Дискретная математика

Графы.

Основные определения, способы задания

Определение графа

- Пусть ***V*** – множество вершин,

а ***E*** – множество ребер.

- Графом ***G*** называется пара объектов ***(V, E)*** между которыми задано отношение инцидентности:

$$\boldsymbol{\Gamma : e \rightarrow (v, w)},$$

где вершина v и ребро e ***инцидентны*** друг другу, если вершина является для этого ребра концевой точкой.

Определение графа

- Вершины ***v'*** и ***v"*** называются ***смежными***, если существует ребро, соединяющее их, т.е. они инцидентны одному и тому же ребру.

- Ребра ***e'*** и ***e"*** называются ***смежными***, если они имеют, по крайней мере, одну общую вершину (инцидентны одной вершине).

Определение графа

- Граф, содержащий направленные ребра (дуги) с началом ***v'*** и концом ***v"*** , называется ***ориентированным графом*** (*орграфом*). Для орграфа

$$(v', v'') \neq (v'', v')$$

- Граф, содержащий ненаправленные ребра с конами ***v'*** и ***v"*** , называется ***неориентированным графом*** (*нрграфом*). Для нрграфа

$$(v', v'') = (v'', v')$$

Определение графа

Рис.1 Неориентированное ребро ***(a,b)***

Рис.2 Ориентированное ребро ***(a,b)***

Определение графа

- Ребро, концевые вершины которого совпадают, называется ***петлей***.

Рис.3. Неориентированная петля

Рис.4. Ориентированная петля

Определение графа

- Ребра (дуги), имеющие одинаковые начало и конец, называются параллельными или ***кратными***.

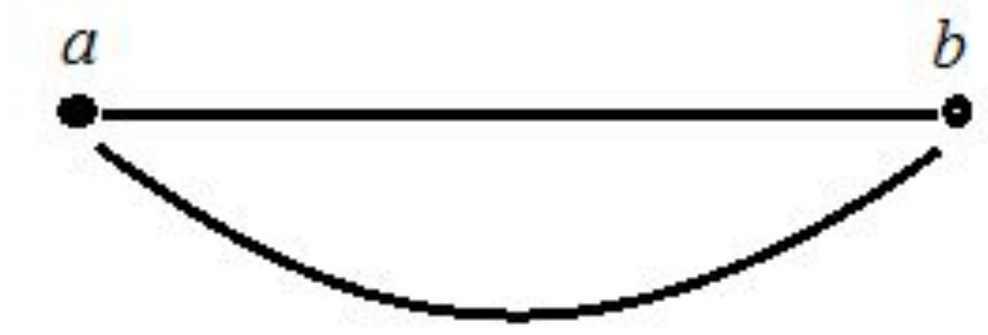


Рис.5 Кратные неориентированные ребра

Определение графа

Рис. 6. Кратные ориентированные ребра

Определение графа

- Ребра орграфа, соединяющие одну и туже пару вершин в разных направлениях называются ***симметричными*** или противоположнонаправленными.

Рис. 7. Симметричные ребра

Определение графа

- Граф называется ***конечным***, если множество его элементов (вершин и ребер) конечно.

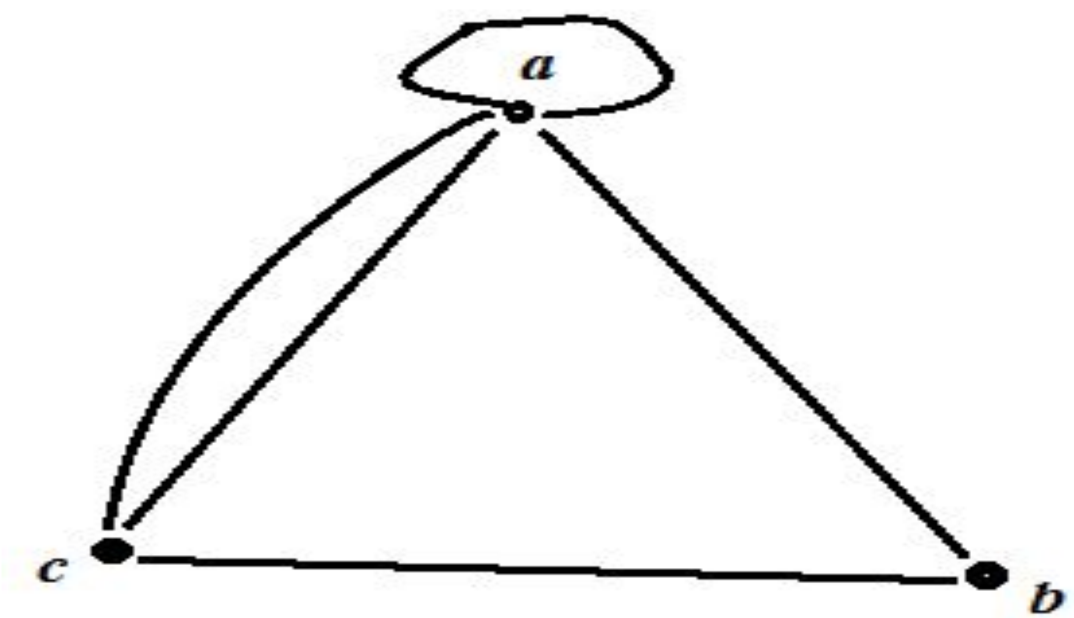


Рис. 8. Конечный граф

Определение графа

- Граф называется ***бесконечным,*** если бесконечно множество вершин или множество его ребер.

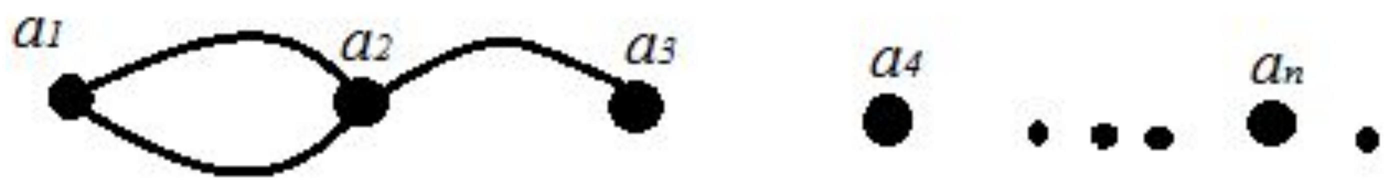


Рис. 9. Граф с бесконечным числом вершин

Определение графа

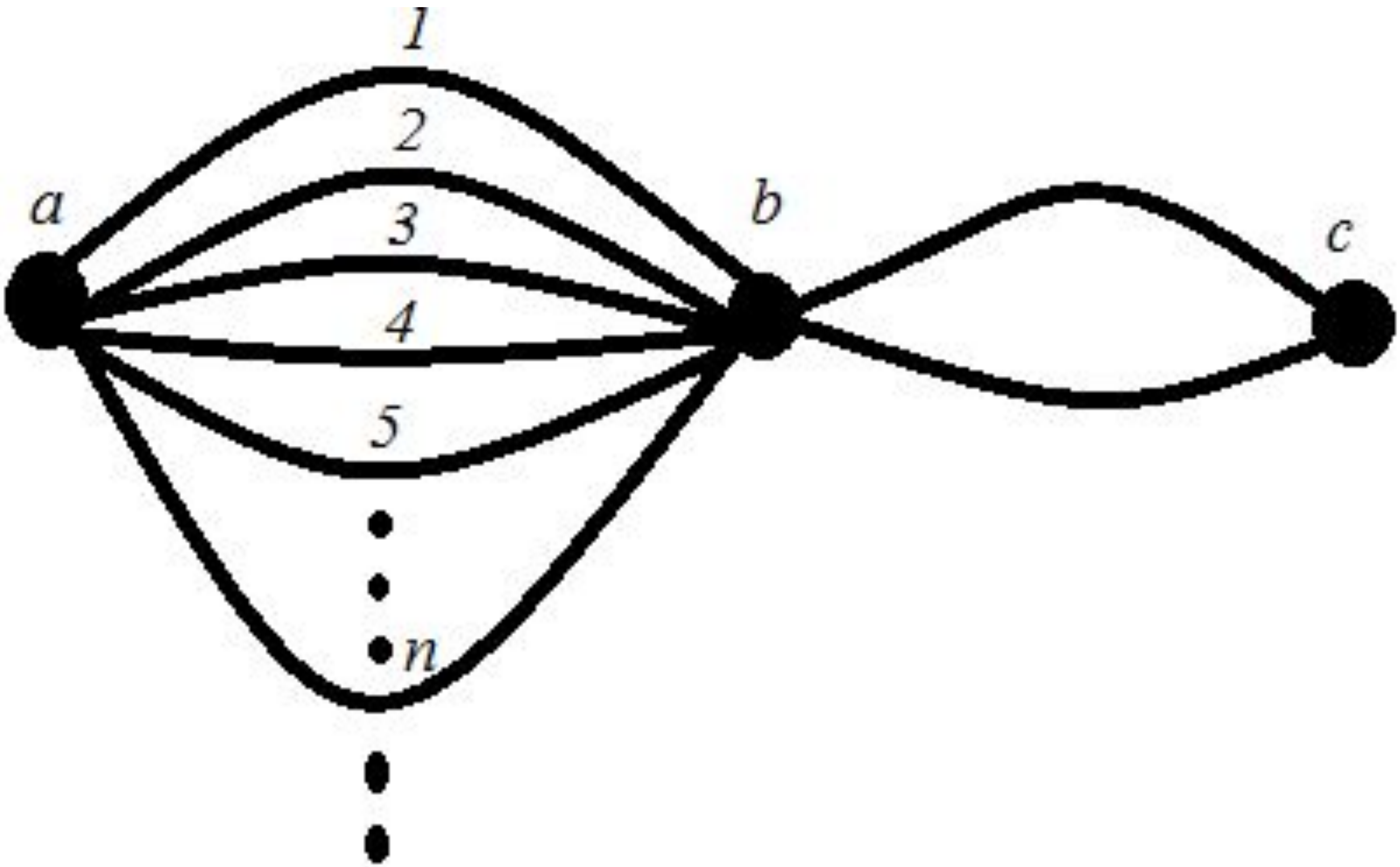


Рис. 10. Граф с бесконечным числом ребер

Определение графа

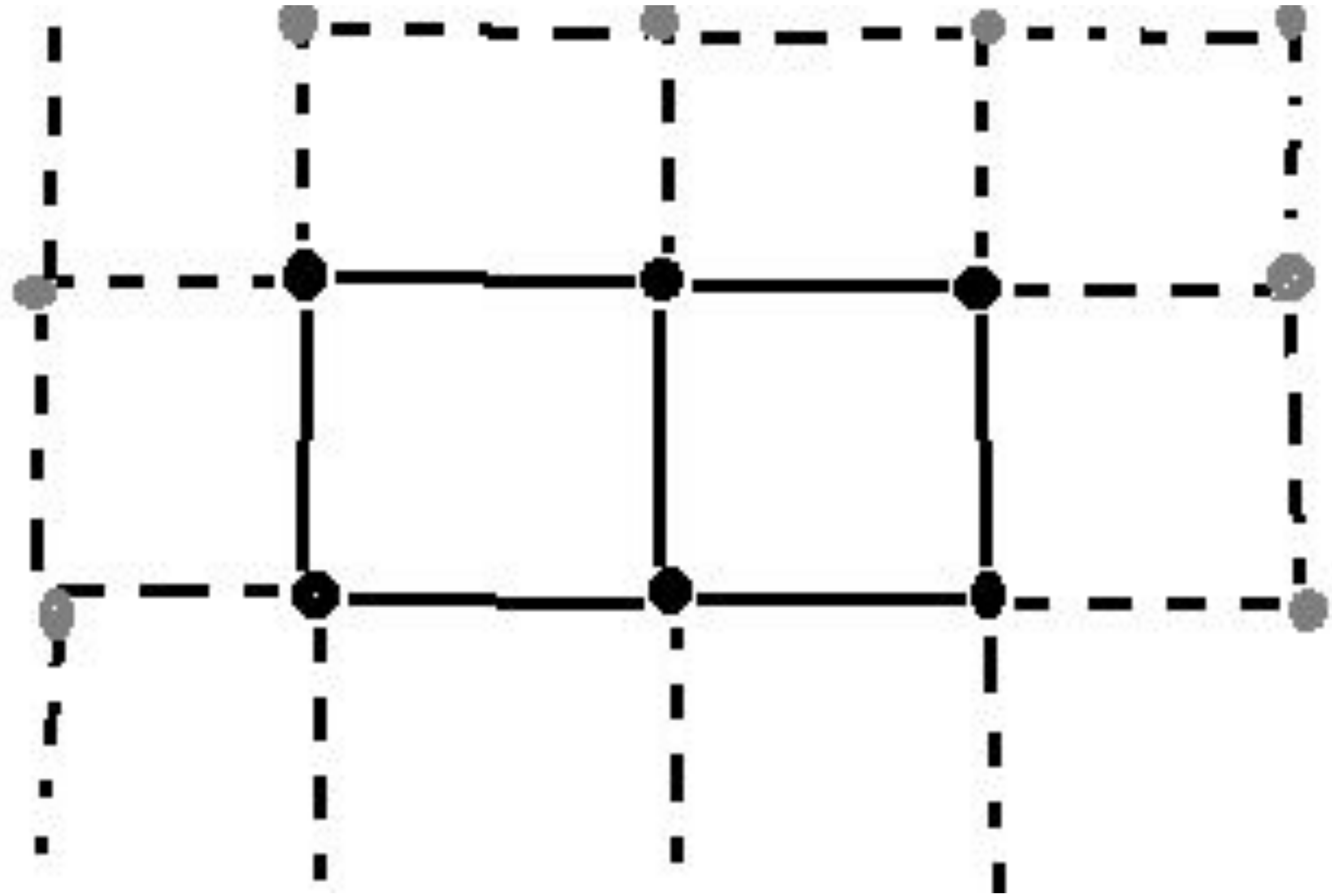


Рис. 11. Бесконечный граф

Каноническое соответствие

- Каждому неориентированному графу ***канонически соответствует*** ориентированный граф с тем же множеством вершин, в котором каждое ребро заменено двумя ориентированными ребрами, инцидентными тем же вершинам и имеющим противоположные направления.

Каноническое соответствие

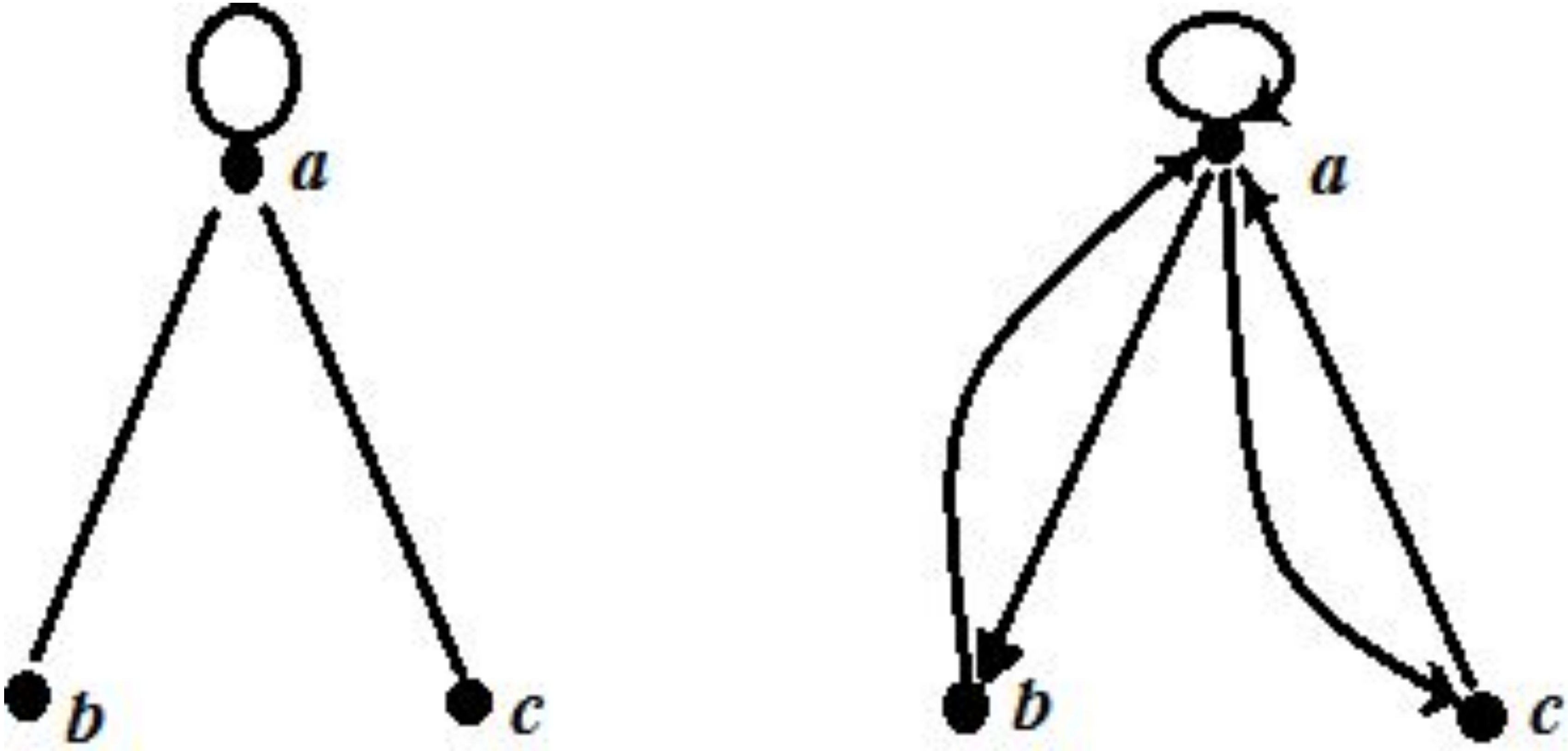


Рис 12. Канонически соответствующие графы

Способы задания

Задать граф – значит описать множества его вершин и ребер, а также отношение инцидентности.

Пусть вершины графа $v_1, v_2, \ldots, v_n$;

$e_1, e_2, \ldots, e_m$ ребра графа ***G.***

Граф задают:

1) Матрицей инцидентности

2) Матрицу смежности

3) Списком ребер

3) Рисунком

Матрица инцидентности

матрица инцидентности $\left\| \varepsilon_{ij} \right\|$ размера $m \times n$ (строкам соответствуют ребра, столбцам – вершины графа), в которой

для нграфа

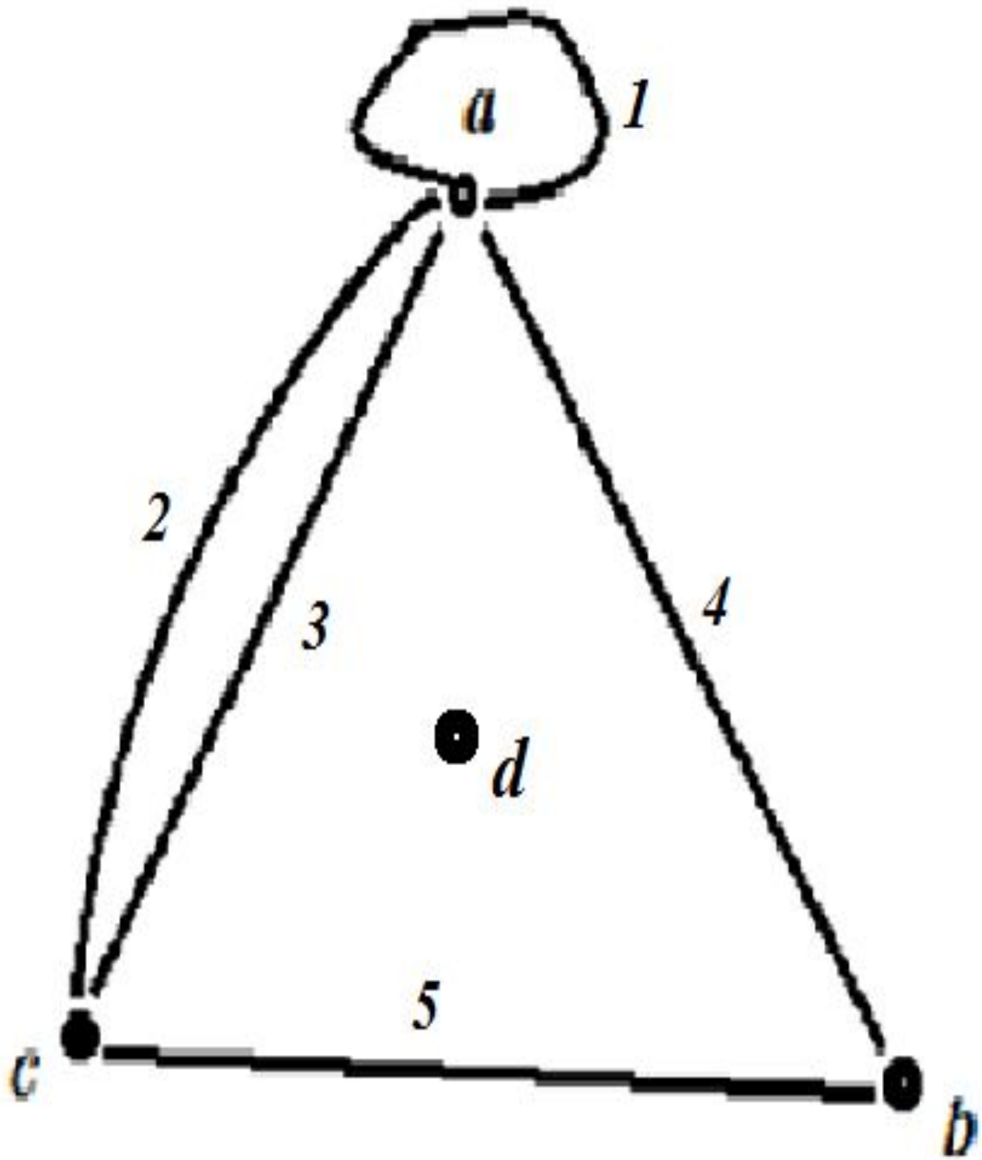
$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{ ребро } e_i \textit{ инциндентно вершине } v_j; \\ 0 - \textit{в противном случае}. \end{cases}$$

Матрица инцидентности

- **для орграфа**

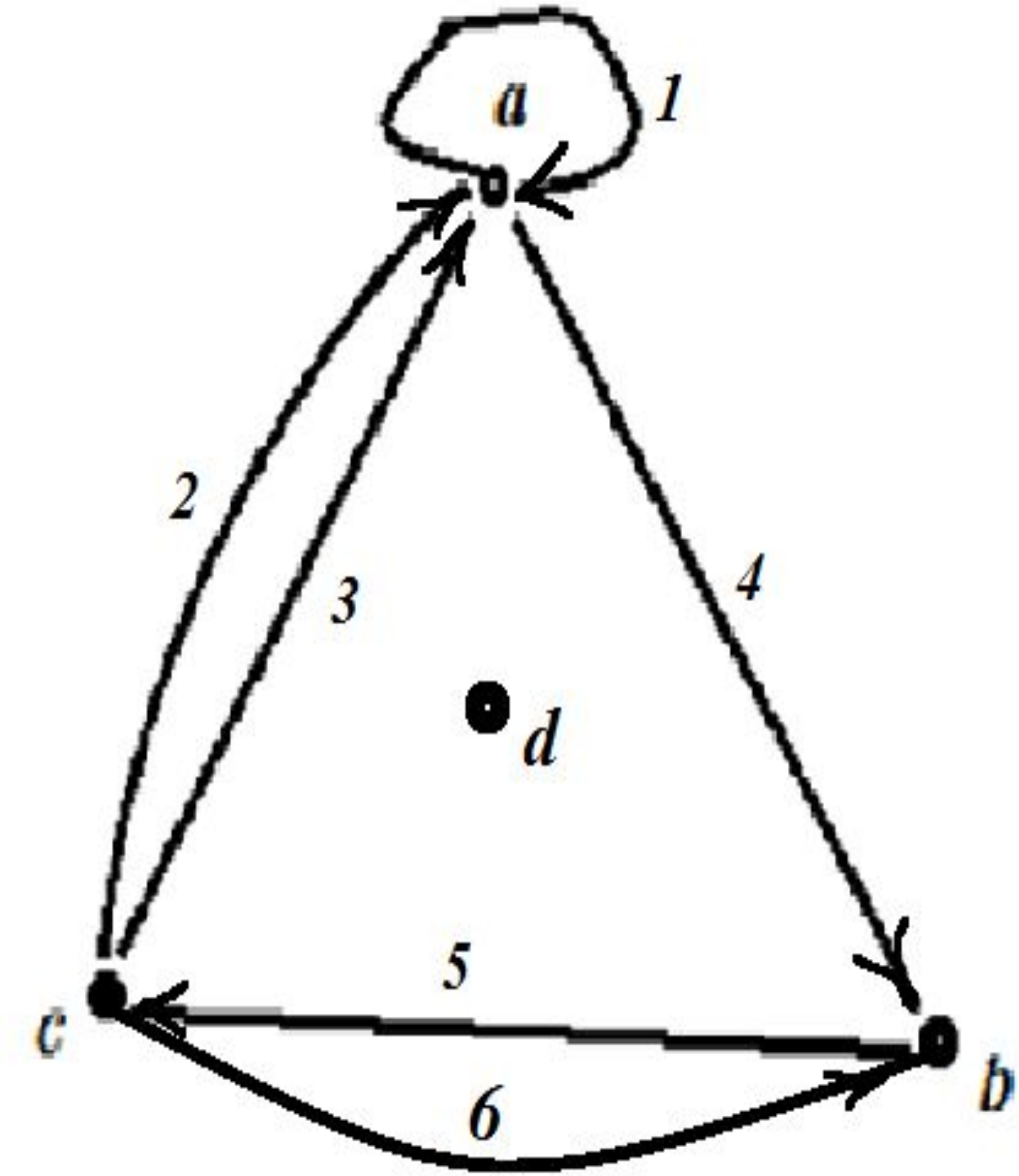
$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} -1, \text{ если вершина } v_j - \text{начало ребра } e_i; \\ 1, \text{ если вершина } v_j - \text{конец ребра } e_i; \\ 2, \text{ если } e_i - \text{петля вокруг вершины } v_j; \\ 0 - \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Пример: матрица инцидентности н-графа



	a	b	c	d
1	1	0	0	0
2	1	0	1	0
3	1	0	1	0
4	1	1	0	0
5	0	1	1	0

Пример: матрица инцидентности ор-графа



	a	b	c	d
1	**α**	0	0	0
2	1	0	-1	0
3	1	0	-1	0
4	-1	1	0	0
5	0	-1	1	0
6	0	1	-1	0

Матрица смежности

Матрица смежности $\left\| \delta_{ij} \right\|$

размера $n \times n$, столбцам и строкам которой соответствуют вершины графа.

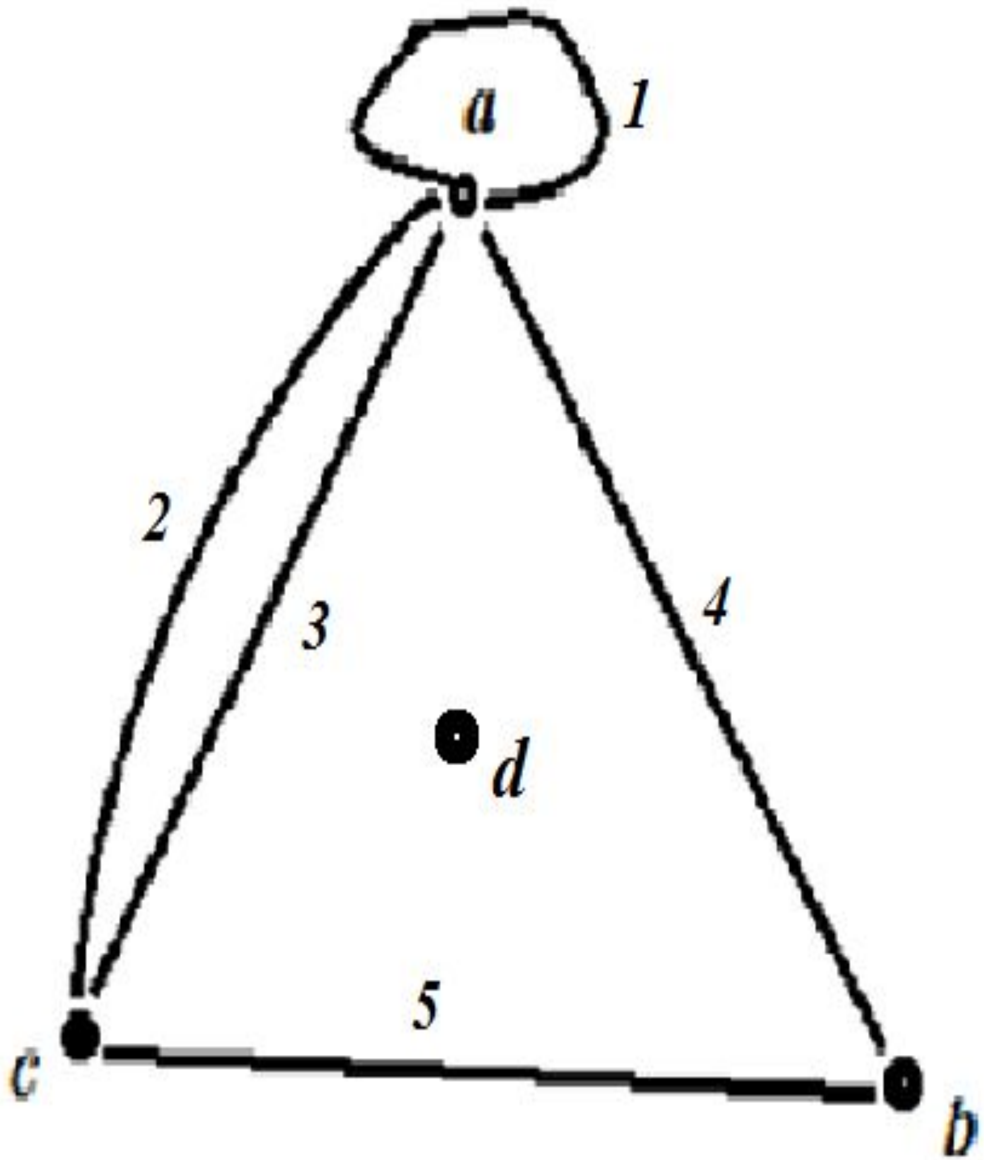
Для нграфа δ_{ij} равно количеству ребер, связывающих *i*-ю и *j*-ю вершины,

для орграфа δ_{ij} равно количеству ребер выходящих из *i*-й и входящих в *j*-ю вершину.

Матрица смежности

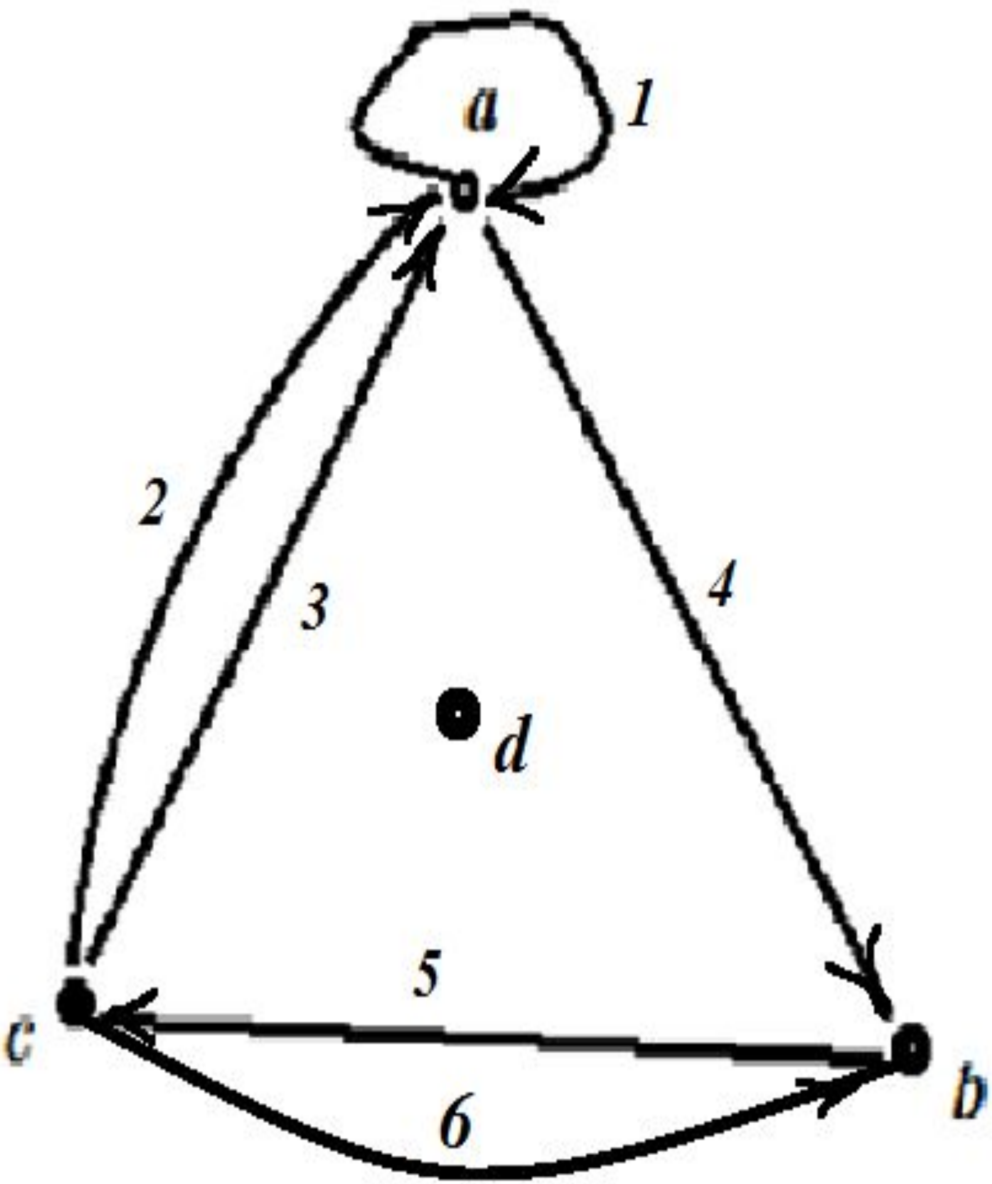
- Матрица смежности нграфа всегда симметрична.
- Матрица смежности орграфа в общем случае не симметрична.
- Она симметрична, если данному орграфу есть канонически соответсвующий нграф.

Пример: матрица смежности н-графа



	a	b	c	d
a	1	1	2	0
b	1	0	1	0
c	2	1	0	0
d	0	0	0	0

Пример: матрица смежности ор-графа



	a	b	c	d
a	1	1	0	0
b	0	0	1	0
c	2	1	0	0
d	0	0	0	0

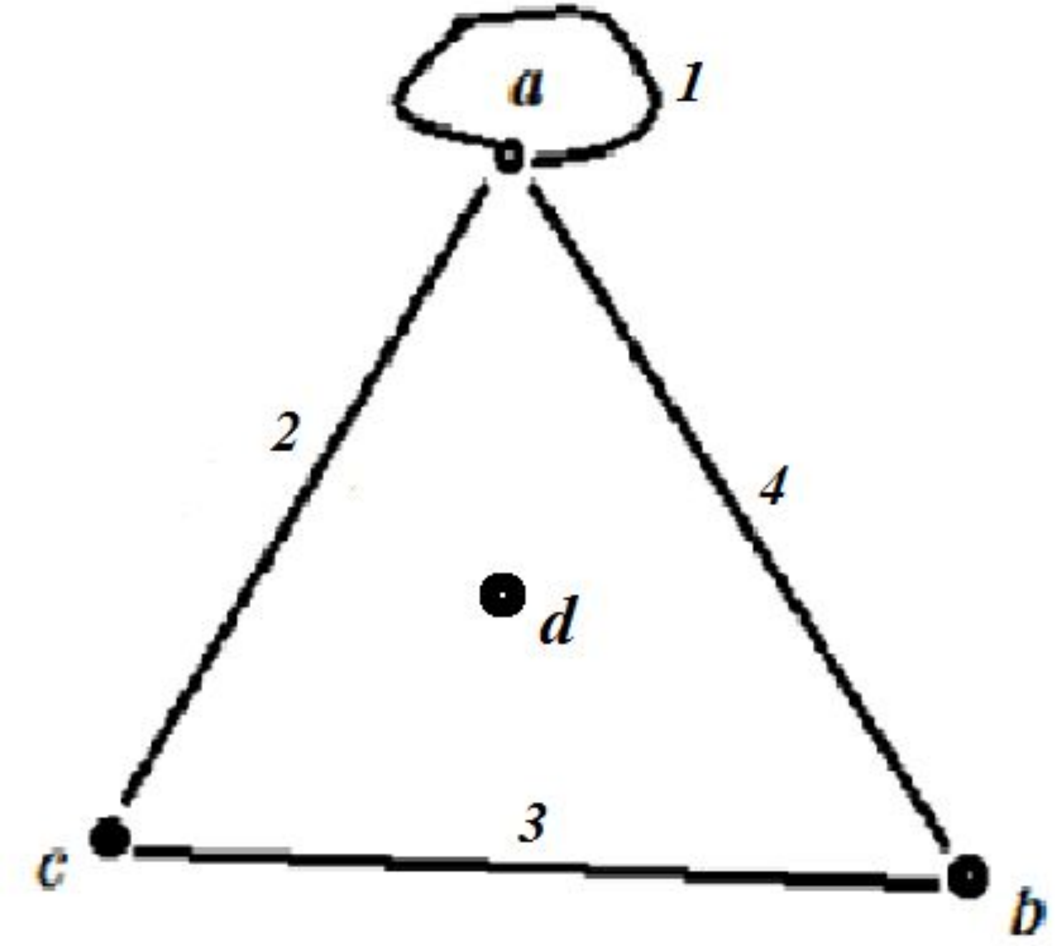
Список ребер

- ***Списком ребер*** можно задать граф без кратных ребер.
- Ребро представляется парой вершин, инцидентных ему, например ***e =(v, w).***
- Для н-графа порядок вершин в строке произволен, для ор-графа первым стоит номер вершины–начала ребра.

Рисунок

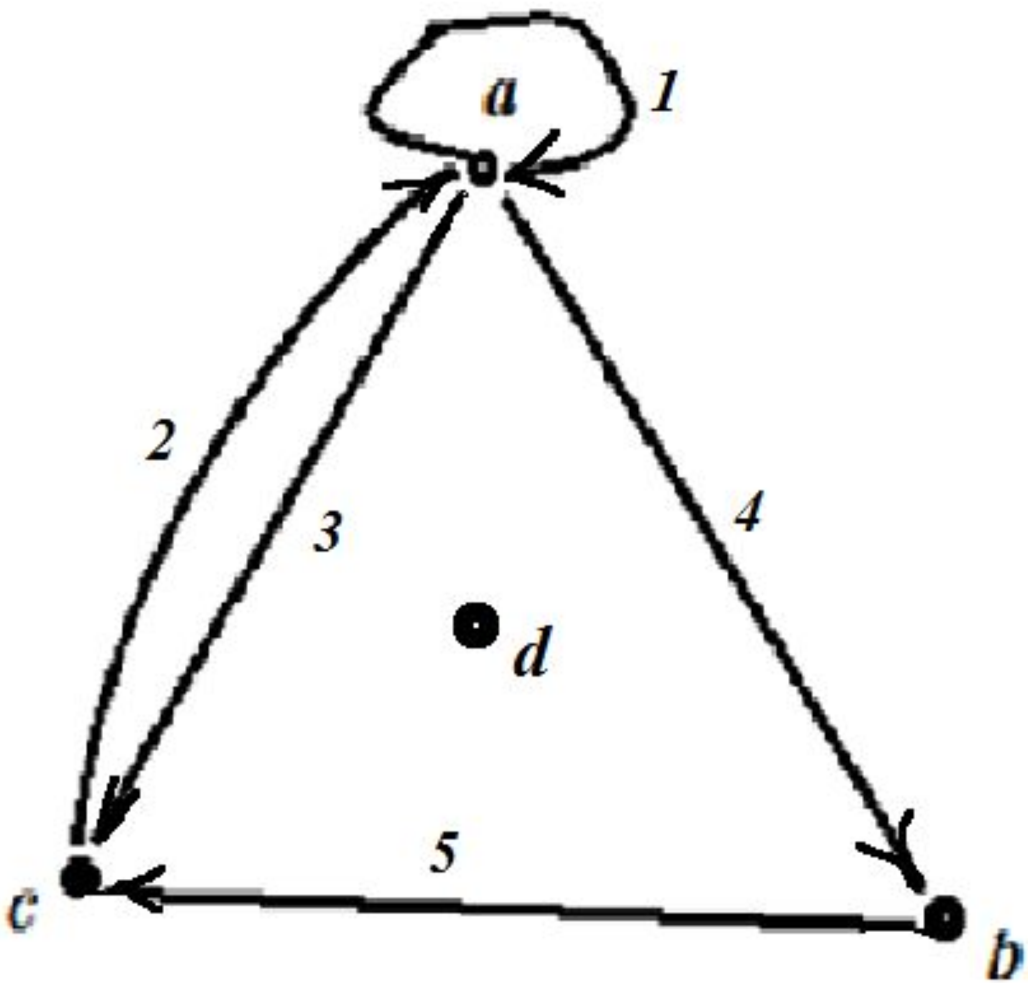
- Рисунок или геометрическая интерпретация появляется, если сопоставить вершинам точки плоскости, ребрам – линии на плоскости, причем линия соединяет только те точки, которые соответствуют вершинам, инцидентным данной линии-ребру.
- Граф для которого возможна геометрическая интерпретация на плоскости, называется ***планарным.***

Пример: список ребер н-графа



E={(a,a), (a,b), (a,c), (b,c)}

Пример: список ребер ор-графа



E={(a,a), (a,b), (a,c), (c,a), (b,c)}

Планарные графы

- На рисунке приведен пример не планарного графа

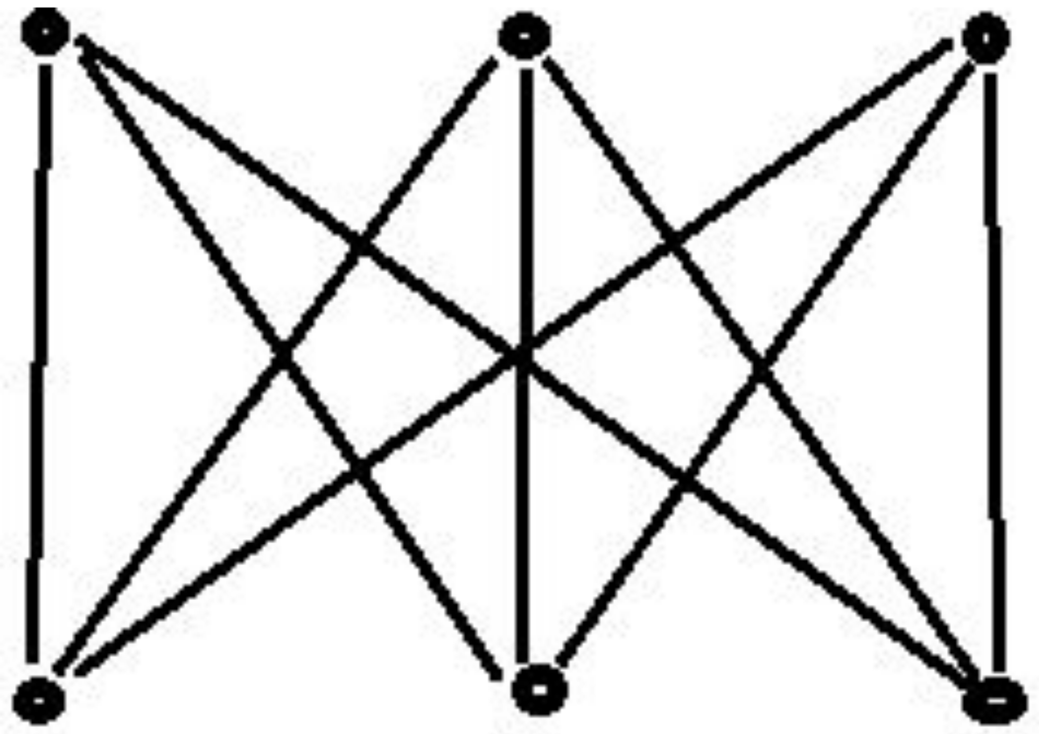


Рис. 12 Граф «три дома - три колодца»

Изоморфные графы

- Графы, отличающиеся только нумерацией вершин, называются ***изоморфными.***

Изоморфные графы

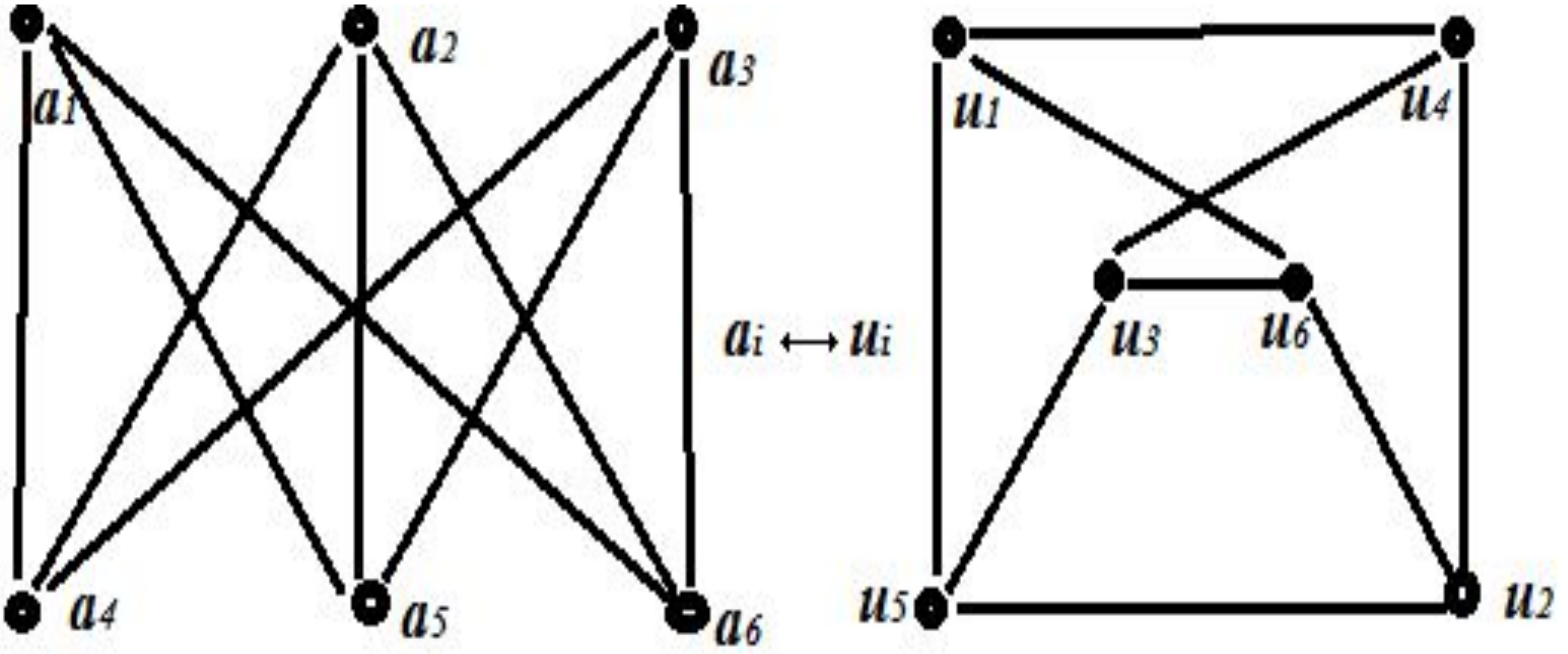


Рис.13. Изоморфные графы