех точек* твердого тела в данный момент времени *t* одинаковы. Это позволяет свести изучение поступательного движения твердого тела к изучению движения отдельной точки, т.е. к задаче кинематики материальной точки, подробно рассмотренной в п. 2.3.



При ***вращательном движении*** все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой OO', называемой *осью вращения* (рисунок 2.3).

Из определения вращательного движения ясно, что понятие вращательного движения для материальной точки неприемлемо.

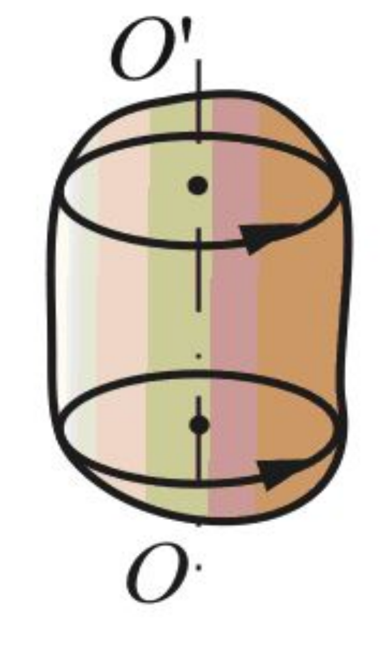


Рисунок 2.3

2.4.2. Вращательное движение вокруг неподвижной оси

Движение твердого тела, при котором две его точки О и О' остаются неподвижными, называется ***вращательным движением вокруг неподвижной оси****, а неподвижную прямую ОО' называют* ***осью вращения****.*

Пусть абсолютно твердое тело вращается вокруг неподвижной оси *ОО'*

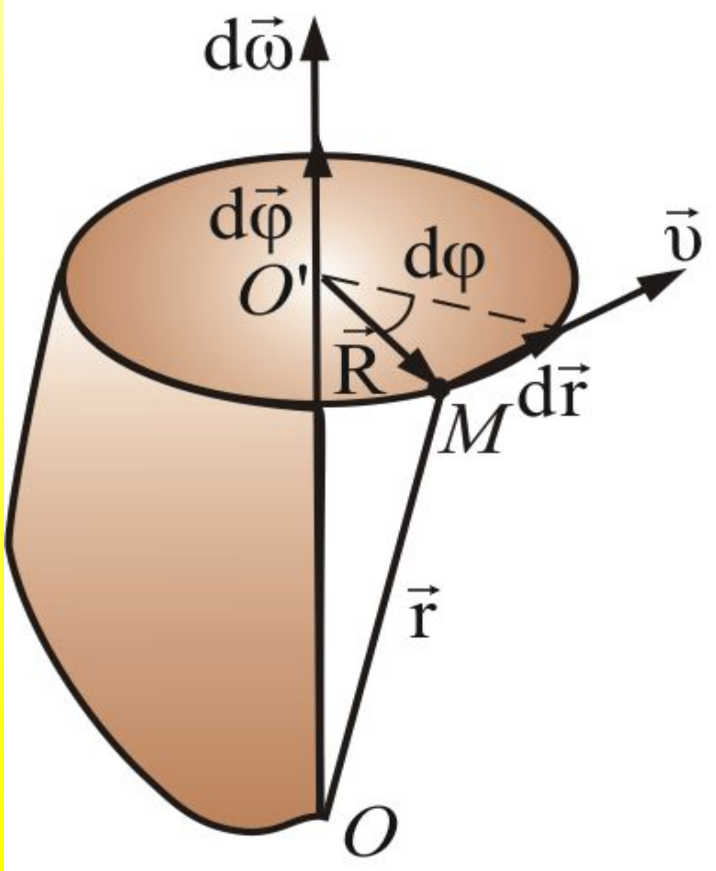


Рисунок 2.12

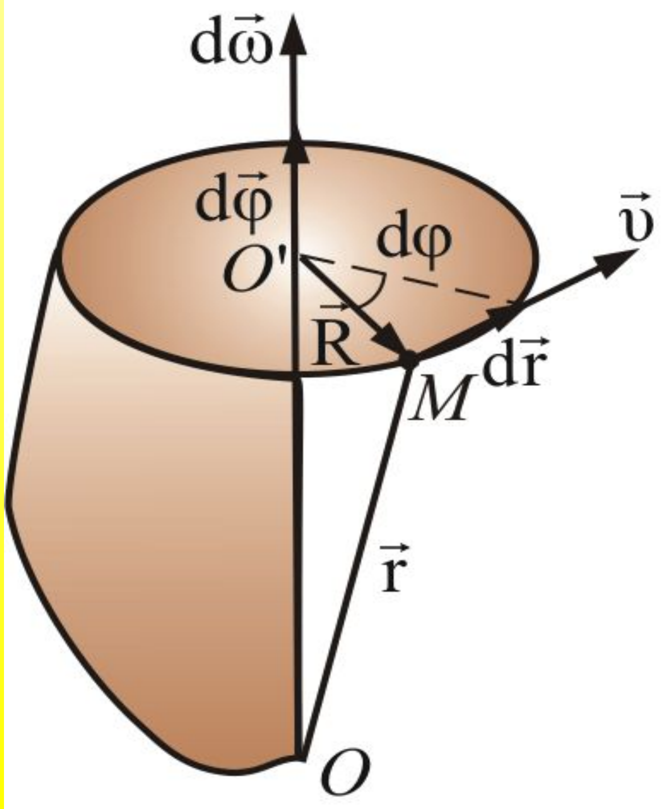
Проследим за некоторой точкой *M* этого твердого тела. За время $\mathrm{d}t$ точка *M* совершает элементарное перемещение

При том же самом угле поворота $\mathrm{d}\varphi$ другая точка, отстоящая от оси на большее или меньшее расстояния, совершает другое перемещение. Следовательно, ни само перемещение некоторой точки твердого тела, $\mathrm{d}r$

ни первая производная $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$

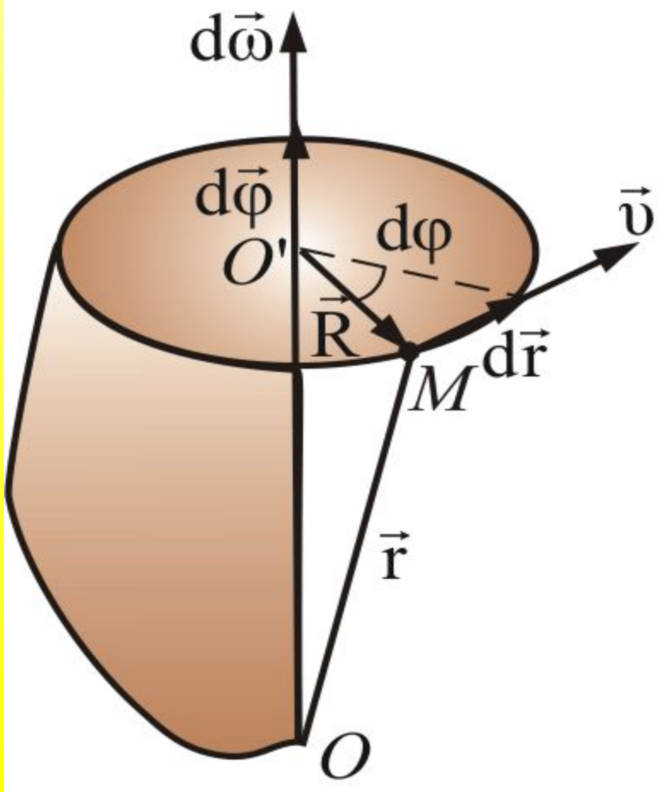
ни вторая производная $\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}$

не могут служить характеристикой движения всего твердого тела.



Угол поворота $d\varphi$ характеризует *переме-щения всего тела за время* d*t* (**угловой путь**)

Удобно ввести $d\vec{\varphi}$ – вектор элементарного поворота тела, численно равный $d\varphi$ и направленный вдоль оси вращения *ОО′* так, чтобы глядя вдоль вектора $d\vec{\varphi}$ мы видели вращение по часовой стрелке (направление вектора $d\vec{\varphi}$ и направление вращения связаны правилом буравчика).



Элементарные повороты удовлетворяют обычному правилу сложения векторов:

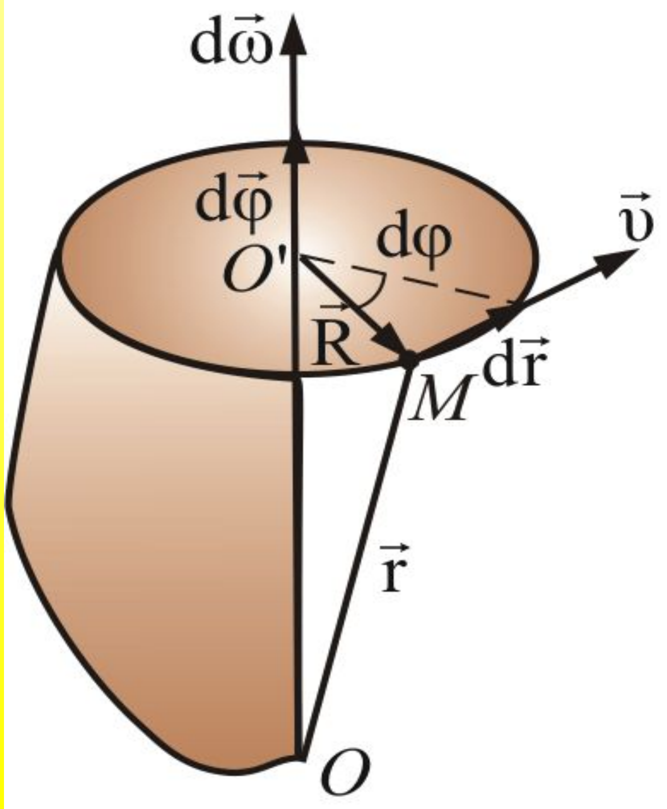
$$d\vec{\varphi} = d\vec{\varphi}_1 + d\vec{\varphi}_2 .$$

Угловой скоростью $\vec{\omega}$ *называется* ***вектор численно равный первой производной от угла поворота по времени*** *и направленный вдоль оси вращения в направлении* $d\vec{\varphi}$ ($\vec{\omega}$ и $d\vec{\varphi}$ всегда направлены в одну сторону).

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \qquad \omega = \frac{d\varphi}{dt}. \qquad (2.4.1)$$

Связь линейной и угловой скорости

Пусть $\vec{\upsilon}$ – линейная скорость точки *M*. За промежуток времени d*t* точка *M* проходит путь $\mathrm{d}r = \upsilon \mathrm{d}t.$ В то же время $\mathrm{d}r = R\mathrm{d}\varphi$ (центральный угол). Тогда,



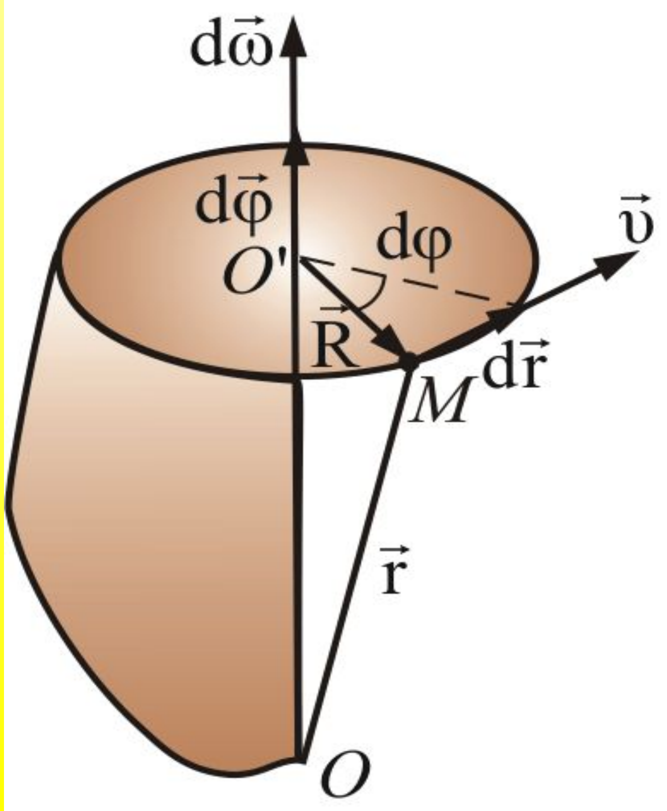
$$\boxed{\upsilon = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{R\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \omega R}$$

(2.4.2)

$$\boxed{\upsilon = \omega R}$$

В векторной форме $\vec{\upsilon} = [\vec{\omega}, \vec{R}]$

Вектор $\vec{\upsilon}$ ортогонален к векторам $\vec{\omega}$ и $\vec{R}$ и направлен в ту же сторону, что и векторное произведение $[\vec{\omega}, \vec{R}]$



Период Т – *промежуток времени, в течение которого тело совершает полный оборот* (т.е. поворот на угол $\varphi = 2\pi$)

$$T = \frac{2\pi}{\omega};$$

Частота ν – *число оборотов тела за* 1 *сек.*

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

Угловая скорость $$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu;$$

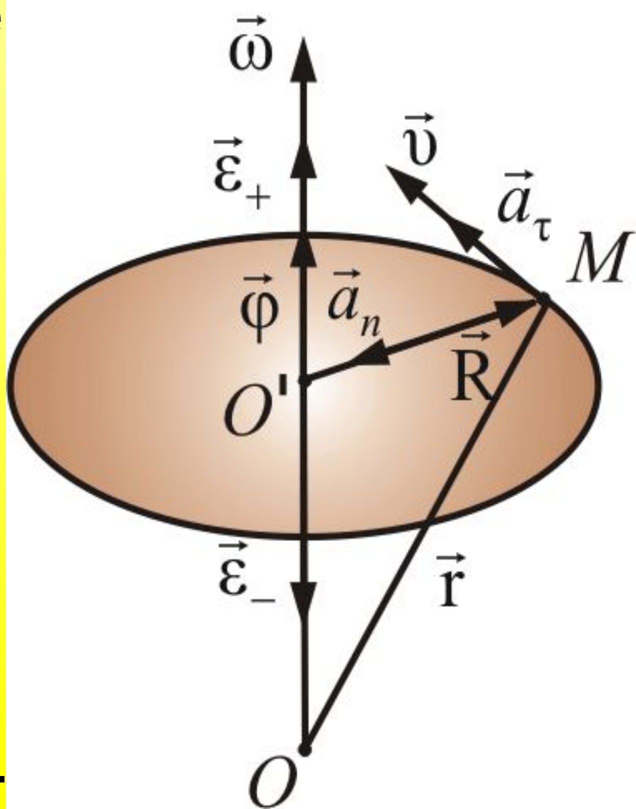
Введем вектор ***углового ускорения*** $\vec{\varepsilon}$ для характеристики *неравномерного вращения тела*:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad (2.4.3)$$

Вектор $\vec{\varepsilon}_+$ направлен в ту же сторону, что и $\vec{\omega}$ при ускоренном вращении $\left(\frac{d\omega}{dt} > 0\right)$

а $\vec{\varepsilon}_-$ направлен в противоположную сторону при замедленном вращении $\left(\frac{d\omega}{dt} < 0\right)$

(рисунок 2.13).



Выразим нормальное и тангенциальное ускорения точки M через угловую скорость и угловое ускорение:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega R) = R\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon;$$

$$\boxed{a_\tau = R\varepsilon;}$$

$$\boxed{a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R.}$$

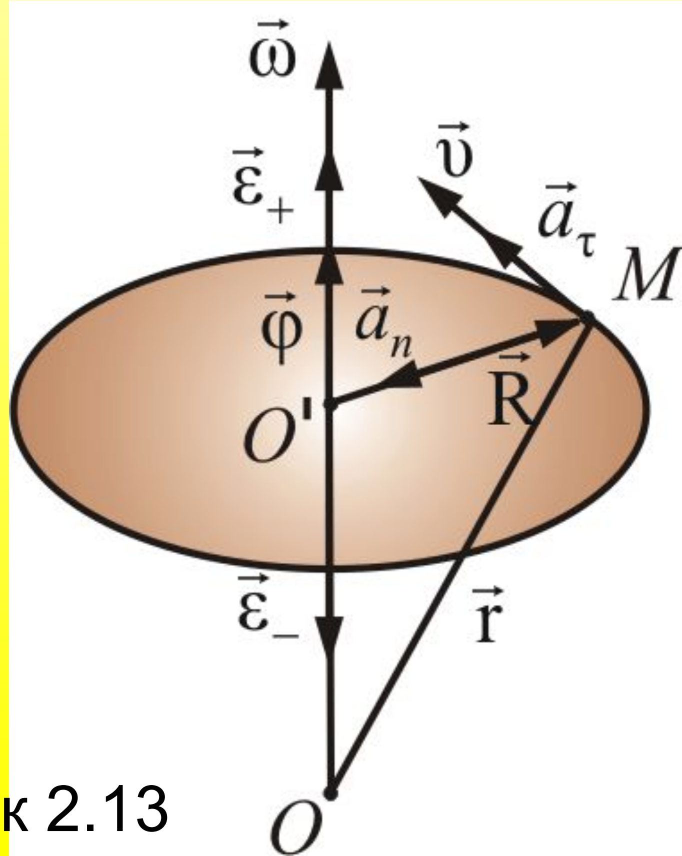


Рисунок 2.13

Формулы простейших случаев вращения тела вокруг неподвижной оси:

- равномерное вращение $\varepsilon = 0;$ $\omega = \text{const};$

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 \pm \omega t;}$$

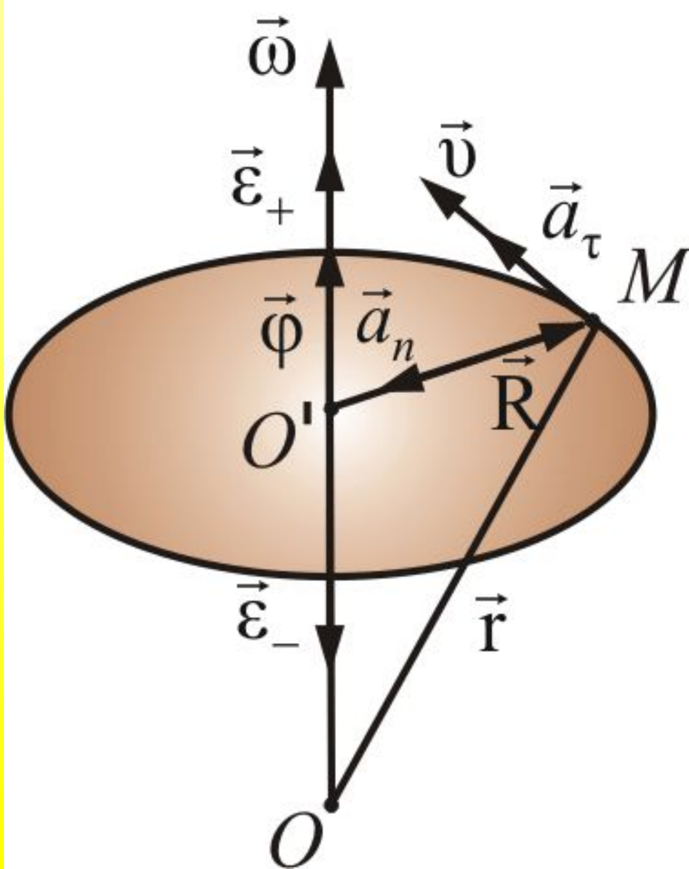
- равнопеременное вращение $\varepsilon = \text{const};$

$$\boxed{\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t}$$

$$\boxed{\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}}$$

Обратите внимание.

Все кинематические параметры, *характеризующие вращательное движение (угловое ускорение, угловая скорость и угол поворота)* ***направлены вдоль оси вращения.***



Поступательное движение

$$\upsilon = \frac{dS}{dt}$$

$$a = \frac{d\upsilon}{dt}$$

$$\upsilon = \upsilon_0 \pm at$$

$$S = \upsilon_0 t \pm \frac{at^2}{2}$$

$$S = \int_0^t \upsilon dt$$

Вращательное движение

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$$

$$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

$$\varphi = \int_0^t \omega dt$$