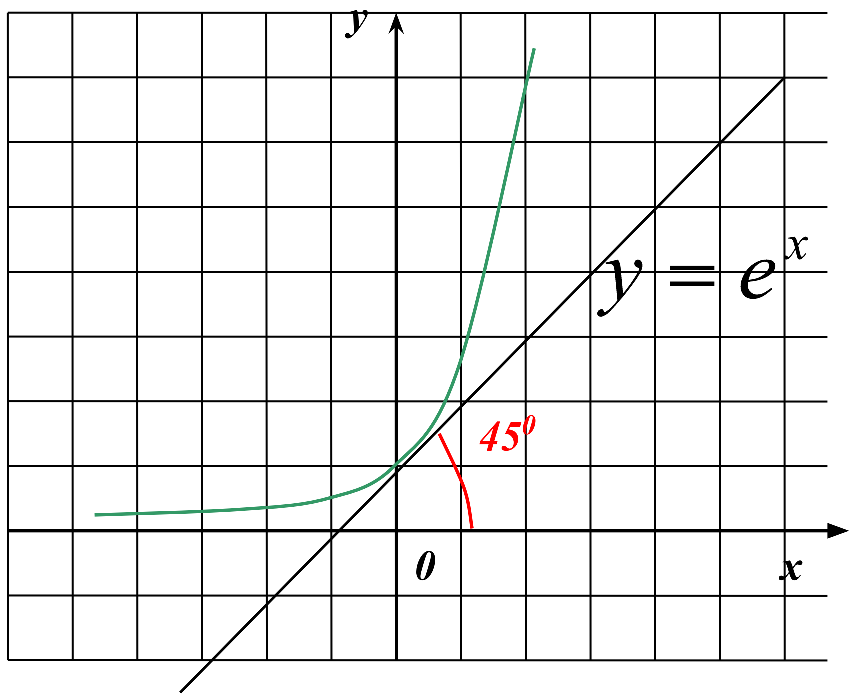
Производная показательной и логарифмической функции

11 класс

Функция $y = e^x$



Число е — иррациональное, т. е. представляет собой бесконечную десятичную непериодическую дробь: е=2,7182818284590...; на практике обычно полагают, что е≈2,7.

Это экспонента, отличающаяся от других экспонент (графиков показательных функций с другими основаниями) тем, что угол между касательной к графику в точке x=0 и осью абсцисс равен 45°.

Свойства функции $y = e^x$

1. $D(f) = (-\infty; +\infty)$
2. $E(f) = (0; +\infty)$
3. Не является ни четной, ни нечетной.
4. Возрастает.
5. Не ограничена сверху, ограничена снизу.
6. Не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значения
7. Дифференцируема

Формула для отыскания производной $(e^x)' = e^x$

Натуральный логарифм. Функция $y = \ln x$

Если основанием логарифма служит число e, то говорят, что задан натуральный логарифм $\ln x$

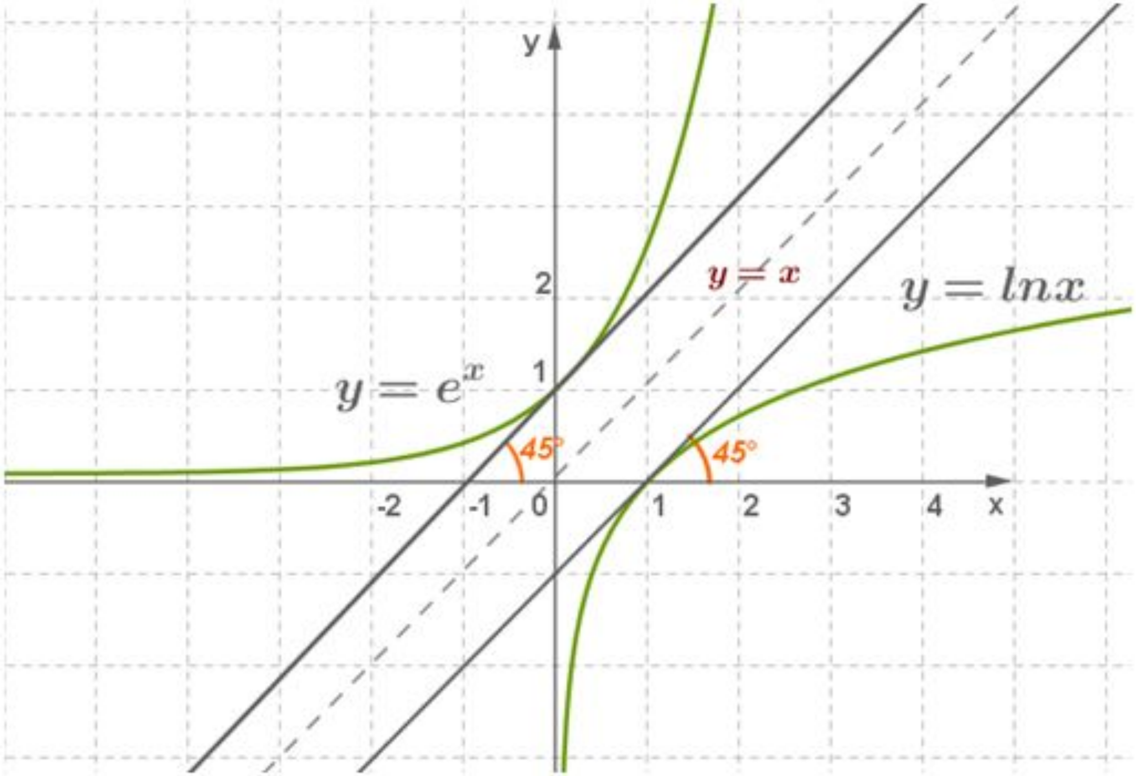


График функции $y = ln\ x$ симметричен графику $y = e^x$

относительно прямой $y = x$

Свойства функции $y = \ln x$

1. $D(f) = (0;+\infty)$
2. $E(f) = (0;+\infty)$
3. Не является ни четной, ни нечетной.
4. Возрастает на $(0;+\infty)$
5. Не ограничена ни сверху, ни снизу.
6. Не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значения
7. Дифференцируема

Свойства натурального логарифма

$$\ln 1 = 0$$

$$\ln e = 1$$

$$e^{\ln a} = a$$

для любого значения *x > 0* справедлива
формула дифференцирования

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Пример1:

$$y = -5\ln x + \cos x$$

$$y' = -5 \cdot \frac{1}{x} - \sin x = -\frac{5}{x} - \sin x$$

Пример2:

$$y = \ln(7 - 3x)$$

$$y' = \frac{1}{7 - 3x} \cdot (7 - 3x)' = -\frac{3}{7 - 3x}$$

Докажем, что справедлива формула дифференцирования

$$\left(a^{x}\right)' = a^{x} \cdot \ln a$$

Пусть дана функция $y = a^{x}$

Используя основное логарифмическое тождество, представим $a = e^{\ln a}$

Получим равенство $y = \left(e^{\ln a}\right)^{x}$

Найдем производную этой функции

$$\left(\left(e^{\ln a}\right)^{x}\right)' = \left(e^{x \ln a}\right)' = e^{x \ln a} \cdot \left(x \ln a\right)' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^{x} \cdot \ln a$$

Пусть теперь дана логарифмическая функция $y = \log_a x$

Найдем формулу дифференцирования этой функции

Используя основную формулу перехода логарифма к новому основанию, получаем

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$y' = (\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}}$$

Пример

$$y = 5^x - \log_3 (2x+7)$$

$$y' = (5^x - \log_3 (2x+7))' = 5^x \cdot \ln 5 - \frac{1}{(2x+7)\ln 3} \cdot (2x+7)' = 5^x \cdot \ln 5 - \frac{2}{\ln 3 (2x+7)}$$

Домашнее задание для 11 А

№ 19.23 - №19.28 а)б)

Домашнее задание для 11 Б

№1633 - №1636 а)б)

№1649 - №1650 а)б)