МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

И.П. БОЛОДУРИНА, Ю.П. ЛУГОВСКОВА

Электронный курс лекций по дисциплине «Методы оптимизации»

Электронный курс лекций по дисциплине «Методы оптимизации» (ЭКЛ МО) предназначен для изучение ряда базовых алгоритмов, которые используются для решения конечномерных задач оптимизации; для получения теоретических и концептуальных представлений, достаточных для понимания, оценки этих алгоритмов и, если необходимо, создания новых. ЭКЛ МО включает темы по освоению численных методов решения задач безусловной оптимизации, а также численные методы поиска условного экстремума. Описаны алгоритмы решения задач линейного программирования, целочисленного программирования, транспортных задач. В каждом разделе кратко изложены основные теоретические сведения, приведены решения типовых примеров и задачи для самостоятельного решения. Возможности ЭКЛ МО позволяют эффективно организовать как аудиторную, так и самостоятельную работу студентов. Четкая структуризация учебного материала, его наглядное и компактное представление способствуют наиболее эффективному восприятию и усвоению его содержания.

Оренбург, 2022

Электронный курс лекций по дисциплине «Методы оптимизации» представлен следующими разделами:

Предмет и история развития методов оптимизации. Общая постановка задач оптимизации и основные положения. Теорема Вейерштрасса о достижении нижней грани функции на множестве.
Методы минимизации функций одной переменной: деление отрезка пополам, метод золотого сечения, метод Фибоначчи, метод Ньютона.
Методы минимизации функций многих переменных: метод наискорейшего спуска, метод сопряженных градиентов, метод конфигураций, метод Ньютона.

 Задача линейного программирования. Симплекс-метод. Элементы двойственности в линейном программировании. Целочисленное программирование. Постановка и алгоритмы решения транспортных задач.

 Элементы выпуклого анализа. Теорема Куна-Таккера. Понятие о двойственной задаче (основные теоремы).

Методы условной оптимизации. Правило множителей Лагранжа для задач с ограничениями типа равенств и неравенств. Метод штрафных функций. Метод проекции градиента.

Цель курса:

– Изучение ряда базовых алгоритмов, которые используются для решения конечномерных задач оптимизации.

– Получение теоретических и концептуальных представлений, достаточных для понимания, оценки этих алгоритмов и, если необходимо, создания новых.

Предмет и история развития методов оптимизации. Общая постановка задач оптимизации и основные положения.

Оптимизация (по латыни optimus – наилучший) - целенаправленная деятельность, заключающаяся в получении наилучших результатов при соответствующих условиях.

В 18 веке были заложены математические основы оптимизации (вариационное исчисление, численные методы и др.) Однако до второй половины 20 века методы оптимизации во многих областях науки и техники применялись редко, поскольку практическое использование математических методов оптимизации требовало огромной вычислительной работы, которую без ЭВМ реализовать было крайне трудно, а в ряде случаев - невозможно.

Постановка задачи оптимизации предполагает наличие:

- объекта задачи оптимизации;
- набора независимых параметров (переменных), описывающих данную задачу;
- условий (часто называемых ограничениями), которые характеризуют приемлемые значения независимых переменных;
- скалярной меры "качества", носящей название критерия оптимизации или целевой функции, и зависящей от переменных оптимизации.

Решение оптимизационной задачи - это поиск определенного набора значений переменных, которому отвечает оптимальное значение критерия оптимизации.

Формализация задачи оптимизации

1. Определяем искомые переменные:
   - Что нужно найти?
   - Что можно изменять, чем можно управлять при решении задачи?

2. Определяем допустимое множество:
   - Какие есть ограничения на выбранные переменные?

3. Определяем целевую функцию:
   - Что является показателем качества решения?
   - Как этот показатель зависит от выбранных переменных?

Формализация задачи оптимизации

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Формализация задачи оптимизации

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Формализация задачи оптимизации

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Общая постановка задачи оптимизации

Постановка задачи оптимизации содержит

- целевую функцию f(x), где $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, определенную на n-мерном евклидовом пространстве R^n. Ее значения характеризуют степень достижения цели, во имя которой поставлена или решается задача;
- множество допустимых решений $X \in R^n$, среди элементов которого осуществляется поиск.

$$\begin{cases} f(x_1,\dots,x_n) \Rightarrow \max \quad \text{по} \ x_1,\dots,x_n : \\ g_1(x_1,\dots,x_n) \le b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_m(x_1,\dots,x_n) \le b_m, \\ x_1,\dots,x_n \ge 0, \end{cases}$$

В векторной форме

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}) \Rightarrow \max \quad \text{по} \ \mathbf{x} : \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \le \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} \ge \mathbf{0}. \end{cases}$$

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может

- прямые ограничения

- функциональные ограничения

Примеры постановок задач оптимизации

Площадь поверхности сферы равна 27π. Какова высота цилиндра наибольшего объема, вписанногов эту сферу?

Обозначим высоту цилиндра AD=h, OB=R.

По условию $S = 4\pi R^2 = 27\pi \;\Rightarrow\; R^2 = \dfrac{27}{4},\;\; R = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

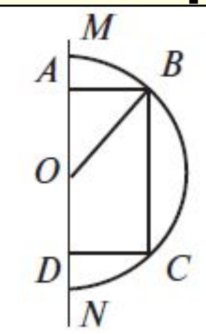
Из $\Delta AOB : \mathrm{AB}^2 = OB^2 - OA^2 = \dfrac{27 - h^2}{4}$

Объем цилиндра

$$V(h) = \pi AB^2 h = \frac{\pi}{4}(27h - h^3)$$

По смыслу задачи

$$0 < h < 2R,\;\; 0 < h < 3\sqrt{3}$$



Цилиндр, вписанный в сферу

$$\boxed{V(h) = \frac{\pi}{4}(27h - h^3) \to \max,\;\; 0 < h < 3\sqrt{3}}$$

Аналитическое решение задачи оптимизации

$$\boxed{V(h) = \frac{\pi}{4}(27h - h^3) \to \max, \;\; 0 < h < 3\sqrt{3}}$$

Производная $V'(h) = \dfrac{3\pi}{4}(9 - h^2) = 0 \Rightarrow h = 3$

Вблизи h=3 производная $V'(h)$ меняет знак с “+” на “-”, значит при этой высоте объем цилиндра будет наибольшим

$$\boxed{h = 3, \;\; V(h) = \frac{27\pi}{2}}$$

Модель старинной русской задачи

Пошла баба на базар, на людей посмотреть, да кое-что продать. Сколько надо взять бабе на базар для продажи живых гусей, уток и кур, чтобы выручить как можно больше денег, если она может взять товара не более P килограмм и известно, что:

-масса одной курицы – b1 кг, стоимость – c1 руб.;

- масса одной утки – b2 кг, стоимость – c2 руб.;

-масса одного гуся – b3 кг, стоимость – c3 руб.

Модель

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$, или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Модель

x – длина стороны квадратов, вырезаемых по углам листа жести

Примеры задач оптимизации

1. Завод выпускает три типа деталей A, B и C. Детали каждого типа можно изготовить на любой из двух имеющихся на заводе производственных линий, но расходы на работу каждой линии зависят от типа производимой на ней детали. На завод поступил заказ на производство 50 деталей A, 40 деталей B и 15 деталей C со сроком выполнения 10 суток. Необходимо составить такой план загрузки линий, чтобы суммарные затраты завода были минимальными. Данные по производительности линий и затратам на производство в зависимости от типа деталей приведены в таблице.

Тип продукции	Производительность, шт./ сутки		Затраты на работу линий, ден.ед./сутки	
	1 линия	2 линия	1 линия	2 линия
Деталь A	6	4	200	350
Деталь B	5	6	150	200
Деталь C	4	3	400	250

2. Студент Коля любит ходить по ночным клубам и в то же время получать зачеты. Предельные полезности ночи в клубе и зачета известны и постоянны. Однако Коля обладает известным ограниченным бюджетом и ему приходится распределять его на клубы и репетиторов, так как сам Коля подготовиться не может. Если Коля днем занимается, то ночью он спит; если он ночью в клубе, то днем он заниматься не может. Стоимость одной ночи в клубе и одного дня с репетитором известны. Коля также не может выносить более определенного количества клубов в неделю, так как он начинает себя плохо чувствовать, и не может нанимать сверх определенного числа репетиторов в неделю, так как ему становится скучно. Определите, сколько суток в неделю Коле необходимо уделить клубам и сколько – подготовке к зачетам, чтобы максимизировать свою полезность.

3. Девушка решила похудеть и выбрала модную диету, в которой разрешено питаться только двумя продуктами P и Q (овсянка и творог). Суточное питание этими продуктами должно давать не более 14 единиц жира (чтобы похудеть), но не менее 300 калорий. На упаковке продукта P написано, что в одном килограмме этого продукта содержится 15 единиц жира и 150 калорий, а на упаковке с продуктом Q - 4 единицы жира и 200 калорий соответственно. При этом цена 1 килограмма продукта P равна 15 руб., а 1 кг продукта Q - 25 руб. В какой пропорции нужно брать эти продукты для того, чтобы выдержать условия диеты и истратить как можно меньше денег?

Общая постановка задачи оптимизации

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

Постановка задачи поиска минимума функции содержит

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

(1)

Основные положения задачи оптимизации

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

Замечания

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

2) Глобальный экстремум всегда является одновременно локальным, но не наоборот.

Основные положения задачи оптимизации

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

Разрешимость задачи оптимизации

Теорема Вейерштрасса

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

Следовательно, задача оптимизации разрешима, если выполняются следующие три условия:

1. Множество допустимых решений замкнуто;
2. Множество допустимых решений ограничено;
3. Целевая функция непрерывна на допустимом множестве.

Вопросы для проверки знаний

1) Предмет и история развития методов оптимизации.

2) Общая постановка задач оптимизации и основные положения.

3) Постановка задачи поиска минимума. Переход от задачи нахождения минимума к задаче нахождения максимума функции. Множество допустимых решений. Задача поиска условного и безусловного экстремума. Глобальный и локальный экстремум функции.

4)Теорема Вейерштрасса о достижении нижней грани функции на множестве.

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть — целые, натуральные

1-ОЕ ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть — целые, натуральные

2-ОЕ ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть — целые, натуральные или булевские значения

Методы безусловной минимизации функций одной переменной

Правило исследования функции на экстремум

0. Найти область определения функции y=f(x);
1. Найти критические точки функции y=f(x);
2. Выбрать те, которые являются внутренними точками области определения функции;
3. Исследовать знак производной $f'(x)$ слева и справа от исследуемой внутренней критической точки или знак производной второго порядка в исследуемой внутренней критической точке;
4. Найти экстремумы функции y=f(x)

управления) — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть — целые, натуральные или булевские значения.

Методы безусловной минимизации функций одной переменной

Пример

$f(x) = x^3 - 3 \cdot x + 1 \quad \to \quad \min, \quad x \in [-3, 3].$

Решение

1). $f'(x) = 3 \cdot x^2 - 3; \qquad 3 \cdot x^2 - 3 = 0.$

Стационарные точки: $x_1 = -1;$

$x_2 = 1.$

2). Вычисляем значения функции в стационарных точках и на концах отрезка:

$x = -3; \quad f(-3) = (-3)^3 - 3 \cdot (-3) + 1 = -17;$

$x = -1; \quad f(-1) = 3;$

$x = 1; \quad f(1) = -1;$

$x = 3; \quad f(3) = 1.$

3). Минимальное значение функции

$f_{\min} = \min\{-17, 3, -1, 1\} = -17;$

точка минимума $x^* = -3.$

Методы безусловной минимизации функций одной переменной

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Прямые методы одномерного поиска

Поскольку задачи максимизации и минимизации легко преобразуются одна в другую, то в дальнейшем будем рассматривать только задачи минимизации.

Задача

Минимизировать функцию одной переменной f(x) при условии $a \le x \le b$, то есть найти $x^* \in [a,b]$ такую что $f(x^*) \le f(x)$ для $\forall x \in [a,b]$.

Интервал $[a,b]$ называется интервалом неопределенности; функция f (x) называется минимизирующей или целевой функцией.

Прямые методы одномерного поиска

Определение

Отрезком, соединяющим две точки x_1 и x_2 , называется множество точек x, удовлетворяющих уравнению $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$, где $0 \le \lambda \le 1$.

Определение

Множество точек X называется выпуклым, если вместе
с любыми двумя его точками ему принадлежит и отрезок, соединяющий эти две точки.

Пересечение выпуклых множеств является выпуклым
множеством.

Прямые методы одномерного поиска

Определение

Функция f(x), заданная в выпуклой области Q, называется выпуклой или вогнутой в этой области, если для любых двух точек $x_1, x_2 \in Q$ и для любого числа $0 \le \lambda \le 1$ выполняется неравенство

$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$ -для выпуклой функции;

$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \ge \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$ -для вогнутой функции. (1)

Определение

Если неравенства (1) выполняются как строгие, то функция f(x) называется строго выпуклой (вогнутой).

Прямые методы одномерного поиска

Определение

Функция f(x), определенная на непустом выпуклом множестве X, называется квазивыпуклой, если для любых двух точек $x_1, x_2 \in X$ и для любого числа $0 < \lambda < 1$ выполняется неравенство

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \max\{f(x_1), f(x_2)\} \qquad (2)$$

Функция f(x) называется квазивогнутой, если – f(x) – квазивыпуклая функция.

Определение

Если неравенство (2) выполняется как строгое, то функция f(x) называется строго квазивыпуклой.

Прямые методы одномерного поиска

Замечания:

1. Если f(x) выпуклая функция на выпуклом множестве X, то всякая точка локального минимума является точкой ее глобального минимума на X.

2. Если выпуклая функция достигает своего минимума в двух различных точках, то она достигает минимума во всех точках отрезка, соединяющего эти две точки.

3. Если f(x) строго выпуклая функция на выпуклом множестве X, то она может достигать своего глобального минимума на X не более чем в одной точке.

Прямые методы одномерного поиска

Определение

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

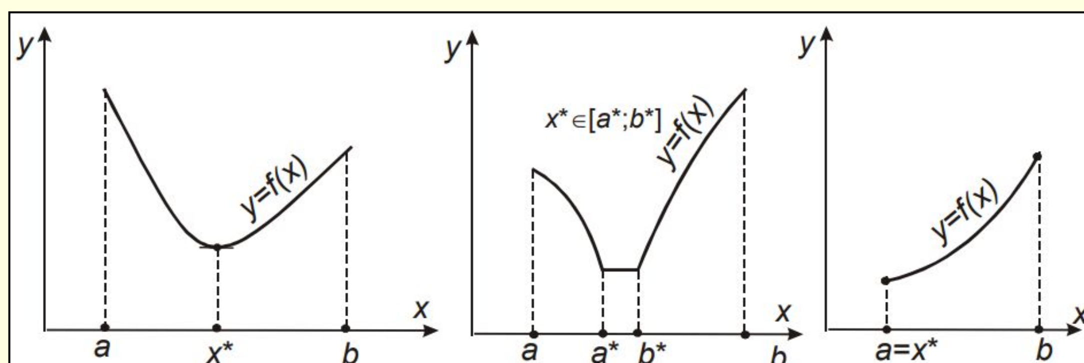
Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

Другими словами функция f(x) является унимодальной в данной области, если в этой области имеет единственный экстремум, с увеличением x слева от x* она монотонно убывает, справа – монотонно возрастает

Графики унимодальных функций



Прямые методы одномерного поиска

Теорема

f(x)-унимодальна или выпуклая или строго квазивыпуклая в интервале $[a,b]$. Пусть $\alpha,\beta\in[a,b]$ такие, что $\alpha<\beta$.

Если $f(\alpha)>f(\beta)$, то $f(z)\geq f(\beta)$ для любого $z\in[a,\alpha)$.

Если $f(\alpha)\leq f(\beta)$, то $f(z)\geq f(\alpha)$ для любого $z\in(\beta,b]$.

Доказательство

Пусть $f(\alpha)>f(\beta)$ и $z\in[a,\alpha)$.

Предположим, что утверждение теоремы не верно, то есть пусть $f(z)<f(\beta)$.

Так как α можно представить в виде выпуклой комбинации точек z, β, то существует $\lambda\in(0;1)$ такое, что

$$\alpha=\lambda z+(1-\lambda)\beta$$

Учитывая, что f(x) строго квазивыпуклая функция, имеем $f(\alpha) < \max\{\mathrm{f(z)}, \mathrm{f}(\beta)\} = \mathrm{f}(\beta)$.

Но это противоречит утверждению, что $f(\alpha) > f(\beta)$.

Полученное противоречие доказывает теорему.

Ч.Т.Д.

Аналогично доказывается второе неравенство теоремы.

МЕТОДЫ ИСКЛЮЧЕНИЯ ОТРЕЗКОВ

- Метод половинного деления
- Метод «золотого» сечения
- Метод Фибоначчи

Методы исключения отрезков

Стратегия поиска минимума функции одной переменной

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Выбор начального интервала неопределенности

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Выбор начального интервала неопределенности

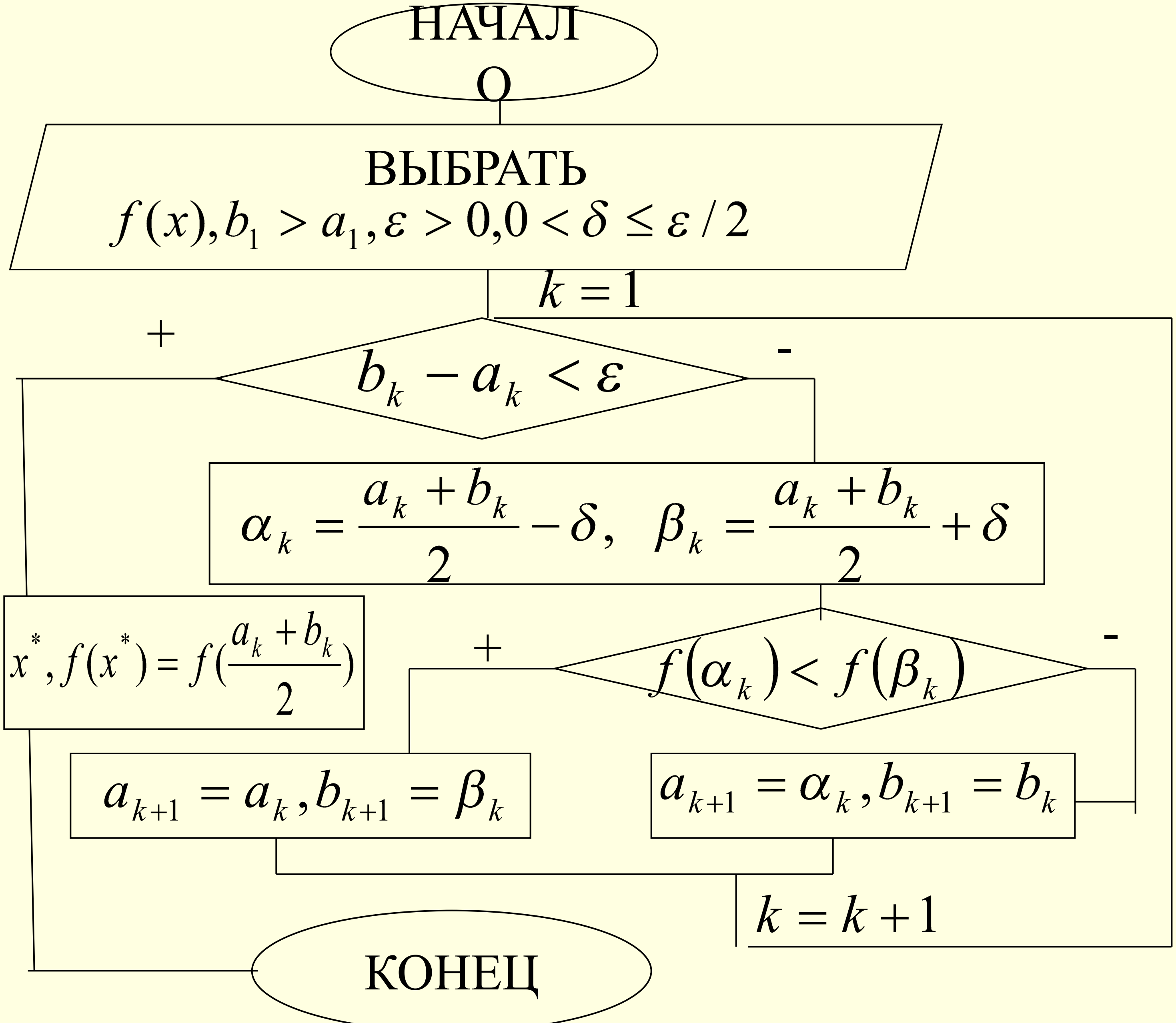
Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

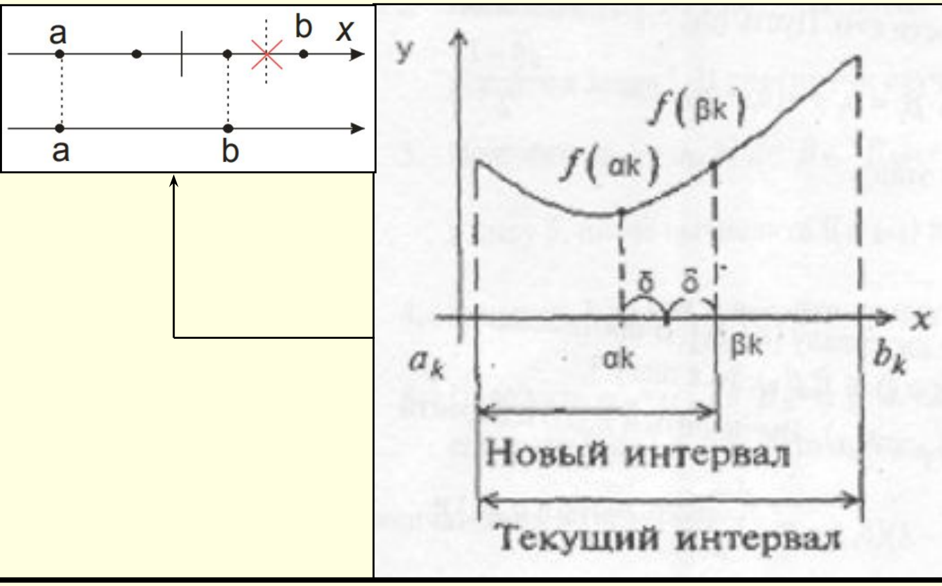
Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

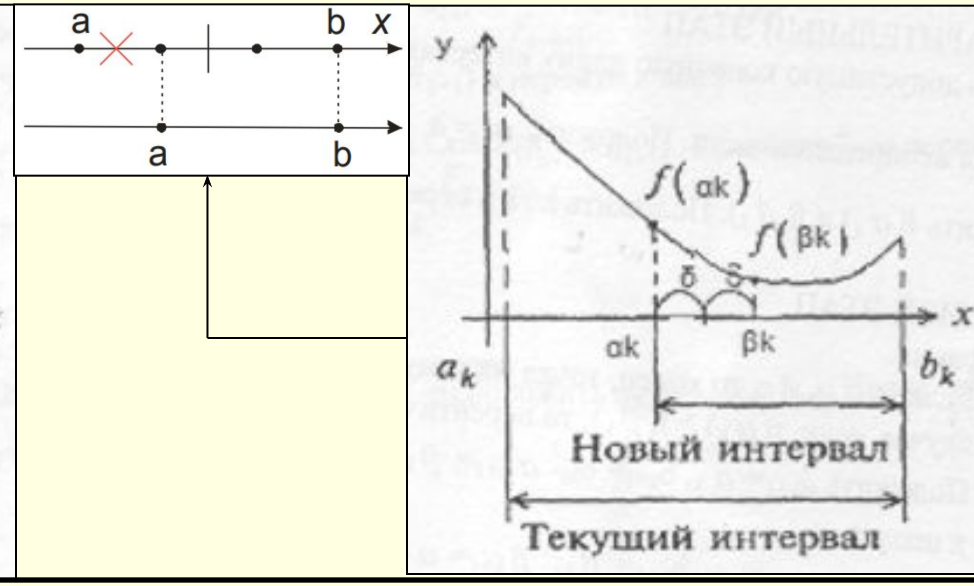
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

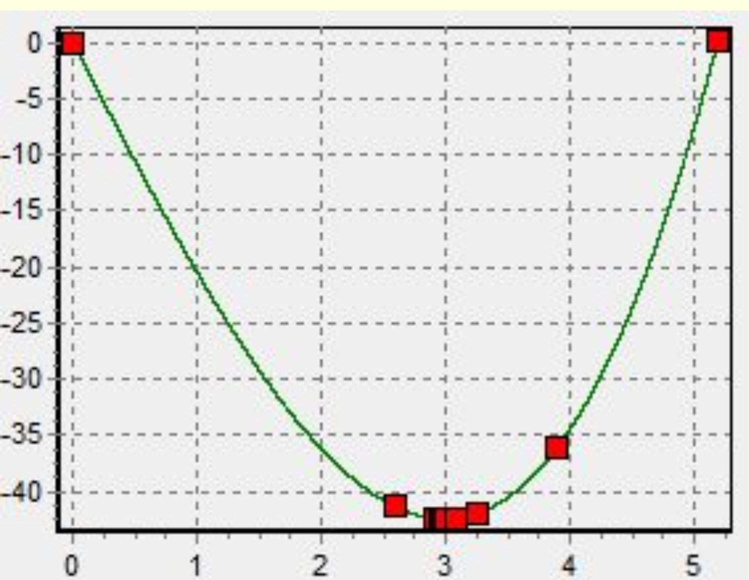
Метод половинного деления







$$V(h)=\frac{\pi}{4}(27h-h^{3})\rightarrow \max,\ \ 0<h<3\sqrt{3}$$



1 [0,5,2]
2 [2,5999,5,2]
3 [2,5999,3,90005]
4 [2,5999,3,250075]
5 [2,9248875,3,250075]
6 [2,9248875,3,08758125]
7 [2,9248875,3,006334375]
8 [2,9655109375,3,006334375]
9 [2,98582265625,3,006334375]
10 [2,995978515625,3,006334375]
11 [2,995978515625,3,0012564453125]
12 [2,99851748046875,3,0012564453125]
13 [2,99978696289063,3,0012564453125]

$$x^{*}\approx 3{,}000204$$

$$f(x^{*})\approx 42{,}4115$$

Метод половинного деления

ЗАМЕЧАНИЕ

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

ПРИМЕР

управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.
Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
– либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
– либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
– либо натуральные значения ($x_i \in N$),
– либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).
Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$.

k	a_k	b_k	α_k	β_k	$f(\alpha_k)$	$f(\beta_k)$	$b_k - a_k$
1	–1	1	–0,04	0,04	0,0999936	1,000064	2
2	–1	0,04	–0,52	–0,44	0,859392	0,914816	1,04
3	–1	–0,44	–0,76	–0,68	0,561024	0,685568	0,56
4	–1	–0,68	–0,88	–0,8	0,318528	0,488	0,32
5	–1	–0,8	–0,94	–0,86	0,169416	0,363944	0,2
6	–1	–0,86	–0,97	–0,89	0,087327	0,295031	0,14
7	–1	–0,89	–0,985	–0,905	0,044328	0,258782	0,11
8	–1	–0,905	–	–	–	–	0,095

1. Зададим начальный интервал неопределенности: $x \in [-1;1]$. Положим $\delta = 0,04$, $\varepsilon = 0,1$.

2. Положим $k = 1$.

3^1. Проверим условие $b_1 - a_1 = 2 > \varepsilon = 0,1$. Перейдем к шагу 4.

4^1. Вычислим

$$\alpha_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} - \delta = -0,04,\ f(\alpha_1) = 0,999939,$$

$$\beta_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} + \delta = 0,04,\ f(\beta_1) = 1,000064.$$

5^1. Так как $f(\alpha_1) < f(\beta_1)$, то $a_2 = a_1 = -1$, $b_2 = \beta_1 = 0,04$. Положим $k = 2$ и перейдем к шагу 3.

3^2. Проверим условие $b_2 - a_2 = 1,04 > \varepsilon = 0,1$. Перейдем к шагу 4.

4^2. Вычислим

$$\alpha_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} - \delta = -0,52,\ f(\alpha_2) = 0,859392,$$

$$\beta_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} + \delta = -0,44,\ f(\beta_2) = 0,914816.$$

5^2. Так как $f(\alpha_2) < f(\beta_2)$, то $a_3 = a_2 = -1$, $b_3 = \beta_2 = -0,44$. Положим $k = 3$ и перейдем к шагу 3.

3^3. Проверим условие $b_3 - a_3 = 0,56 > \varepsilon = 0,1$. Перейдем к шагу 4.

4^3. Вычислим

$$\alpha_3 = \frac{a_3 + b_3}{2} - \delta = -0,76,\ f(\alpha_3) = 0,561024,$$

$$\beta_3 = \frac{a_3 + b_3}{2} + \delta = -0,68,\ f(\beta_3) = 0,685568.$$

5^3. Так как $f(\alpha_3) < f(\beta_3)$, то $a_4 = a_3 = -1$, $b_4 = \beta_3 = -0,68$. Положим $k = 4$ и перейдем к шагу 3.

3^4. Проверим условие $b_4 - a_4 = 0,32 > \varepsilon = 0,1$. Перейдем к шагу 4.

4^4. Вычислим

$$\alpha_4 = \frac{a_4 + b_4}{2} - \delta = -0,88,\ f(\alpha_4) = 0,318528,$$

$$\beta_4 = \frac{a_4 + b_4}{2} + \delta = -0,8,\ f(\beta_4) = 0,488.$$

5^4. Так как $f(\alpha_4) < f(\beta_4)$, то $a_5 = a_4 = -1$, $b_5 = \beta_4 = -0,8$. Положим $k = 5$ и перейдем к шагу 3.

3^5. Проверим условие $b_5 - a_5 = 0,2 > \varepsilon = 0,1$. Перейдем к шагу 4.

4^5. Вычислим

$$\alpha_5 = \frac{a_5 + b_5}{2} - \delta = -0,94,\ f(\alpha_5) = 0,169416,$$

$$\beta_5 = \frac{a_5 + b_5}{2} + \delta = -0,86,\ f(\beta_5) = 0,363944.$$

5^5. Так как $f(\alpha_5) < f(\beta_5)$, то $a_6 = a_5 = -1$, $b_6 = \beta_5 = -0,86$. Положим $k = 6$ и перейдем к шагу 3.

3^6. Проверим условие $b_6 - a_6 = 0,14 > \varepsilon = 0,1$. Перейдем к шагу 4.

4^6. Вычислим

$$\alpha_6 = \frac{a_6 + b_6}{2} - \delta = -0,97,\ f(\alpha_6) = 0,087327,$$

$$\beta_6 = \frac{a_6 + b_6}{2} + \delta = -0,89,\ f(\beta_6) = 0,295031.$$

5^6. Так как $f(\alpha_6) < f(\beta_6)$, то $a_7 = a_6 = -1$, $b_7 = \beta_6 = -0,89$. Положим $k = 7$ и перейдем к шагу 3.

3^7. Проверим условие $b_7 - a_7 = 0,11 > \varepsilon = 0,1$. Перейдем к шагу 4.

4^7. Вычислим

$$\alpha_7 = \frac{a_7 + b_7}{2} - \delta = -0,985,\ f(\alpha_7) = 0,04433,$$

$$\beta_7 = \frac{a_7 + b_7}{2} + \delta = -0,905,\ f(\beta_7) = 0,25878.$$

5^7. Так как $f(\alpha_7) < f(\beta_7)$, то $a_8 = a_7 = -1$, $b_8 = \beta_7 = -0,905$. Положим $k = 8$ и перейдем к шагу 3.

3^8. Проверим условие $b_8 - a_8 = 0,095 < \varepsilon = 0,1$. Следовательно, $x^* = \dfrac{a_8 + b_8}{2} = -0,9525$, $f(x^*) = 0,135838$.

Метод золотого сечения

НАЧАЛО

ВЫБРАТЬ $f(x), b_1 > a_1, \varepsilon > 0, \lambda = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

$$\alpha_1 = a_1 + (1-\lambda)(b_1 - a_1), \quad \beta_1 = a_1 + \lambda(b_1 - a_1)$$

$k = 1$

$b_k - a_k < \varepsilon$ (+ / -)

$f(\alpha_k) \le f(\beta_k)$ (+ / -)

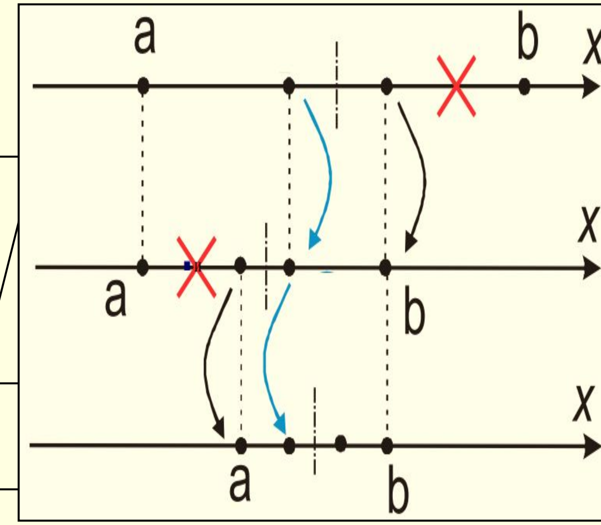
+: $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = \beta_k, \beta_{k+1} = \alpha_k, \alpha_{k+1} = a_{k+1} + (1-\lambda)(b_{k+1} - a_{k+1})$

-: $a_{k+1} = \alpha_k, b_{k+1} = b_k, \alpha_{k+1} = \beta_k, \beta_{k+1} = a_{k+1} + \lambda(b_{k+1} - a_{k+1})$

$k = k + 1$

$x^*, f(x^*) = f\left(\dfrac{a_k + b_k}{2}\right)$

КОНЕЦ



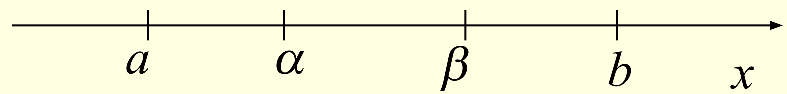
«Золотым сечением» отрезка называется деление отрезка на две части так, что отношение длин всего отрезка к длине больше части равно отношению длин большей части к меньшей

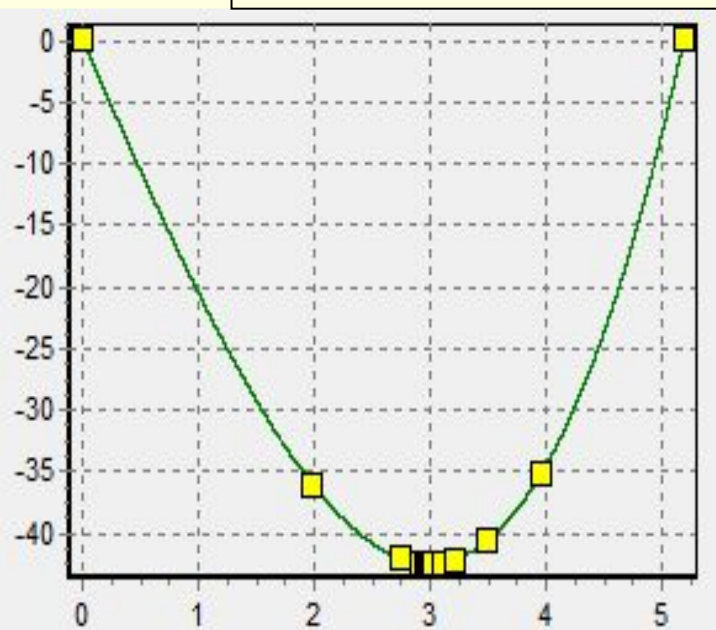
$$\frac{b-a}{b-y}=\frac{b-y}{y-a}$$

Золотое сечение отрезка производит две симметрично расположенные точки

$$\alpha = a+(1-\lambda)(b-a),\ \ \beta = a+\lambda(b-a),\ \ \lambda = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\boxed{V(h)=\frac{\pi}{4}(27h-h^3)\to \max,\ \ 0<h<3\sqrt{3}}$$





1 [0,5,2]
2 [1,98622325850055,5,2]
3 [1,98622325850055,3,97244651700109]
4 [2,74489303400219,3,97244651700109]
5 [2,74489303400219,3,50356280950383]
6 [2,74489303400219,3,21377674149945]
7 [2,92399067349508,3,21377674149945]
8 [2,92399067349508,3,10308831298797]
9 [2,92399067349508,3,03467910200656]
10 [2,96626989102515,3,03467910200656]
11 [2,96626989102515,3,00854910855523]
12 [2,98241911510389,3,00854910855523]
13 [2,99239988447649,3,00854910855523]
14 [2,99239988447649,3,00238065384909]
15 [2,99621219914295,3,00238065384909]
16 [2,99856833918263,3,00238065384909]
17 [2,99856833918263,3,00092447922231]
18 [2,99946830459553,3,00092447922231]

$$x^* \approx 2{,}999918$$

$$f(x^*) \approx 42{,}4115$$

Метод золотого сечения

ЗАМЕЧАНИЕ

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

ПРИМЕР

k	a_k	b_k	α_k	β_k	$f(\alpha_k)$	$f(\beta_k)$	$b_k - a_k$
1	–1	1	–0,23606	0,23606	0,986846	1,013154	2
2	–1	0,23606	–0,53032	–0,23606	0,850853	0,986846	1,23606
3	–1	–0,23606	–0,7112	–0,53032	0,640271	0,850853	0,76
4	–1	–0,53032	–0,8215	–0,7112	0,44556	0,640271	0,46968
5	–1	–0,7112	–0,8903	–0,8215	0,29442	0,44556	0,2888
6	–1	–0,8215	–0,93218	–0,8903	0,18998	0,29442	0,1785
7	–1	–0,8903	–0,9583	–0,93218	0,11996	0,18998	0,109744
8	–1	–0,93218	–0,97423	–0,9583	–	–	0,06782

1. Зададим начальный интервал неопределенности: $x \in [-1;1]$. Положим $\varepsilon = 0,1$, $\lambda = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,61803$, $(1-\lambda) = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0,38197$.

2. Положим $k = 1$.

3[1]. Проверим условие $b_1 - a_1 = 2 > \varepsilon = 0,1$. Перейдем к шагу 4.

4[1]. Вычислим

$$\alpha_1 = a_1 + (1-\lambda)\cdot(b_1 - a_1) = -0,23606,\ f(\alpha_1) = 0,986846,$$

$$\beta_1 = a_1 + \lambda\cdot(b_1 - a_1) = 0,23606,\ f(\beta_1) = 1,013154.$$

5[1]. Так как $f(\alpha_1) \le f(\beta_1)$, то

$$a_2 = a_1 = -1,$$
$$b_2 = \beta_1 = 0,23606,$$
$$\beta_2 = \alpha_1 = -0,23606,$$
$$\alpha_2 = a_2 + (1-\lambda)\cdot(b_2 - a_2) = -0,53032.$$

Положим $k = 2$ и перейдем к шагу 3.

3[2]. Проверим условие $b_2 - a_2 = 1,23606 > \varepsilon = 0,1$. Перейдем к шагу 4.

4[2]. Вычислим

$$f(\alpha_2) = 0,850853, f(\beta_2) = 0,986176.$$

5[2]. Так как $f(\alpha_2) \le f(\beta_2)$, то

$$a_3 = a_2 = -1,$$
$$b_3 = \beta_2 = -0,23606,$$
$$\beta_3 = \alpha_2 = -0,53032,$$
$$\alpha_3 = a_3 + (1-\lambda)\cdot(b_3 - a_3) = -0,7112.$$

Положим $k = 3$ и перейдем к шагу 3.

3[3]. Проверим условие $b_3 - a_3 = 0,76 > \varepsilon = 0,1$. Перейдем к шагу 4.

4[3]. Вычислим

$$f(\alpha_3) = 0,640271, f(\beta_3) = 0,850853.$$

5[3]. Так как $f(\alpha_3) \le f(\beta_3)$, то

$$a_4 = a_3 = -1,$$
$$b_4 = \beta_3 = -0,53032,$$
$$\beta_4 = \alpha_3 = -0,7112,$$
$$\alpha_4 = a_4 + (1-\lambda)\cdot(b_4 - a_4) = -0,8215.$$

Положим $k = 4$ и перейдем к шагу 3.

3[4]. Проверим условие $b_4 - a_4 = 0,46968 > \varepsilon = 0,1$. Перейдем к шагу 4

4[4]. Вычислим

$$f(\alpha_4) = 0,44556, f(\beta_4) = 0,640271.$$

5[4]. Так как $f(\alpha_4) \le f(\beta_4)$, то

$$a_5 = a_4 = -1,$$
$$b_5 = \beta_4 = -0,7112,$$
$$\beta_5 = \alpha_4 = -0,8215,$$
$$\alpha_5 = a_5 + (1-\lambda)\cdot(b_5 - a_5) = -0,890256.$$

Положим $k = 5$ и перейдем к шагу 3.

3[5]. Проверим условие $b_5 - a_5 = 0,2888 > \varepsilon = 0,1$. Перейдем к шагу 4.

4[5]. Вычислим

$$f(\alpha_5) = 0,29442, f(\beta_5) = 0,44556.$$

5[5]. Так как $f(\alpha_5) \le f(\beta_5)$, то

$$a_6 = a_5 = -1,$$
$$b_6 = \beta_5 = -0,8215,$$
$$\beta_6 = \alpha_5 = -0,890256,$$
$$\alpha_6 = a_6 + (1-\lambda)\cdot(b_6 - a_6) = -0,93218.$$

Положим $k = 6$ и перейдем к шагу 3.

3[6]. Проверим условие $b_6 - a_6 = 0,1785 > \varepsilon = 0,1$. Перейдем к шагу 4.

4[6]. Вычислим

$$f(\alpha_6) = 0,18998, f(\beta_6) = 0,29442.$$

5[6]. Так как $f(\alpha_6) \le f(\beta_6)$, то

$$a_7 = a_6 = -1,$$
$$b_7 = \beta_6 = -0,890256,$$
$$\beta_7 = \alpha_6 = -0,93218,$$
$$\alpha_7 = a_7 + (1-\lambda)\cdot(b_7 - a_7) = -0,9583.$$

Положим $k = 7$ и перейдем к шагу 3.

3[7]. Проверим условие $b_7 - a_7 = 0,109744 > \varepsilon = 0,1$. Перейдем к шагу 4.

4[7]. Вычислим

$$f(\alpha_7) = 0,11996, f(\beta_7) = 0,18998.$$

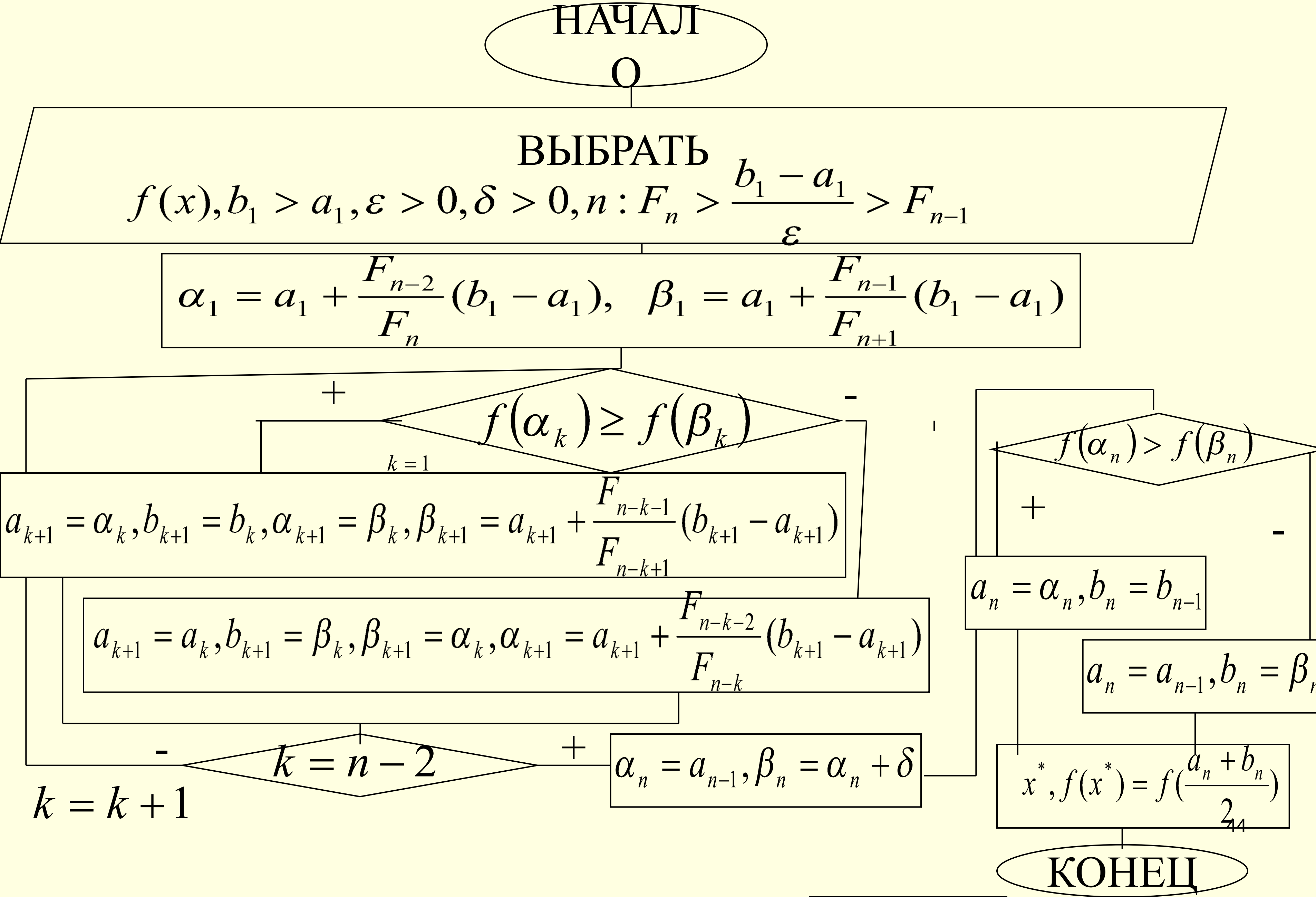
5[7]. Так как $f(\alpha_7) \le f(\beta_7)$, то

$$a_8 = a_7 = -1,$$
$$b_8 = \beta_7 = -0,93218,$$
$$\beta_8 = \alpha_7 = -0,9583,$$
$$\alpha_8 = a_8 + (1-\lambda)\cdot(b_8 - a_8) = -0,97423.$$

Положим $k = 8$ и перейдем к шагу 3.

3[8]. Проверим условие $b_8 - a_8 = 0,06782 < \varepsilon = 0,1$. Следовательно, $x^* = \frac{a_8 + b_8}{2} = -0,966089$, $f(x^*) = 0,0983218$.

Метод Фибоначчи

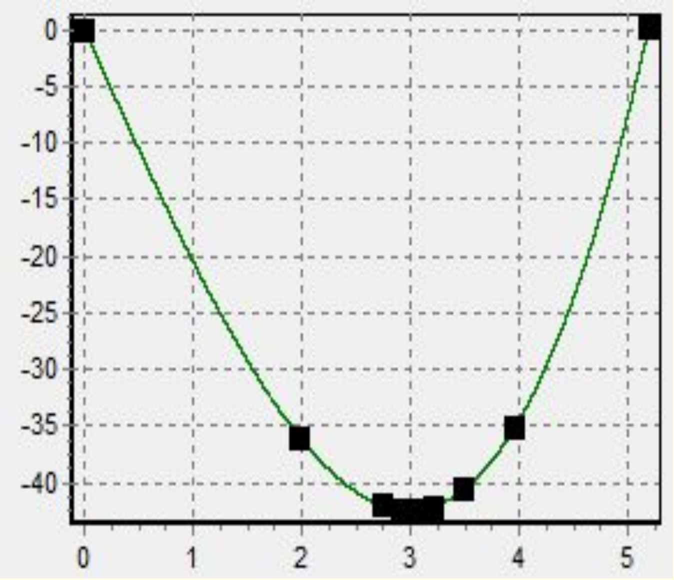


Метод Фибоначчи основан на последовательности Фибоначчи, которая определяется следующим образом: $F_{k+1} = F_{k-1} + F_k, \;\; k = 1,2,\ldots, \;\; F_0 = F_1 = 1$

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597...

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{10-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], \;\; где \;\; n = 1,2,\ldots$$

$$\boxed{V(h) = \frac{\pi}{4}(27h - h^3) \to \max, \;\; 0 < h < 3\sqrt{3}}$$



1 [0,5,2]
2 [1,98622320768662,5,2]
3 [1,98622320768662,3,97244652899663]
4 [2,74489298777015,3,97244652899663]
5 [2,74489298777015,3,50356281125395]
6 [2,74489298777015,3,21377673233568]
7 [2,92399063683997,3,21377673233568]
8 [2,92399063683997,3,1030882961552]
9 [2,92399063683997,3,03467907935246]
10 [2,96626985863631,3,03467907935246]
11 [2,96626985863631,3,00854908285127]
12 [2,9824190848553,3,00854908285127]
13 [2,99239985570846,3,00854908285127]
14 [2,99239985570846,3,00238062713257]
15 [2,99621217106099,3,00238062713257]
16 [2,99856831156195,3,00238062713257]

$$\boxed{\begin{aligned} x^* &\approx 2{,}999796 \\ f(x^*) &\approx 42{,}4115 \end{aligned}}$$

Метод Фибоначчи

НЕДОСТАТКИ 1) Надо хранить избыточный набор чисел Фибоначчи либо многократно генерировать числа по мере необходимости; необходимость предварительной оценки требуемого числа итераций;

2) Метод Фибоначчи нелегко приспособить к часто используемому критерию останова, требующему, чтобы значения функции на окончательном интервале неопределенности разнились на величину меньше заданной погрешности

ПРИМЕР

[illegible]

k	a_k	b_k	α_k	β_k	$f(\alpha_k)$	$f(\beta_k)$	$b_k - a_k$
1	–1	1	–0,2381	0,2381	0,9865	1,0135	2
2	–1	0,2381	–0,52381	–0,2381	0,85628	0,9865	1,2381
3	–1	–0,2381	–0,71429	–0,52381	0,63556	0,85628	0,7619
4	–1	–0,52381	–0,8095	–0,71429	0,469495	0,63556	0,47619
5	–1	–0,71429	–0,904763	–0,8095	0,259365	0,469495	0,28571
6	–1	–0,8095	–0,904762	–0,904763	0,259367	0,259365	0,1905
7	–1	–0,86476	–0,904762	–0,864762	0,259367	0,353319	0,095238

Последовательность Фибоначчи: $F_0 = F_1 = 1,\ F_i = F_{i-2} + F_{i-1},\ i \ge 2,\ i \in Z.$

0. Зададим начальный интервал неопределенности: $x \in [-1;1]$. Положим $\delta = 0,04,\ \varepsilon = 0,1.$

1. $F_n > \dfrac{b_1 - a_1}{\varepsilon} = 20 > F_{n-1} \Rightarrow n = 7$ – количество итераций. Положим $k = 1$.

2¹. Вычислим

$$\alpha_1 = a_1 + \frac{F_{n-2}}{F_n}\cdot(b_1 - a_1) = -0,2381,\ f(\alpha_1) = 0,9865,$$

$$\beta_1 = a_1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}\cdot(b_1 - a_1) = 0,2381,\ f(\beta_1) = 1,0135.$$

3¹. Так как $f(\alpha_1) < f(\beta_1)$, то

$$a_2 = a_1 = -1,$$
$$b_2 = \beta_1 = 0,2381,$$
$$\beta_2 = \alpha_1 = -0,2381,$$
$$\alpha_2 = a_2 + \frac{F_{n-k-2}}{F_{n-k}}\cdot(b_2 - a_2) = -0,52381.$$

4¹. Проверим $k \ne n-2 \Rightarrow k = 2$. Перейти к шагу 2.

2². Вычислим

$$f(\alpha_2) = 0,85628,\ f(\beta_2) = 0,9865.$$

3². Так как $f(\alpha_2) < f(\beta_2)$, то

$$a_3 = a_2 = -1,$$
$$b_3 = \beta_2 = -0,2381,$$
$$\beta_3 = \alpha_2 = -0,52381,$$
$$\alpha_3 = a_3 + \frac{F_{n-k-2}}{F_{n-k}}\cdot(b_3 - a_3) = -0,71429.$$

4². Проверим $k \ne n-2 \Rightarrow k = 3$. Перейти к шагу 2.

2³. Вычислим

$$f(\alpha_3) = 0,63556,\ f(\beta_3) = 0,85628.$$

3³. Так как $f(\alpha_3) < f(\beta_3)$, то

$$a_4 = a_3 = -1,$$
$$b_4 = \beta_3 = -0,52381,$$
$$\beta_4 = \alpha_3 = -0,71429,$$
$$\alpha_4 = a_4 + \frac{F_{n-k-2}}{F_{n-k}}\cdot(b_4 - a_4) = -0,809524.$$

4³. Проверим $k \ne n-2 \Rightarrow k = 4$. Перейти к шагу 2.

2⁴. Вычислим

$$f(\alpha_4) = 0,469495,\ f(\beta_4) = 0,63556.$$

3⁴. Так как $f(\alpha_4) < f(\beta_4)$, то

$$a_5 = a_4 = -1,$$
$$b_5 = \beta_4 = -0,71429,$$
$$\beta_5 = \alpha_4 = -0,809524,$$
$$\alpha_5 = a_5 + \frac{F_{n-k-2}}{F_{n-k}}\cdot(b_5 - a_5) = -0,904763.$$

4⁴. Проверим $k \ne n-2 \Rightarrow k = 5$. Перейти к шагу 2.

2⁵. Вычислим

$$f(\alpha_5) = 0,259365,\ f(\beta_5) = 0,469495.$$

3⁵. Так как $f(\alpha_5) < f(\beta_5)$, то

$$a_6 = a_5 = -1,$$
$$b_6 = \beta_5 = -0,809524,$$
$$\beta_6 = \alpha_5 = -0,904763,$$
$$\alpha_6 = a_6 + \frac{F_{n-k-2}}{F_{n-k}}\cdot(b_6 - a_6) = -0,90476$$

4⁵. Проверим $k \ne n-2 \Rightarrow k = 6$. Перейти к шагу 2.

2⁶. Вычислим

$$f(\alpha_6) = 0,259367,\ f(\beta_6) = 0,259365.$$

4⁶. Проверим $k = n-2$. Перейти к шагу 5.

5. Положим

$$\alpha_7 = \alpha_6 = -0,904762,\ f(\alpha_7) = 0,259367,$$
$$\beta_7 = \alpha_7 + \delta = -0,864762,\ f(\beta_7) = 0,353319.$$

6. Так как $f(\alpha_7) \le f(\beta_7)$, то

$$a_7 = a_6 = -1,$$
$$b_7 = \beta_7 = -0,864762.$$

Следовательно, $x^* = \dfrac{a_7 + b_7}{2} = -0,932381,\ f(x^*) = 0,189449.$

СХОДИМОСТЬ

Метод половинного деления

Характеристика относительного уменьшения начального интервала неопределенности находится по формуле
N – количество вычислений функции

$$R(N) = \frac{1}{2^{\frac{N}{2}}}$$

Метод золотого сечения

Характеристика относительного уменьшения начального интервала неопределенности находится по формуле
N – количество вычислений функции

$$R(N) = (0{,}618)^{N-1}$$

Метод Фибоначчи

Характеристика относительного уменьшения начального интервала неопределенности находится по формуле
N – количество вычислений функции

$$R(N) = \frac{1}{F_N}$$

Сходимость

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Метод Ньютона

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

$[a,b]$

$f(x) = 0$

Выберем начальную точку x_0

Замечание

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

$f''(x)$

x_0

$f''(x^*) > 0$

$f''(x_0) > 0$

x^*

Достаточное условие надежной работы метода Ньютона

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

$[a,b]$

Метод Ньютона

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевски

Сходимость

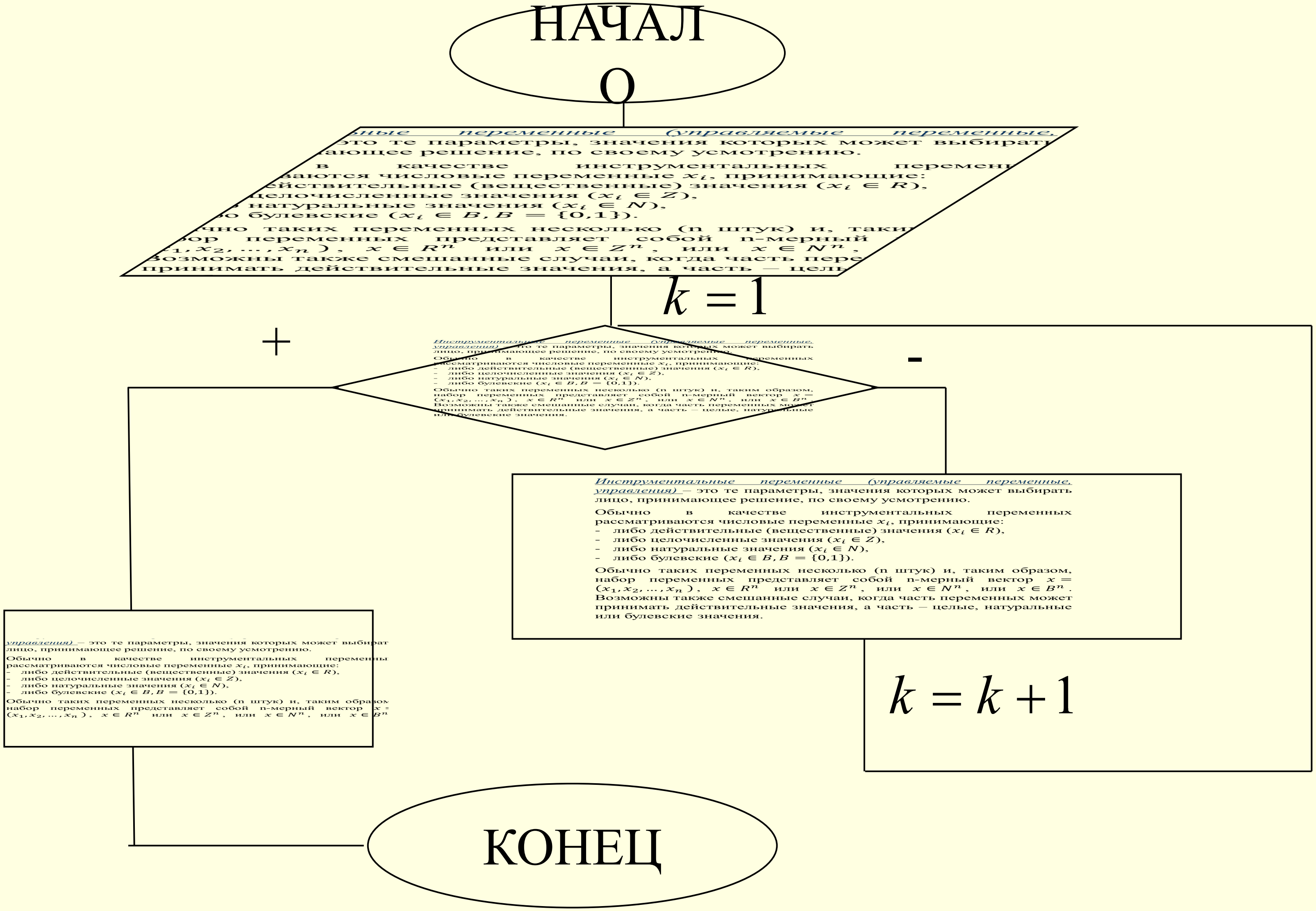
Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

Метод Ньютона



ПРИМЕР

k	x_k	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$
0	–1	–
1	–0,5	0,5
2	–0,25	0,25
3	–0,125	0,125
4	–0,0625	0,0625

Основная расчетная формула: $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f'(x_i)}{f''(x_i)}$.

0. Зададим начальный интервал неопределенности: $x \in [-1;1]$. Положим $\varepsilon = 0{,}1$. Вычислим $f'(x) = 3x^2, f''(x) = 6x, f'''(x) = 6$.

1. Так как $f'(a) = f'(-1) = 3, f'''(a) = f'''(-1) = 6$, то

$$f'(a)\cdot f'''(a) > 0 \Rightarrow x_0 = a = -1.$$

2^1. Вычислим $x_1 = x_0 - \dfrac{f'(x_0)}{f''(x_0)} = -0{,}5$.

3^1. Проверим условие выхода $\lvert x_1 - x_0\rvert = 0{,}5 > \varepsilon = 0{,}1$. Перейдем к шагу 2.

2^2. Вычислим $x_2 = x_1 - \dfrac{f'(x_1)}{f''(x_1)} = -0{,}25$.

3^2. Проверим условие выхода $\lvert x_2 - x_1\rvert = 0{,}25 > \varepsilon = 0{,}1$. Перейдем к шагу 2.

2^3. Вычислим $x_3 = x_2 - \dfrac{f'(x_2)}{f''(x_2)} = -0{,}125$.

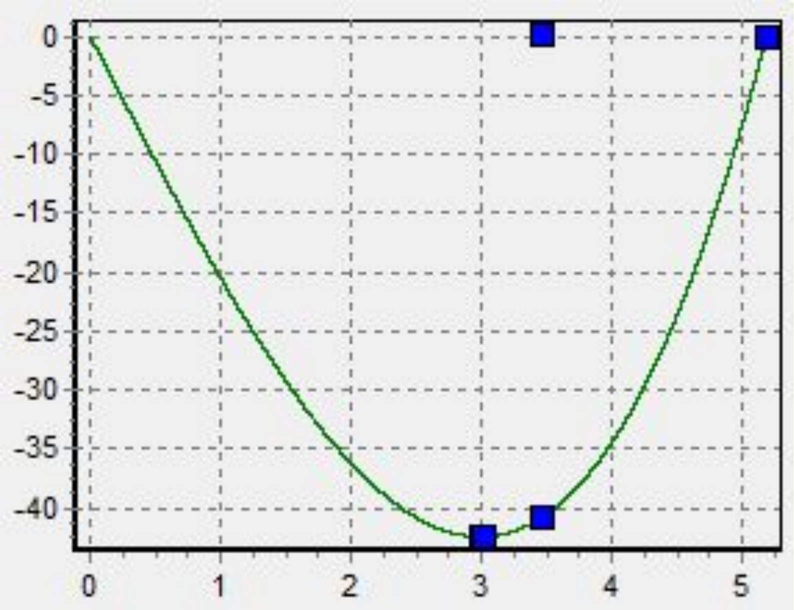
3^3. Проверим условие выхода $\lvert x_3 - x_2\rvert = 0{,}125 > \varepsilon = 0{,}1$. Перейдем к шагу 2.

2^4. Вычислим $x_4 = x_3 - \dfrac{f'(x_3)}{f''(x_3)} = -0{,}0625$.

3^4. Проверим условие выхода $\lvert x_4 - x_3\rvert = 0{,}0625 \le \varepsilon = 0{,}1$.

4. Следовательно, $x^* = \dfrac{x_3 + x_4}{2} = -0{,}09375$, $f(x^*) = 0{,}999176$.

$$V(h) = \frac{\pi}{4}(27h - h^3) \to \max, \ 0 < h < 3\sqrt{3}$$



1 [0,5,2]
2 [3,03124946640485,3,46538461538462]
3 [3,00016107700165,3,03124946640485]
4 [3,00000000432407,3,00016107700165]

$$x^* \approx 3{,}000161$$

$$f(x^*) \approx 42{,}4115$$

Программная реализация

$$V(h) = -\frac{\pi}{4}(27h - h^3) \to \min,\ \ 0 < h < 3\sqrt{3}$$

Метод половинного деления

9 [2,98582265625,3,006334375]
10
[2,995978515625,3,006334375]
11
[2,995978515625,3,00125644531
25]
12
[2,99851748046875,3,001256445
3125]
13
[2,99978696289063,3,001256445
3125]

Метод "золотого сечения"

15
[2,99621219914295,3,002380653
84909]
16
[2,99856833918263,3,002380653
84909]
17
[2,99856833918263,3,000924479
22231]
18
[2,99946830459553,3,000924479
22231]

Метод Фибоначчи

13
[2,99239985570846,3,008549082
85127]
14
[2,99239985570846,3,002380627
13257]
15
[2,99621217106099,3,002380627
13257]
16
[2,99856831156195,3,002380627
13257]

Метод Ньютона

1 [0,5,2]
2
[3,03124946640485,3,465384615
38462]
3
[3,00016107700165,3,031249466
40485]
4
[3,00000000432407,3,000161077
00165]

	Отрезок	Число итера	x*	f(x*)
Метод полоі	[2,99978696:	14	3,000204333	-42,4115005:
Метод "золс	[2,99946830	19	2,999918287	-42,4115007
Метод Фибс	[2,99856831	17	2,999796399	-42,4115005:
Метод Ньют	[3,00016107	4	3,000161077	-42,4115006

Отрезок
0 | 5,2

E 0,001

d 0,0001

Метод половинного деления

Метод "золотого сечения"

Метод Фибоначчи

Метод Ньютона

Вывод

$$V(h) = -\frac{\pi}{4}(27h - h^3) \to \min, \ \ 0 < h < 3\sqrt{3}$$

	отрезок	число итераций	h	V(h)
Метод половинного деления	[2,99978696289063,3,0012564453125]	13	3,000204	42,4115
Метод золотого сечения	[2,99946830459553,3,00092447922231]	18	2,999918	42,4115
Метод Фибоначчи	[2,99856831156195,3,00238062713257]	16	2,999796	42,4115
Метод Ньютона	[3,00000000432407,3,00016107700165]	4	3,000161	42,4115

Точное решение $h = 3, \ \ V(h) = \dfrac{27\pi}{2}$

Работа: «Методы одномерного поиска»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ Ознакомиться с методами одномерного поиска. Сравнить различные алгоритмы по эффективности на тестовых примерах.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

управления) — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.
Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
– либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
– либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
– либо натуральные значения ($x_i \in N$),
– либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).
Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$.
Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может

ВАРИАНТЫ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

1. $f(x)=\sin(x)$, $x\in[-\pi/2,\pi/2]$	2. $f(x)=\cos(x)$, $x\in[0,\pi]$.
3. $f(x)=(x-2)^2$, $x\in[-2,20]$	4. $f(x)=(x-15)^2+5$, $x\in[2,200]$
5. $f(x)=(x+5)^4$, $x\in[-10,15]$	6. $f(x)=e^x$, $x\in[0,100]$
7. $f(x)=x^2+2x-4$, $x\in[-10,20]$	8. $f(x)=x^3-x$, $x\in[0,1]$
9. $f(x)=x^5-x^2$, $x\in[0,1]$	10. $f(x)=-x/e^x$, $x\in[0,3]$
11. $f(x)=x^4-x$, $x\in[0,1]$	12. $f(x)=x^4/\ln x$, $x\in[1.1,1.5]$
13. $f(x)=xe^{-x}$, $x\in[-2,6]$	14. $f(x)=xe^{-2x}$, $x\in[-2,6]$

СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

- титульный лист; цель работы; задание;
- таблицы с результатами исследований по каждому методу, где должны быть отражены границы и длины интервалов на каждой итерации; соотношение длины интервала на k +1 итерации к длине интервала на k итерации;
- график зависимости количества вычислений целевой функции от логарифма задаваемой точности; - выводы по всем пунктам задания.

Вопросы для проверки знаний

- Определения отрезка, выпуклого множества, выпуклой (строго выпуклой) функции, квазивыпуклой (строго квазивыпуклой) функции, унимодальной функции.
- Прямые методы минимизации функций одной переменной. Теорема о сокращении интервала неопределённости.
- Метод половинного деления для решения задач минимизации функции одной переменной: идея метода, геометрическая интерпретация, алгоритм, пример.
- Метод золотого сечения для решения задач минимизации функции одной переменной: идея метода, геометрическая интерпретация, алгоритм, пример.
- Метод Фибоначчи для решения задач минимизации функции одной переменной: идея метода, геометрическая интерпретация, алгоритм, пример.
- Метод Ньютона для решения задач минимизации функции одной переменной: идея метода, геометрическая интерпретация, алгоритм, пример.

Примеры тестовых заданий для проверки знаний

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Примеры тестовых заданий для проверки знаний

4) В ряде чисел Фибоначчи каждое последующее число равно _____ двух предыдущих

A. частному; B. разности; C. сумме; D. произведению.

5) Итерационный процесс в методе Ньютона описывается формулой:

A. $x^{k+1} = x^k - \dfrac{f(x^k)}{2f'(x^k)}$; B. $x^{k+1} = x^k + 2\dfrac{f(x^k)}{f'(x^k)}$; C. $x^{k+1} = x^k - \dfrac{f'(x^k)}{f''(x^k)}$; D. $x^{k+1} = x^k + \dfrac{f'(x^k)}{f''(x^k)}$.

6) Укажите соответствие между прямыми методами решения задач поиска экстремума и их определением:

Метод золотого сечения	метод поиска экстремума путем последовательного деления отрезка пополам
Метод Фибоначчи	метод, основанный на делении отрезка на две неравные части так, что отношение всего отрезка к большей части равно отношению большей части к меньшей
Метод половинного деления	метод, заключающийся в том, что каждая последующая точка выбирается симметрично по отношению к точке, которая осталась от предыдущего эксперимента и попала в оставшийся интервал

7) К прямым методам нахождения минимума функции одной переменной не относят:

A. метод половинного деления; B. метод золотого сечения; C. метод Фибоначчи;

D. метод Ньютона

Методы безусловной минимизации функций многих переменных

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть — целые, натуральные

Определение

Методы получения точек, соответствующих условию (2), называются методами спуска.

Определение

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть — целые, натуральные

Методы минимизации функций многих переменных

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.
Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
– либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
– либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
– либо натуральные значения ($x_i \in N$),
– либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).
Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Методы безусловной минимизации функций многих переменных

Определение

Поверхностью уровня функции f(x) называется множество точек, в которых функция принимает постоянное значение,
то есть f(x)=const

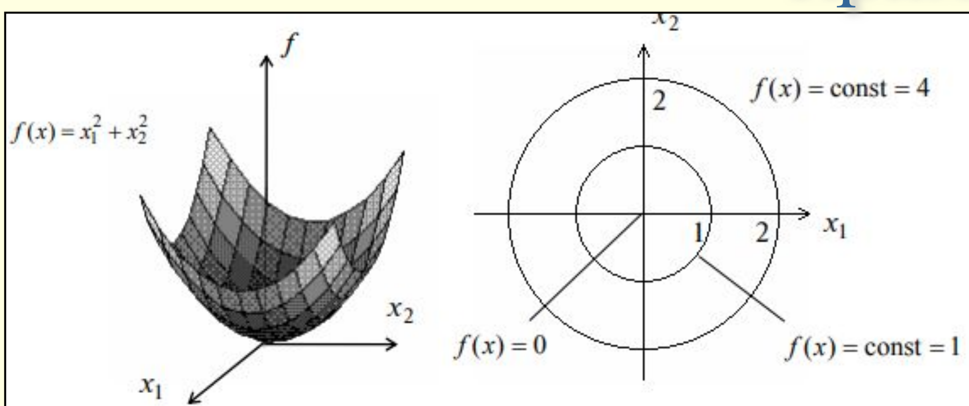
... переменные (управляемые переменные, ...) — ... параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

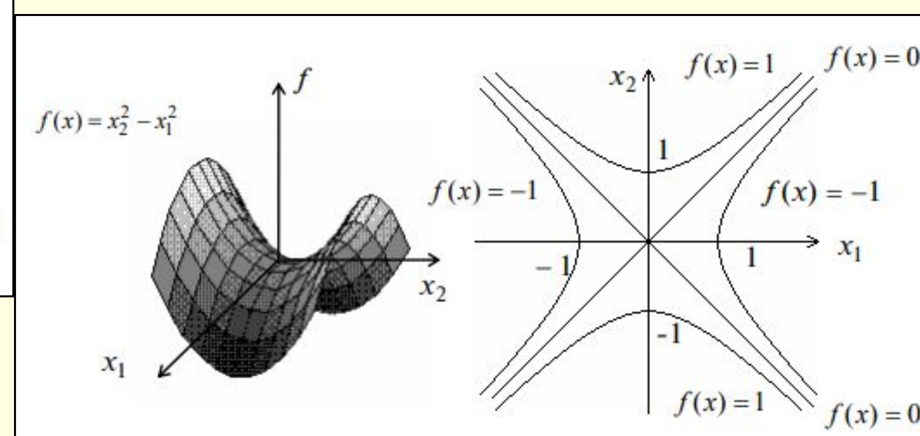
Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может

Примеры





Необходимое условие оптимальности для дифференцируемых функций

Пусть задано пространство E^n и $X \subset E^n$ некоторое множество.

Определение

Функция f(x) называется x_0 дифференцируемой в точке $\mathbf{x}_0 \in X$, если существует такой вектор $\nabla f(x_0)$, что для любого x в окрестности справедливо асимптотическое равенство:

$$f(x) = f(x_0) + \left(\nabla f(x_0), x - x_0\right) + o(\|x - x_0\|)$$

$\left(\nabla f(x_0), x - x_0\right)$- скалярное произведение векторов по правилу $(x, y) = \sum_i x_i y_i$;

$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ - евклидова норма вектора;

$o(\alpha)$ - величина бесконечно малая по сравнению с α

Определение

Вектор $\nabla f(x_0)$ называется градиентом функции f(x) в точке x_0 и для $x \in R^n$

$$\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n} \right)$$

Утверждение

Оптимальное решение x^*, минимизирующее дифференцируемую функцию f(x) на множестве X, находится либо на границе $\overline{X}$ множества X, либо на множестве решений уравнения $\nabla \mathbf{f(x)} = 0$

Если f(x) дифференцируема, то направлением наибыстрейшего убывания функции f(x) в точке x^k является направление антиградиента $-\nabla f(x^k)$

Определение

Матрицей Гессе H(x) дважды непрерывно дифференцируемой в точке x функции f(x) называется матрица частных производных второго порядка, вычисленных в данной точке

$$H(x)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Пример

Для функции $f(x)=x_1^2+x_2^4$ вычислить градиент и найти матрицу Гессе в точках $x^0=(0,0)^T$, $x^1=(1,1)^T$.

$$\nabla f(x)=\left(2x_1,4x_2^3\right)^T, H(x)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12x_2^2 \end{pmatrix}; \quad \nabla f(x^0)=(0,0)^T, H(x^0)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\nabla f(x^1)=(2,4)^T, H(x^1)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

Определение

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Методы безусловной минимизации функций многих переменных

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

В различных вариантах методов спуска используются разные способы выбора скаляра λ (метод с постоянным шагом, с дроблением шага, метод наискорейшего спуска)

Метод покоординатного спуска (конфигураций или Хука-Дживса)

Метод конфигураций включает два основных этапа:

)Поиск вокруг базисной точки (исследующий поиск);

)Поиск в направлении, выбранном для оптимизации (поиск по образцу)

Метод покоординатного спуска

Основная идея метода покоординатного спуска

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

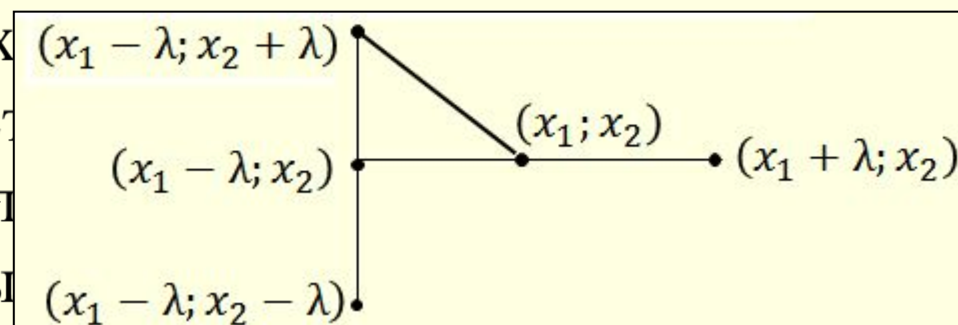
Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Метод покоординатного спуска

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных … разом, набор переменных предст… $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ ил… $\in B^n$. Возможны также смешанны… может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.



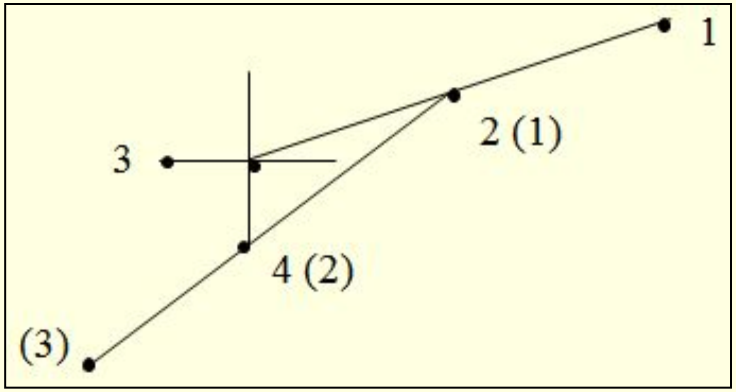
Метод покоординатного спуска

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Иллюстрация для двух координат



Алгоритм метода покоординатного спуска

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Шаги 1 и 2 алгоритма метода покоординатного спуска осуществляют пробный поиск, а шаг 3 является ускоряющим шагом по направлению $x_{k+1} - x_k$. На шаге 4 длина шага сокращается.

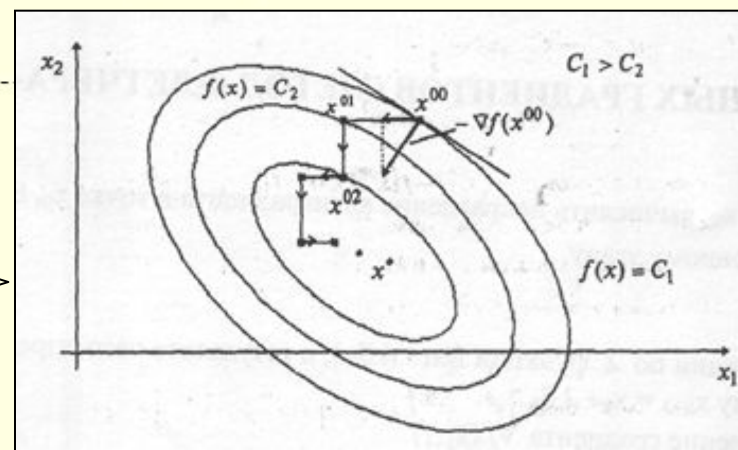
Метод покоординатного спуска обладает следующими преимуществами перед градиентными методами:

1) он не требует задания целевой функции в явном виде, что является существенным достоинством при решении сложных экономических и технических задач;

2) метод позволяет легко учитывать ограничения, накладываемые на переменные, а также на допустимую область поиска.

Недостатком метода покоординатного спуска является то, что он может останавливаться вблизи локального минимума, не в состоянии обеспечить дальнейшее улучшение.

Геометрическая интерпретация



ПРИМЕР

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.
Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
– либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$);
– либо целочисленные значения ($x_i \in Z$);
– либо натуральные значения ($x_i \in N$);
– либо булевские ($x_i \in B, B = \{0, 1\}$).
Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$.
Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может

1. Зададим $\varepsilon = 0{,}1$, $x^1 = (2;-4)^T$, $\lambda = 1$, $\alpha = 1$, $n = 2$. Положим $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $k = j = 1$.

2^{11}. Вычислим

$$Y_1 = x^1 = (2;-4)^T,\ f(Y_1) = 2,$$
$$Y_1 + \lambda e_1 = (3;-4)^T,\ f(Y_1 + \lambda e_1) = 1.$$

3^{11}. Так как $f(Y_1 + \lambda e_1) < f(Y_1)$, то $Y_2 = Y_1 + \lambda e_1 = (3;-4)^T$.

4^{11}. Так как $j = 1 < n = 2$, то $j = 2$. Перейти к шагу 2.

2^{12}. Вычислим

$$Y_2 + \lambda e_2 = (3;-3)^T,\ f(Y_2 + \lambda e_2) = 4.$$

3^{12}. Так как $f(Y_2 + \lambda e_2) > f(Y_2)$, то $Y_2 - \lambda e_2 = (3;-5)^T$, $f(Y_2 - \lambda e_2) = 0$. Так как $f(Y_2 - \lambda e_2) < f(Y_2)$, то $Y_3 = Y_2 - \lambda e_2 = (3;-5)^T$.

4^{12}. Так как $j = n = 2$ и $f(Y_3) < f(x^1)$, то переход к шагу 5.

5^{12}. Положим $x^3 = Y_3 = (3;-5)^T$, $Y_1 = x^2 + \alpha(x^2 - x^1) = (4;-6)^T$. Примем $k = 2$, $j = 1$. Переход к шагу 2.

2^{21}. Вычислим

$$Y_1 = (4;-6)^T,\ f(Y_1) = 2,$$
$$Y_1 + \lambda e_1 = (5;-6)^T,\ f(Y_1 + \lambda e_1) = 5.$$

3^{21}. Так как $f(Y_1 + \lambda e_1) > f(Y_1)$, то $Y_1 - \lambda e_1 = (3;-6)^T$, $f(Y_1 - \lambda e_1) = 1$. Так как $f(Y_1 - \lambda e_1) < f(Y_1)$, то $Y_2 = Y_1 - \lambda e_1 = (3;-6)^T$.

4^{21}. Так как $j = 1 < n = 2$, то $j = 2$. Перейти к шагу 2.

2^{22}. Вычислим

$$Y_2 + \lambda e_2 = (3;-5)^T,\ f(Y_2 + \lambda e_2) = 0.$$

3^{22}. Так как $f(Y_2 + \lambda e_2) < f(Y_2)$, то $Y_3 = Y_2 + \lambda e_2 = (3;-5)^T$.

4^{22}. Так как $j = n = 2$ и $f(Y_3) = f(x^2)$, то переход к шагу 6.

6^{22}. Поскольку $\lambda = 1 > \varepsilon = 0{,}1$, то положим $\lambda = \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{2}$, $Y_1 = x^2 = (3;-5)^T$, $x^3 = x^2 = (3;-5)^T$. Примем $k = 3$, $j = 1$. Переход к шагу 2.

2^{31}. Вычислим

$$Y_1 = (3;-5)^T,\ f(Y_1) = 0,$$
$$Y_1 + \lambda e_1 = (3{,}5;-5)^T,\ f(Y_1 + \lambda e_1) = \frac{1}{4}.$$

3^{31}. Так как $f(Y_1 + \lambda e_1) > f(Y_1)$, то $Y_1 - \lambda e_1 = (2{,}5;-5)^T$, $f(Y_1 - \lambda e_1) = \frac{1}{4}$. Так как $f(Y_1 - \lambda e_1) > f(Y_1)$, то $Y_2 = Y_1 = (3;-5)^T$.

4^{31}. Так как $j = 1 < n = 2$, то $j = 2$. Перейти к шагу 2.

2^{32}. Вычислим

$$Y_2 + \lambda e_2 = (3;-4{,}5)^T,\ f(Y_2 + \lambda e_2) = \frac{1}{4}.$$

3^{32}. Так как $f(Y_2 + \lambda e_2) > f(Y_2)$, то $Y_2 - \lambda e_2 = (3;-5{,}5)^T$, $f(Y_2 - \lambda e_2) = \frac{1}{4}$. Так как $f(Y_2 - \lambda e_2) > f(Y_2)$, то $Y_3 = Y_2 = (3;-5)^T$.

4^{32}. Так как $j = n = 2$ и $f(Y_3) = f(x^3)$, то переход к шагу 6.

6^{32}. Поскольку $\lambda = \frac{1}{2} > \varepsilon = 0{,}1$, то положим $\lambda = \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{4}$, $Y_1 = x^3 = (3;-5)^T$, $x^4 = x^3 = (3;-5)^T$. Примем $k = 4$, $j = 1$. Переход к шагу 2.

2^{41}. Вычислим

$$Y_1 = (3;-5)^T,\ f(Y_1) = 0,$$
$$Y_1 + \lambda e_1 = (3{,}25;-5)^T,\ f(Y_1 + \lambda e_1) = \frac{1}{16}.$$

3^{41}. Так как $f(Y_1 + \lambda e_1) > f(Y_1)$, то $Y_1 - \lambda e_1 = (2{,}75;-5)^T$, $f(Y_1 - \lambda e_1) = \frac{1}{16}$. Так как $f(Y_1 - \lambda e_1) > f(Y_1)$, то $Y_2 = Y_1 = (3;-5)^T$.

4^{41}. Так как $j = 1 < n = 2$, то $j = 2$. Перейти к шагу 2.

2^{42}. Вычислим

$$Y_2 + \lambda e_2 = (3;-4{,}75)^T,\ f(Y_2 + \lambda e_2) = \frac{1}{16}.$$

3^{42}. Так как $f(Y_2 + \lambda e_2) > f(Y_2)$, то $Y_2 - \lambda e_2 = (3;-5{,}25)^T$, $f(Y_2 - \lambda e_2) = \frac{1}{16}$. Так как $f(Y_2 - \lambda e_2) > f(Y_2)$, то $Y_3 = Y_2 = (3;-5)^T$.

4^{42}. Так как $j = n = 2$ и $f(Y_3) = f(x^4)$, то переход к шагу 6.

6^{42}. Поскольку $\lambda = 0{,}25 > \varepsilon = 0{,}1$, то положим $\lambda = \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{8}$, $Y_1 = x^4 = (3;-5)^T$, $x^5 = x^4 = (3;-5)^T$. Примем $k = 5$, $j = 1$. Переход к шагу 2.

2^{51}. Вычислим

$$Y_1 = (3;-5)^T,\ f(Y_1) = 0,$$
$$Y_1 + \lambda e_1 = (3{,}125;-5)^T,\ f(Y_1 + \lambda e_1) = \frac{1}{64}.$$

3^{51}. Так как $f(Y_1+\lambda e_1)>f(Y_1)$, то $Y_1-\lambda e_1=(2{,}875;-5)^T$, $f(Y_1-\lambda e_1)=\frac{1}{64}$. Так как $f(Y_1-\lambda e_1)>f(Y_1)$, то $Y_2=Y_1=(3;-5)^T$.

4^{51}. Так как $j=1<n=2$, то $j=2$. Перейти к шагу 2.

2^{52}. Вычислим

$$Y_2+\lambda e_2=(3;-4{,}875)^T,\ f(Y_2+\lambda e_2)=\frac{1}{64}.$$

3^{52}. Так как $f(Y_2+\lambda e_2)>f(Y_2)$, то $Y_2-\lambda e_2=(3;-5{,}125)^T$, $f(Y_2-\lambda e_2)=\frac{1}{64}$. Так как $f(Y_2-\lambda e_2)>f(Y_2)$, то $Y_3=Y_2=(3;-5)^T$.

4^{52}. Так как $j=n=2$ и $f(Y_3)=f(x^5)$, то переход к шагу 6.

6^{52}. Поскольку $\lambda=0{,}125>\varepsilon=0{,}1$, то положим $\lambda=\frac{\lambda}{2}=\frac{1}{16}$, $Y_1=x^5=(3;-5)^T$, $x^6=x^5=(3;-5)^T$. Примем $k=6, j=1$. Переход к шагу 2.

2^{61}. Вычислим

$$Y_1=(3;-5)^T,\ f(Y_1)=0,$$

$$Y_1+\lambda e_1=(3{,}0625;-5)^T,\ f(Y_1+\lambda e_1)=\frac{1}{256}.$$

3^{61}. Так как $f(Y_1+\lambda e_1)>f(Y_1)$, то $Y_1-\lambda e_1=(2{,}9375;-5)^T$, $f(Y_1-\lambda e_1)=\frac{1}{256}$. Так как $f(Y_1-\lambda e_1)>f(Y_1)$, то $Y_2=Y_1=(3;-5)^T$.

4^{61}. Так как $j=1<n=2$, то $j=2$. Перейти к шагу 2.

2^{62}. Вычислим

$$Y_2+\lambda e_2=(3;-4{,}9375)^T,\ f(Y_2+\lambda e_2)=\frac{1}{256}.$$

3^{62}. Так как $f(Y_2+\lambda e_2)>f(Y_2)$, то $Y_2-\lambda e_2=(3;-5{,}0625)^T$, $f(Y_2-\lambda e_2)=\frac{1}{256}$. Так как $f(Y_2-\lambda e_2)>f(Y_2)$, то $Y_3=Y_2=(3;-5)^T$.

4^{62}. Так как $j=n=2$ и $f(Y_3)=f(x^6)$, то переход к шагу 6.

6^{62}. Поскольку $\lambda=0{,}0625<\varepsilon=0{,}1$, то $x^*=x^5=(3;\ -5)^T$, $f(x^*)=0$.

Метод наискорейшего спуска

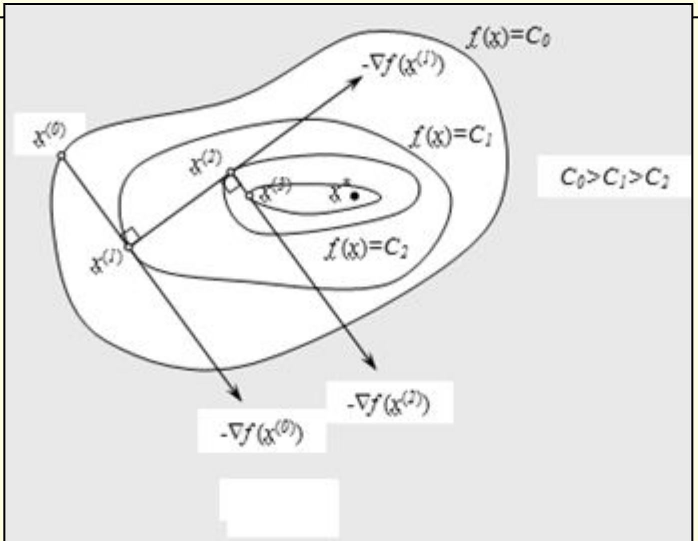
Идея метода наискорейшего спуска

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

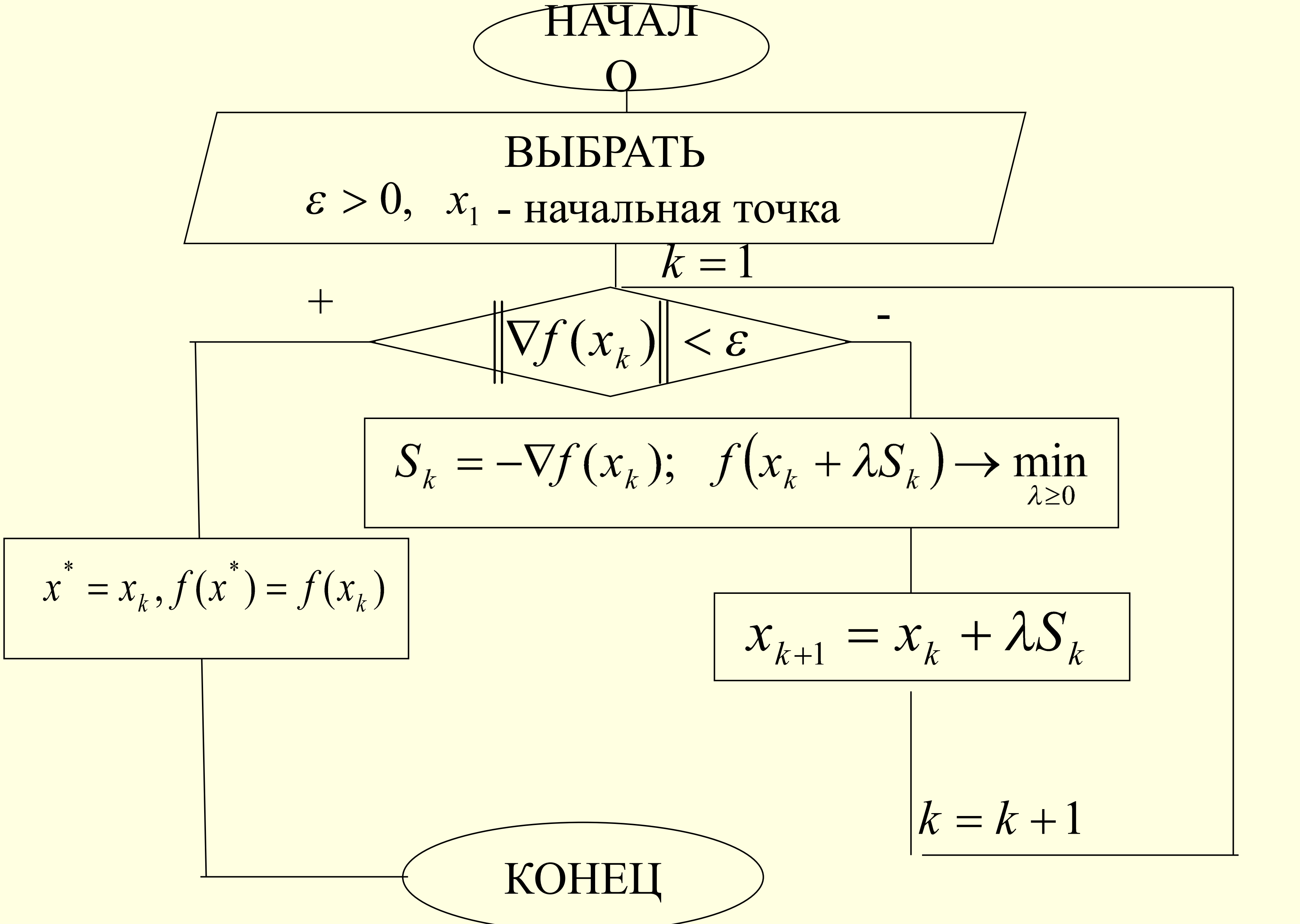
Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Геометрическая интерпретация



Метод наискорейшего спуска



Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Метод наискорейшего спуска

Замечания:

Метод наискорейшего спуска сходится достаточно быстро, если для минимизирующей функции поверхности уровня близки к сферам. Однако, если поверхности уровня минимизирующей функции сильно вытянуты в некотором направлении, то метод сходится, но может застревать в локальном минимуме.

В двумерном случае рельеф поверхности напоминает рельеф местности с оврагом. Поэтому такие функции называются «овражными». Вдоль направления, характеризующего дно оврага «овражная» функция меняется незначительно, а в других направлениях, характеризующих склон оврага происходит резкое изменение функции. Если начальная точка попадает на склон оврага, то направление градиентного спуска оказывается перпендикулярным к дну оврага и очередное приближение попадает на противоположный склон оврага. В результате, вместо того, чтобы двигаться вдоль дна оврага в направлении к точке минимума, траектория спуска совершает зигзагообразные скачки поперек оврага, почти не приближаясь к точке минимума.

ПРИМЕР

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.
Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может

1. Зададим $\varepsilon = 0{,}1$, $x^0 = (-3;5)^T$. Найдем градиент функции в произвольной точке $\nabla f(x) = \left(2(x_1 - 3);\ 2(x_2 + 5)\right)^T$.

2. Вычислим значение функции в начальной точке $f(x^0) = 136$.

3. В качестве направления поиска выберем вектор градиент в текущей точке $\nabla f(x^0) = (-12;\ 20)^T$.

4. Проверим критерий выхода $\|\nabla f(x^0)\| \le \varepsilon$: $\|\nabla f(x^0)\| = 23{,}324 > \varepsilon = 0{,}1$.

5. Сделаем шаг вдоль направления антиградиента:

$$x^1 = x^0 - \lambda_1 \cdot \nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} - \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12\lambda_1 - 3 \\ 5 - 20\lambda_1 \end{pmatrix}.$$

6. Вычислим значение функции в новой точке: $f(x^1) = 136 \cdot (2\lambda_1 - 1)^2$.

7. Найдем такой шаг, чтобы целевая функция достигала минимума вдоль этого направления. Из необходимых условий существования экстремума функции $f'(x) = 0$ следует, что $\lambda_1 = \frac{1}{2}$. Тогда имеем: $x^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

8. Вектор градиент в текущей точке $\nabla f(x^1) = (0;\ 0)^T$.

9. Проверим критерий выхода $\|\nabla f(x^1)\| \le \varepsilon$: $\|\nabla f(x^1)\| = 0 < \varepsilon = 0{,}1$.

Следовательно, $x^* = (3;\ -5)^T$, $f(x^*) = 0$.

Метод сопряженных градиентов

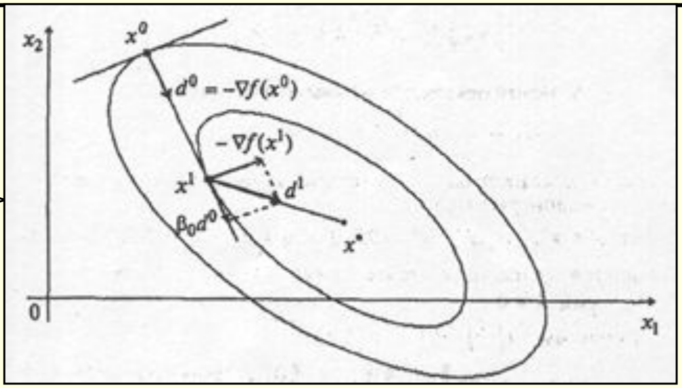
Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Геометрическая интерпретация



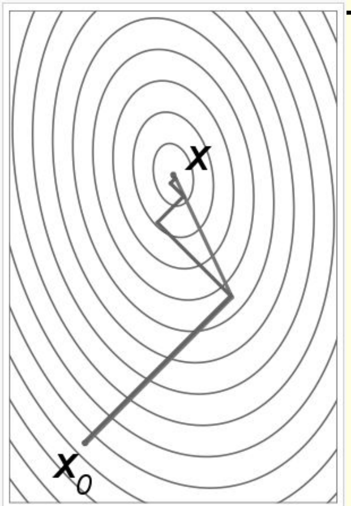


Иллюстрация последовательных приближений метода наискорейшего спуска и метода сопряжённых градиентов к точке экстремума.

Обоснование метода сопряженных градиентов

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Определение

Нулевая итерация

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

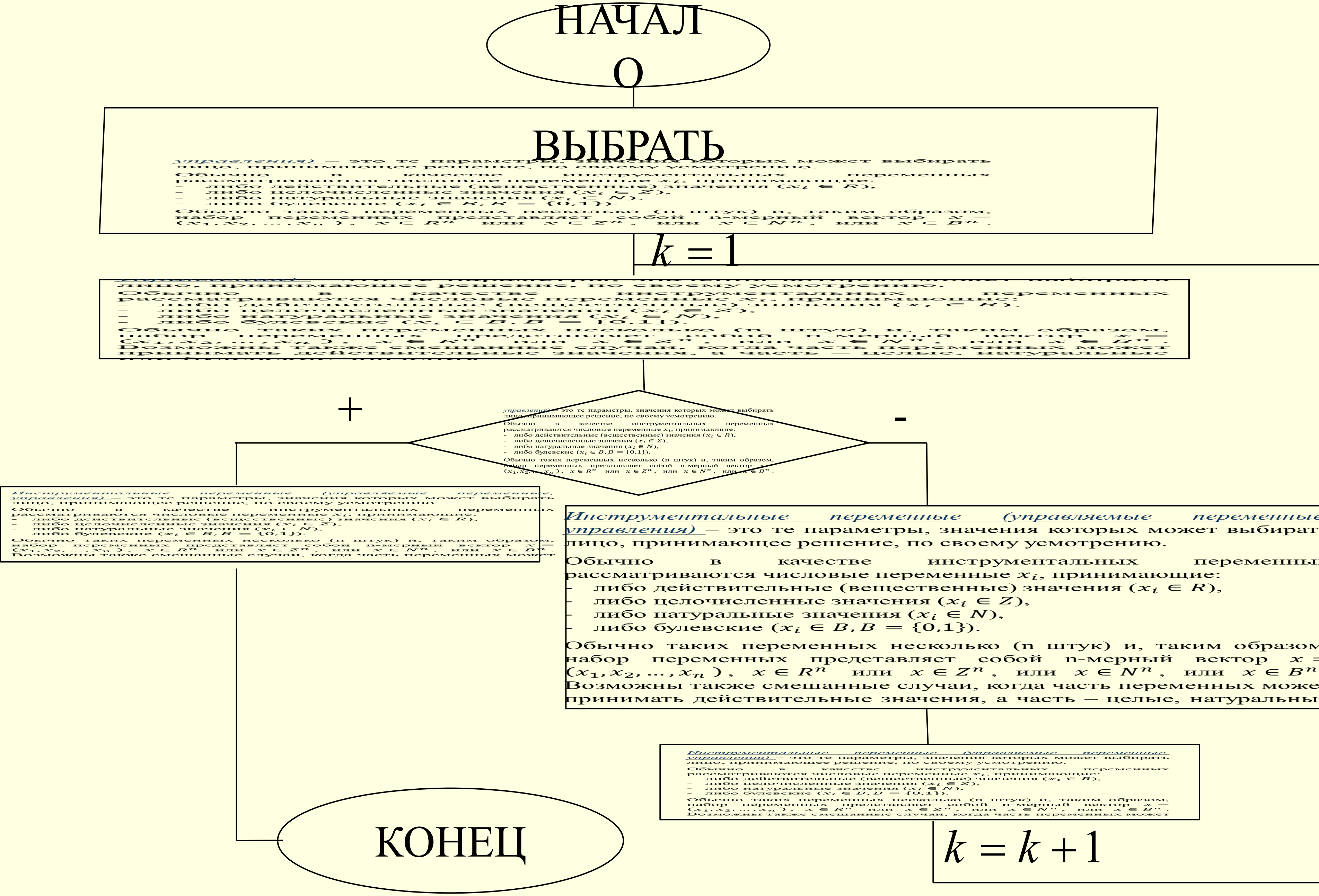
Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Метод сопряженных градиентов



Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Замечание: Если требуется найти глобальный минимум функции f(x), То для строго выпуклой f(x) Решение этой задачи аналогично поиску локального минимума функции. В случае, когда f(x) имеет несколько локальных минимумов, поиск глобального минимума осуществляется в результате перебора всех локальных минимумов.

ПРИМЕР

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.
Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может

1. Зададим $\varepsilon = 0{,}1$, $x^0 = (-3;5)^T$. Найдем градиент функции в произвольной точке $\nabla f(x) = \big(2(x_1 - 3);\ 2(x_2 + 5)\big)^T$.

2. Вектор градиент в текущей точке $\nabla f(x^0) = (-12;\ 20)^T$.

3. Проверим критерий выхода $\|\nabla f(x^0)\| \le \varepsilon$: $\|\nabla f(x^0)\| = 23{,}324 > \varepsilon = 0{,}1$.

4. Вычислим новую точку:

$$x^1 = x^0 - \lambda_1 \cdot \nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} - \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12\lambda_1 - 3 \\ 5 - 20\lambda_1 \end{pmatrix}.$$

5. Вычислим значение функции в новой точке: $f(x^1) = 136 \cdot (2\lambda_1 - 1)^2$.

6. Найдем такой шаг, чтобы целевая функция достигала минимума вдоль этого направления. Из необходимых условий существования экстремума функции $f'(x) = 0$ следует, что $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}$. Тогда имеем: $x^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

7. Вектор градиент в текущей точке $\nabla f(x^1) = (0;\ 0)^T$.

8. Проверим критерий выхода $\|\nabla f(x^1)\| \le \varepsilon$: $\|\nabla f(x^1)\| = 0 < \varepsilon = 0{,}1$.

Следовательно, $x^* = (3;\ -5)^T$, $f(x^*) = 0$.

Метод Ньютона

Метод Ньютона относится к градиентным методам второго порядка, в котором направление минимизации выбирается умножением вектора антиградиента на матрицу, обратную матрице Гессе.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Метод Ньютона

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Алгоритм метода Ньютона

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Алгоритм метода Ньютона

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

ПРИМЕР

1. Зададим $\varepsilon_1 = 0{,}1,\ \varepsilon_2 = 0{,}1,\ x^0 = (-3;5)^T,\ M = 10$. Найдем градиент функции в произвольной точке $\nabla f(x) = \left(2(x_1 - 3);\ 2(x_2 + 5)\right)^T$ и матрицу Гессе

$$H(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Положим $k = 0$.

3^0. Вычислим $\nabla f(x^0)$: $\nabla f(x^0) = (-12;\ 20)^T$.

4^0. Проверим выполнение условия выхода:

$$\left\|\nabla f(x^0)\right\| \le \varepsilon_1:\ \left\|\nabla f(x^0)\right\| = 23{,}324 > \varepsilon = 0{,}1.$$

Переходим к шагу 5.

5^0. Проверим условие $k \ge M$: $k = 0 < 10$. Переходим к шагу 6.

6^0. Вычислим $H(x^0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ H^{-1}(x^0) = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

7^0. Проверим выполнение условия $H^{-1}(x^0) > 0$. Так как $\Delta_1 = 0{,}5 > 0$, $\Delta_2 = 0{,}25 > 0$, то согласно критерию Сильвестра $H^{-1}(x^0) > 0$.

8^0. Определим $d_0 = -H^{-1}(x^0) \cdot \nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 0 \\ 0 & -0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix}$.

9^0. Вычислим $x^1 = x^0 + t_0 d_0\ (t_0 = 1)$: $x^1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

10^0. Проверим выполнение условия:

$$\left\|x^1 - x^0\right\| < \varepsilon_2:\ \left\|x^1 - x^0\right\| = 11{,}6619 > \varepsilon_2 = 0{,}1.$$

Полагаем $k = 1$, переходим к шагу 3.

3^1. Вычислим $\nabla f(x^1)$: $\nabla f(x^1) = (0;\ 0)^T$.

4^1. Проверим выполнение условия выхода:

$$\left\|\nabla f(x^1)\right\| \le \varepsilon_1:\ \left\|\nabla f(x^1)\right\| = 0 < \varepsilon = 0{,}1.$$

Следовательно, $x^* = (3;\ -5)^T,\ f(x^*) = 0$.

Работа: «Методы многомерного поиска»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ Ознакомиться с методами могомерного поиска. Сравнить различные алгоритмы по эффективности на тестовых примерах.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть — целые, натуральные

ВАРИАНТЫ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

1) $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1 + 2x_2, \quad x^0 = (1,0)$

2) $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - 12x_1, \quad x^0 = (5,3)$

3) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 4x_2, \quad x^0 = (5,10)$

4) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2, \quad x^0 = (4,5)$

5) $f(x) = x_1^2 + 4x_2^2 - 6x_1 - 32x_2, \quad x^0 = (0,0)$

6) $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2, \quad x^0 = (1,2)$

7) $f(x) = x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2, \quad x^0 = (2,0)$

СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

- титульный лист; цель работы; задание;
- таблицы с результатами исследований по каждому методу, сравнение эффективности работы разных алгоритмов;
- безмашинный вариант реализации двух итераций каждым методом;
- выводы по всем пунктам задания.

Вопросы для проверки знаний

- Функция многих переменных. Постановка задачи минимизации функции многих переменных. Градиент. Матрица Гессе. Необходимые условия оптимальности для дифференцируемых функций.

- Метод наискорейшего спуска для решения задач минимизации функции многих переменных: идея метода, геометрическая интерпретация, алгоритм, пример.

- Метод сопряженных градиентов для решения задач минимизации функции многих переменных: идея метода, геометрическая интерпретация, алгоритм, пример.

- Метод покоординатного спуска для решения задач минимизации функции многих переменных: идея метода, геометрическая интерпретация, алгоритм, пример.

- Метод Ньютона для решения задач минимизации функции многих переменных: идея метода, геометрическая интерпретация, алгоритм, пример.

Линейное программирование

В задачах линейного программирования целевая функция линейна, а условия-ограничения содержат линейные равенства или линейные неравенства.

Определение

управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Задача, в которой необходимо найти максимум целевой функции (1) при ограничениях (2), приведенных к равенствам, и условиях (3), называется задачей линейного программирования в канонической форме.

Линейное программирование

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Определение

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Линейное программирование

Теорема Множество допустимых планов является выпуклым.

Доказательство

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Линейное программирование

Ограничения задачи линейного программирования образуют выпуклое множество (многогранник), поэтому задачу линейного программирования можно решить графическим способом.

Графический метод решения задачи линейного программирования состоит из двух этапов

1) Построение пространства допустимых решений, удовлетворяющих всем ограничениям задачи линейного программирования.

2) Поиск оптимального решения среди всех точек пространства допустимых решений задачи линейного программирования.

Алгоритм графического метода решения задачи линейного программирования для двух переменных

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

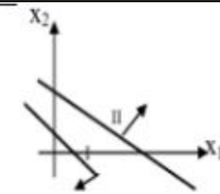
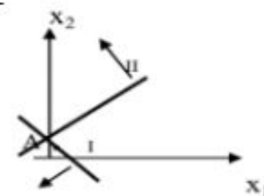
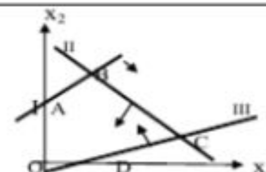
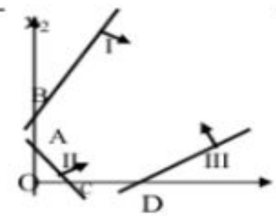
Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть — целые, натуральные или булевские значения

Линейное программирование

6) Построить вектор направления (градиент целевой функции). Начало – в точке с координатами (0; 0), конец – в точке, координаты которой являются коэффициентами целевой функции;
7) Провести линию уровня функции, перпендикулярную градиенту. Для этого построить прямую из семейства целевых функций, приравняв выражение целевой функции к нулю;
8) Найдем точку оптимального решения. Для этого параллельным переносом перенесем линию уровня, соответствующую целевой функции по направлению вектора направлений до касания с множеством допустимых решений. Точки касания являются точками экстремума. Для максимума – самая последняя точка допустимой области; для минимума – начальная точка допустимой области;
9) Найдем координаты точки экстремума. Для этого решим систему уравнений, содержащую уравнения прямых, которые пересекаются в этой точке;
10) Полученную точку подставим в уравнение целевой функции и найдем экстремум функции.

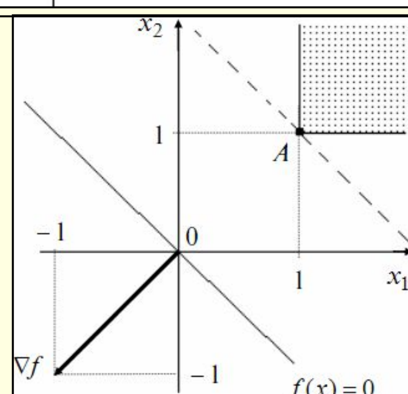
Линейное программирование

Виды областей допустимых решений :

1	пустое множество	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$	
2	единственная точка	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1 \\ -x_1 + x_2 \ge \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$	
3	выпуклый многоугольник	$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -4 \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 - 5x_2 \le 5 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$	
4	неограниченная выпуклая область	$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ -x_1 + 3x_2 \ge -3 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$	

$f(x) = -x_1 - x_2 \to \text{extr}$,

$x_1 \ge 1,\ x_2 \ge 1.$



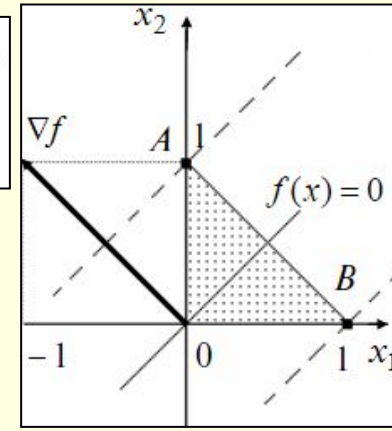
В задаче в точке $A = (1;1)^T$ достигается максимум, а минимума нет

Примеры:

$f(x) = -x_1 + x_2 \to \text{extr}$,

$x_1 + x_2 \le 1$,

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$;

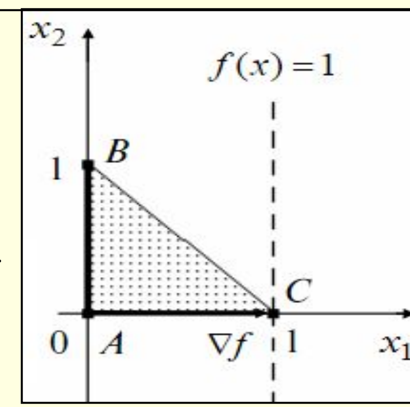


В задаче в точке $A = (0;1)^T$ достигается максимум, а в точке $B = (1;0)^T$ – минимум.

$f(x) = x_1 \to \text{extr}$,

$x_1 + x_2 \le 1$,

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$;

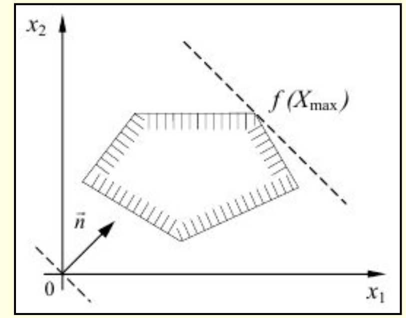


В задаче в точке $C = (1;0)^T$ достигается максимум, а на отрезке AB – минимум

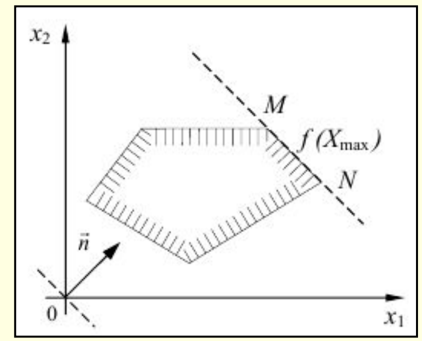
Линейное программирование

<u>Если область допустимых решений ограничена, то</u>:

1) максимум целевой функции находится в одной точке

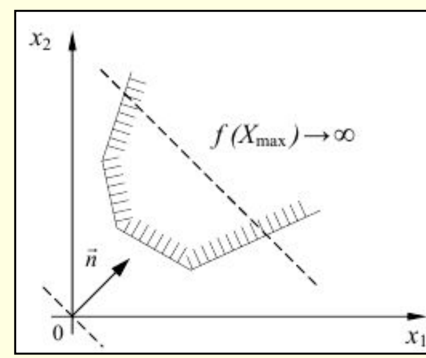


2) максимальное значение целевой функции находится на ребре MN, то есть в любой точке этого отрезка

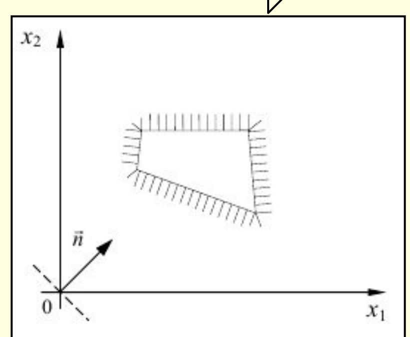


<u>В случае, когда область допустимых значений является неограниченной могут встретиться 3 варианта</u>:

1) целевая функция имеет экстремум
2) целевая функция неограниченна



3) задача линейного программирования не имеет решения, так как система ограничений несовместна



Линейное программирование

Пример графического метода решения задачи линейного программирования:

$$F_{\max} = x_1 + 3x_2,$$
$$x_1 - x_2 \le 1,$$
$$2x_1 + x_2 \le 2, \qquad (*)$$
$$x_1 - x_2 \ge 0,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Решение:

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

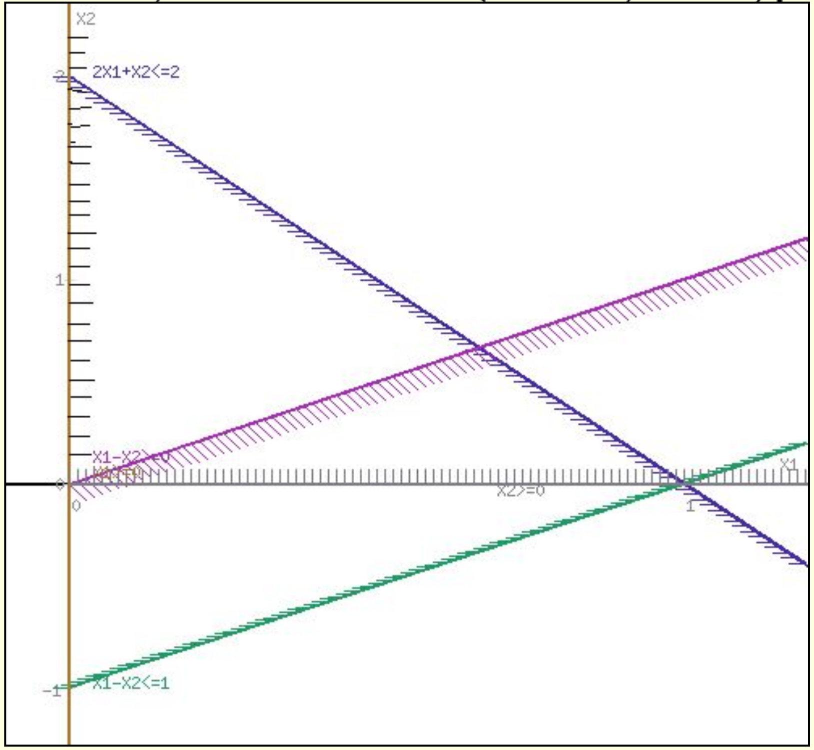
Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

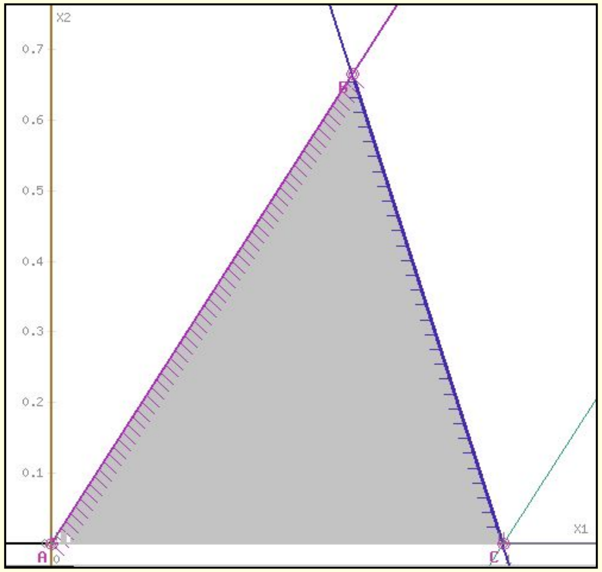
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0{,}1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.



Областью решений задачи линейного программирования является пересечение всех решений ограничения (*). Пересечением полученных полуплоскостей будет являться область, координаты точек которого удовлетворяют условию неравенств системы (*) ограничений задачи.

Обозначим границы области многоугольника решений ABC

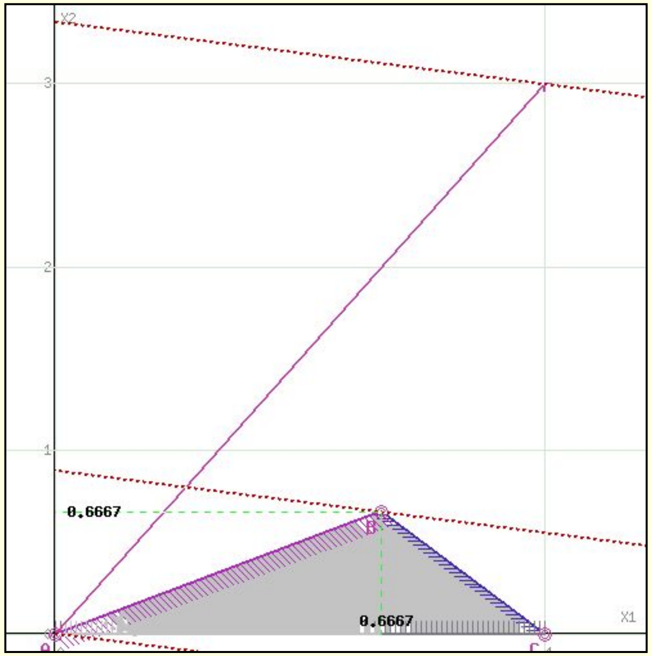


Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.



Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Линейное программирование

Графическим методом решить задачи линейного программирования:

1) $f(x) = 3x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \\ -x_1 + x_2 \le 1 \\ 0 \le x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0 \end{cases}$$

2) $f(x) = 1{,}5x_1 - x_2 \to extr$

$$\begin{cases} 3x_1 - 8x_2 \le 24 \\ -3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 7x_1 + 9x_2 \le 63 \\ x_1 + 5x_2 \ge 5 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3) Задача технического контроля:

В отделе технического контроля (ОТК) некоторой фирмы работают контролеры разрядов 1 и 2. Нормы выработки ОТК за 8-часовой рабочий день составляет не менее 1800 изделий. Контролер разряда 1 проверяет 25 изделий в час, причем не ошибается в 98% случаев. Контролер разряда 2 проверяет 15 изделий в час; его точность составляет 95%.

Заработная плата контролера разряда 1 равна 4 грн. в час, контролер разряда 2 получает 3 грн. в час. При каждой ошибке контролера фирма несет убыток в размере 2 грн. Фирма может использовать 8 контролеров разряда 1 и 10 контролеров разряда 2. Руководство фирмы хочет определить оптимальный состав ОТК, при котором общие затраты на контроль будут минимальны.

Линейное программирование

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Линейное программирование

В системе уравнений (7) число переменных (неизвестных) n больше, чем число уравнений m. Будем считать, что ранг этой системы равен m (система избыточна) и система совместна. Тогда m переменных из общего числа n образуют базисные переменные, а остальные $(n-m)$ – свободные переменные.

Система в этом случае будет иметь бесчисленное множество решений, так как свободным переменным можно придавать любые значения, для которых определяют базисные переменные.

Определение

Решение системы уравнений (7) называют базисным, если все свободные переменные равны нулю.

Базисное допустимое решение соответствует крайним точкам выпуклого многогранника, образованного множеством допустимых решений, то есть грани или вершине этого многогранника.

Целевая функция задачи линейного программирования описывает уравнение плоскости (или гиперплоскости для числа переменных больше трех). Решение задачи линейного программирования лежит в вершинах выпуклого многогранника или на его гранях.

Линейное программирование

Для решения задачи линейного программирования в 1949 году американским математиком Дж.Данцигом был разработан симплекс-метод.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Определение

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

Линейное программирование

Определение

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.
Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).
Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Линейное программирование

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть — целые, натуральные

Лемма 1

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть — целые, натуральные или булевские значения

Доказательство

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть — целые, натуральные

Ч.Т.Д.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может

Линейное программирование

Лемма 2

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Доказательство

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Ч.Т.Д.

Теорема

управления) — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

– либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
– либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
– либо натуральные значения ($x_i \in N$),
– либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

Доказательство

На основании леммы 1 имеем:

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

– либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
– либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
– либо натуральные значения ($x_i \in N$),
– либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

Ч.Т.Д.

Теорема

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

– либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
– либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
– либо натуральные значения ($x_i \in N$),
– либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

Доказательство

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

– либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
– либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
– либо натуральные значения ($x_i \in N$),
– либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

Ч.Т.Д.

Теорема

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.
Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).
Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

Доказательство

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Ч.Т.Д.

Линейное программирование

ОПИСАНИЕ СИМПЛЕКС МЕТОДА

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

СИМПЛЕКС ТАБЛИЦА

	Базис	b_i	c_1	c_2	…	c_m	c_{m+1}	…	c_n
			x_1	x_2	…	x_m	x_{m+1}	…	x_n
c_1	x_1	b_1	1	0	…	0	a_{1m+1}	…	a_{1n}
c_2	x_2	b_2	0	1	…	0	a_{2m+1}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
c_m	x_m	b_m	0	0	…	1	a_{mm+1}	…	a_{mn}
			0	0	…	0	Δ_{m+1}	…	Δ_n

Линейное программирование

Алгоритм 1 решения невырожденной задачи линейного программирования

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Линейное программирование

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Замечание

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Линейное программирование

Замечание

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Линейное программирование

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Теорема

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

Доказательство:

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Линейное программирование

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Ч.Т.Д.

Замечание

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Линейное программирование

Алгоритм 2 решения вырожденной задачи линейного программирования

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Линейное программирование

Замечание На практике алгоритм 2 используется редко, поскольку он требует значительно больше времени для решения задачи линейного программирования по сравнению с алгоритмом 1, а зацикливание процесса решения вырожденной задачи алгоритмом 1 мало вероятно. Если же при решении задачи алгоритмом 1 произошло зацикливание, то следует использовать алгоритм 2 для получения нового базисного решения и дальше продолжить решение задачи с помощью алгоритма 1.

Пример решения задачи линейного программирования симплекс-методом:

$$Z_{\min} = 29x_1 + 4x_2 + 42x_3 + 36x_4 + 17x_5,$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 200,$$
$$x_2 + 2x_4 + x_5 = 200,$$
$$x_3 + x_5 = 250,$$
$$x_1 - x_2 \geq 0,$$
$$x_j \geq 0, j = \overline{1,4}$$

Решение:

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть — целые, натуральные или булевские значения.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

	$x_Б$		0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	
		Y0	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7	Y8	Y9	min
0	x_6	0	-1	1	0	0	0	1	0	0	0	-
-1	x_7	200	3	2	1	0	0	0	1	0	0	$\frac{200}{3}$
-1	x_8	200	0	1	0	2	1	0	0	1	0	-
-1	x_9	250	0	0	1	0	1	0	0	0	1	-
Δ			3	3	2	2	2	0	0	0	0	
ε		$\frac{200}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	0	0	

X1=($\frac{200}{3}$,0,0,0,0,$\frac{200}{3}$,0,200,250); $\tilde{Z}(X1) = -200 - 250 = -450.$

	$x_Б$		0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	
		Y0	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7	Y8	Y9	min
0	x_6	$\frac{200}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	1	$\frac{1}{3}$	0	0	-
0	x_1	$\frac{200}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	0	0	-
-1	x_8	200	0	1	0	2	1	0	0	1	0	100
-1	x_9	250	0	0	1	0	1	0	0	0	1	-
Δ			0	1	1	2	2	0	-1	0	0	
ε		100	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	

X2=($\frac{200}{3}$,0,0,0,0,$\frac{200}{3}$,0,0,250); $\tilde{Z}(X2) = -250.$

	$x_Б$		0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	
		Y0	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7	Y8	Y9	min
0	x_6	$\frac{200}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	1	$\frac{1}{3}$	0	0	200
0	x_1	$\frac{200}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	0	0	200
0	x_4	100	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	-
-1	x_9	250	0	0	1	0	1	0	0	0	1	250
Δ			0	0	1	0	1	0	-1	-1	0	
ε		200	0	5	1	0	0	3	1	0	0	

X3=(0,0,200,100,0,0 ,0,0,50); $\tilde{Z}(X3) = -50.$

	$x_Б$		0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	
		Y0	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7	Y8	Y9	min
0	x_3	200	0	5	1	0	0	3	1	0	0	-
0	x_1	0	1	-1	0	0	0	-1	0	0	0	-
0	x_4	100	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	200
-1	x_9	50	0	-5	0	0	1	-3	-1	0	1	50
Δ			0	-5	0	0	1	-3	-2	-1	0	
ε		50	0	-5	0	0	1	-3	-1	0	1	

X4=(0,0,200,75,50,0 ,0,0,0); $\tilde{Z}(X4) = 0.$

	$x_Б$		0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	
		Y0	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7	Y8	Y9	min
0	x_3	200	0	5	1	0	0	3	1	0	0	
0	x_1	0	1	-1	0	0	0	-1	0	0	0	
0	x_4	75	0	3	0	1	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	
0	x_5	50	0	-5	0	0	1	-3	-1	0	1	
Δ			0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инстру...
рассматриваются числовые переменные...
- либо действительные (вещественные...
- либо целочисленные значения ($x_i \in$ ...
- либо натуральные значения ($x_i \in N$), ...
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько ...
набор переменных представляет со...
$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, ...
Возможны также смешанные случаи, ко...
принимать действительные значения, а...
или булевские значения.

	$x_Б$		-29	-4	-42	-36	-17	0	
		Y0	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	min
-42	x_3	200	0	5	1	0	0	3	40
-29	x_1	0	1	-1	0	0	0	-1	-
-36	x_4	75	0	3	0	1	0	$\frac{3}{2}$	25
-17	x_5	50	0	-5	0	0	1	-3	-
Δ			0	200	0	0	0		
ε		25	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{2}$	

X2=(25,25,75,0,175,0); $Z(X2) = -6950$

	$x_Б$		-29	-4	-42	-36	-17	0	
		Y0	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	min
-42	x_3	75	0	0	1	$-\frac{5}{3}$	0	$\frac{1}{2}$	
-29	x_1	25	1	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{2}$	
-4	x_2	25	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{2}$	
-17	x_5	175	0	0	0	$\frac{5}{3}$	1	$-\frac{1}{2}$	
Δ			0	0	0	$-66\frac{2}{3}$	0	0	

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Линейное программирование

Симплекс-методом решить задачи линейного программирования:

1) $F(X) = 3x_1 + 2x_2 \to \mathbf{max}$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 2 \\ 2x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2) $F(X) = 4x_1 + 5x_2 + 4x_3 \to \mathbf{max}$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 \le 240 \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 200 \\ 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 \le 160 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

3) $F(X) = x_1 - x_2 \to \mathbf{max}$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 14 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4) $F(X) = 3x_1 + 2x_2 \to \mathbf{max}$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 9 \\ 2x_1 + x_2 \ge 8 \\ x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Теория двойственности

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Теория двойственности

Правила построения двойственной задачи можно описать следующим образом:

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Теория двойственности

Составить двойственную задачу по отношению к исходной задаче линейного программирования :

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Теория двойственности

Построить двойственные задачи к следующим задачам линейного программирования:

1.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

2.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

3.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Теория двойственности

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Основные теоремы о двойственных задачах можно переформулировать следующим образом:

1) Если исходная и двойственная ей задачи имеет допустимые решения, то обе имеют оптимальные решения, причем значения целевых функций для оптимальных решений обоих задач совпадают.

2) Если одна из задач имеет допустимые решения, а другая – нет, то задача, которая имеет допустимые решения, неограниченна.

Третий возможный случай: обе задачи не имеют допустимых значений. Других вариантов нет.

Теория двойственности

Решать двойственную задачу можно **двойственным симплекс-методом**. Двойственный симплекс-метод строится по аналогии с прямым симплекс-методом. Различие состоит лишь в том, что свободные члены задачи, решаемой двойственным симплекс-методом, могут быть любыми числами, в то время как в прямом симплекс-методе эти числа должны быть неотрицательными. При этом если все коэффициенты в строке целевой функции неположительны, то базисное решение называется **псевдорешением**.

Алгоритм двойственного симплекс-метода

1) Пусть дана задача линейного программирования в канонической форме, так что базисное решение является псевдорешением. Тогда, если все свободные члены неотрицательны, псевдорешение является оптимальным.

2) Если в какой-нибудь строке, кроме отрицательного свободного члена нет других отрицательных коэффициентов, то данная задача линейного программирования не имеет допустимых решений.

3) Если базисное решение содержит отрицательные переменные (есть отрицательные свободные члены), то исключению из базиса подлежит одна из этих переменных, а именно та, значение которой максимально по модулю.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Целочисленное программирование

Основной класс задач оптимизации составляют задачи линейного программирования, в которых на значения всех или части переменных наложены требования целочисленности. Если все переменные принимают только целочисленные значения, то модель определяет полностью целочисленную задачу, иначе говорят о частично целочисленной задаче.

Постановка полностью целочисленной задачи линейного программирования

Задача, в которой требуется обратить в максимум (минимум) целевую функцию $F(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, i = \overline{1,s},$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i = \overline{s+1,s+t},$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i, i = \overline{s+t+1,m},$$
$$x_j \ge 0, j = \overline{1,n}$$
x_j - целые, $j = \overline{1,n}$

Если найти решение данной задачи симплекс-методом, то оно может оказаться как целочисленным, так и нет. Поэтому в общем случае для определения оптимального плана требуются специальные методы.

Целочисленное программирование

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Определение

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Целочисленное программирование

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Целочисленное программирование

управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может

Алгоритм метода Гомори

1. Используя симплекс-метод, находим оптимальное решение задачи линейного программирования без учета требования целочисленности.
2. Если все свободные члены в завершающей симплекс-таблице целые числа, то оптимальное решение является целочисленным, то есть отвечает условиям исходной задачи.
3. Если же есть нецелые свободные члены, то выбираем среди них член с наименьшим номером и рассматриваем соответствующую ему строку симплекс-таблицы. Допустим, эта строка с номером *l*. По выбранной строке записываем правильное отсечение вида 22.

Целочисленное программирование

управления) — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть — целые, натуральные или булевские значения.

Пример решения целочисленной задачи линейного программирования, используя алгоритм Гомори:

$$F_{\min} = -x_1 - x_2,$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 6,$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_4 = 9,$$
$$x_j \geq 0, \ j = \overline{1,4}, \ x_j \text{ – целые.}$$

Решение:

Инструментальные переменные (управляемые переменные,
управления) — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть — целые, натуральные или булевские значения.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

	$x_Б$		*1*	*1*	*0*	*0*	
		Y0	*Y1*	*Y2*	*Y3*	*Y4*	*min*
0	x_3	*6*	*1*	*2*	*1*	*0*	*6*
0	x_4	*9*	*3*	*2*	*0*	*1*	*3*
Δ			*1*	*1*	*0*	*0*	
ε		*3*	*1*	$\frac{2}{3}$	*0*	$\frac{1}{3}$	

X1=(3;0;3;0), F(X1)=3

	$x_Б$		1	1	0	0	
		Y0	Y1	Y2	Y3	Y4	min
0	x_3	3	0	$\frac{4}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{9}{4} = 2{,}25$
1	x_1	3	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{9}{2}=4{,}5$
Δ			0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	
ε		$\frac{9}{4}$	0	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	

X2=$(\frac{3}{2}; \frac{9}{4}; 0; 0)$, F(X2)=$\frac{15}{4}$=3,75

	$x_Б$		1	1	0	0
		Y0	Y1	Y2	Y3	Y4
1	x_2	$\frac{9}{4}$	0	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$
1	x_1	$\frac{3}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Δ			0	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

	$x_Б$		1	1	0	0	0
		Y0	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5
1	x_2	$\frac{9}{4}$	0	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0
1	x_1	$\frac{3}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	x_5	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
Δ			0	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0
ε		1	0	0	1	1	-2

	$x_Б$		1	1	0	0	0
		Y0	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5
1	x_2	$\frac{3}{2}$	0	1	0	-1	$\frac{3}{2}$
1	x_1	2	1	0	0	1	-1
0	x_3	1	0	0	1	1	-2
Δ			0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$

$X3=(2;\frac{3}{2};1;0)$, $F(X3)=\frac{7}{2}=3{,}5$

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть — целые, натуральные или булевские значения

	$x_Б$		1	1	0	0	0	0
		Y0	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6
1	x_2	$\frac{3}{2}$	0	1	0	-1	$\frac{3}{2}$	0
1	x_1	2	1	0	0	1	-1	0
0	x_3	1	0	0	1	1	-2	0
0	x_6	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	1
Δ			0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	0
ε		1	0	0	0	0	1	-2

	$x_Б$		1	1	0	0	0	0
		Y0	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6
1	x_2	0	0	1	0	-1	0	3
1	x_1	3	1	0	0	1	0	-2
0	x_3	3	0	0	1	1	0	-4
0	x_5	1	0	0	0	0	1	-2
Δ			0	0	0	0	0	-1

X4=(3; 0; 3; 0), F(X4)=3

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.
Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).
Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может

Найдите графическим методом и методом Гомори оптимальное целочисленное решение задачи линейного программирования, если она задана следующей математической моделью

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Решить целочисленные задачи линейного программирования методом Гомори

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Найти целочисленное решение задачи линейного программирования. Составить двойственную задачу и решить её без условия целочисленности. По теоремам двойственности проверить связь нецелочисленных решений прямой и двойственной задачи.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

Транспортные задачи

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Транспортные задачи

управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественн
- либо целочисленные значения (x_i
- либо натуральные значения ($x_i \in$
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$

ТАБЛИЦА ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

Исходные данные

Поставщики	Потребители				Запасы (объемы отправления)
	B_1	B_2	...	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	$\vdots$
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребность	b_1	b_2	...	b_n	

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Транспортная задача

Пример решения транспортной задачи:

Пункты	B1	B2	B 3	Запасы
A1	4	5	1	40
A2	9	5	2	70
Потребности	10	30	70	110

Решение:

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Пункты	B1	B2	B 3	Запасы
A1	4	5	1 **40**	40
A2	9 **10**	5 **30**	2 **30**	70
Потребности	10	30	70	110

Транспортная задача

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Транспортная задача

Пункты	В1	В2	В 3	Запасы
А1	4 **10**	5	1 **30**	40
А2	9	5 **30**	2 **40**	70
Потребности	10	30	70	110

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Транспортная задача

Три оптовых склада (A1 A2 A3) поставляют в три магазина розничной сети (B1 B2 B3) некоторый товар. Запасы данного товара на складах (шт.), потребности в нем магазинов (шт.) и тарифы на перевозку (в расчете на 1 шт.) приведены в транспортной таблице ниже. Найти оптимальный план перевозок, обеспечивающий удовлетворение потребностей магазинов в товаре с минимальными издержками на его транспортировку, а также общие затраты грузоперевозок.

Магазины / Склады	B1	B2	B3	Запасы
A1	6	2	3	20
A2	3	1	4	30
A3	5	7	2	50
Потребности	25	35	40	

Магазины / Склады	B1	B2	B3	Запасы
A1	8	4	1	20
A2	2	3	6	40
A3	5	7	2	20
Потребности	30	15	20	

Вопросы для проверки знаний

- Задачи линейного программирования (ЗЛП). Каноническая форма ЗЛП. План. Допустимый план. Теорема о множестве допустимых планов.
- Область допустимых решений. Ограниченная и неограниченная область допустимых решений. Геометрическая интерпретация ЗЛП для двумерного случая.
- Симплекс-метод Данцига. Базисный план. Леммы 1, 2. Теоремы Данцига. Нахождение исходного базисного плана. Переход от одного базисного решения к другому.
- Двойственность в линейном программировании. Типы двойственных задач.
- Задачи линейного целочисленного программирования. Постановка задачи целочисленного программирования. Алгоритм метода Гомори для решения задач целочисленного программирования.
- Транспортные задачи. Постановка задачи и стратегия решения. Методы нахождения начального плана перевозок. Метод северо-западного угла. Метод минимальной стоимости. Решение транспортной задачи методом потенциалов.

Примеры тестовых заданий для проверки знаний

1) Задачу линейного программирования можно сформулировать так:

A. найти максимум или минимум линейной формы при отсутствии ограничений на переменные;

B. найти нули функции при заданных интервалах их положения;

C. найти максимум или минимум линейной формы при заданных ограничениях в виде равенств или неравенств;

D. найти максимум или минимум нелинейной формы при заданных ограничениях в виде равенств или неравенств.

2) Симплекс-метод в задаче линейного программирования реализуется в виде:

A. системы линейных дифференциальных уравнений;

B. системы рекуррентных соотношений;

C. симплекс таблиц;

D. системы нелинейных дифференциальных уравнений.

3) Один из алгоритмов нахождения решения задачи целочисленного программирования группы методов отсекающих плоскостей называется:

A. алгоритм двойственного симплекс-метода;

B. алгоритм метода ветвей и границ;

C. алгоритм метода Гомори;

D. алгоритм симплекс-метода.

Примеры тестовых заданий для проверки знаний

4) <u>Метод северо-западного угла это</u>

A. один из методов проверки опорного плана транспортной задачи на оптимальность;

B. один из комбинированных методов дискретного программирования, при котором гиперплоскость, определяемая целевой функцией задачи, вдавливается внутрь многогранника планов соответствующей задачи линейного программирования до встречи с ближайшей целочисленной точкой этого многогранника;

C. один из методов отсечения, с помощью которого решаются задачи целочисленного программирования;

D. один из группы методов определения первоначального опорного плана транспортной задачи.

5) <u>Оптимальный план задачи линейного программирования это</u>

A. решение задачи линейного программирования, т. е. такой план, который не входит в допустимую область и доставляет экстремум целевой функции;

B. решение задачи линейного программирования, т. е. такой план, который входит в допустимую область и доставляет ненулевое значение целевой функции;

C. решение задачи линейного программирования, т. е. такой план, который входит в допустимую область и доставляет нулевое значение целевой функции;

D. решение задачи линейного программирования, т. е. такой план, который входит в допустимую область и доставляет экстремум целевой функции.

6) Несбалансированная транспортная задача это

A. открытая транспортная задача; B. закрытая транспортная задача;

C. произвольная транспортная задача; D. правильного ответа нет.

7) Если исходная задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то задача двойственная к ней

A. имеет оптимальное решение; B. может не иметь решения;

C. может не иметь смысла; D. не имеет решение.

8) Универсальный метод решения задач линейного программирования – это

A. симплексный метод; B. метод динамического программирования;

C. уравнение Леонтьева; D. метод множителей Лагранжа.

9) Ограничения в задаче линейного программирования в каноническом виде имеют следующий вид:

A. $$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{array}$$

B. $$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ge b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ge b_m \end{array}$$

C. $$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

10) Вектор X является планом задачи линейного программирования, если он

A. удовлетворяет ограничениям задачи и условию неотрицательности;

B. содержит m неотрицательных основных переменных и (n-m) свободных компонент;

C. удовлетворяет ограничениям задачи линейного программирования

Выпуклое программирование

Под **выпуклым программированием** понимается раздел теории экстремальных задач, в котором изучаются задачи минимизации (или максимизации) выпуклых функций на выпуклых множествах.

Определение

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

(1)

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть — целые, натуральные или булевские значения.

Определение

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может

Выпуклое программирование

Рассмотрим понятия седловой точки функции Лагранжа и условие регулярности Слейтера.

Определение

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть — целые, натуральные или булевские значения.

Определение

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть — целые, натуральные

Выпуклое программирование

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

Инструментальные переменные (управляемые переменные, правления) – это те параметры, значения которых может выбирать ицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

бычно в качестве инструментальных переменных ассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),

либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),

либо натуральные значения ($x_i \in N$),

либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

бычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, абор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. озможны также смешанные случаи, когда часть переменных может ринимать действительные значения, а часть – целые, натуральные ли булевские значения.

нструментальные переменные (управляемые переменные, правления) – это те параметры, значения которых может выбирать ицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

бычно в качестве инструментальных переменных ассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
либо натуральные значения ($x_i \in N$),
либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

бычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, абор переменных представляет собой n-мерный вектор $x =$ $x_1, x_2, \dots, x_n$), $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. озможны также смешанные случаи, когда часть переменных может ринимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

Ч.Т.Д.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

Метод множителей Лагранжа

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$.

Алгоритм метода множителей Лагранжа

управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$.
Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

(5)

Метод множителей Лагранжа

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Метод множителей Лагранжа

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Метод множителей Лагранжа

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

(6)

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Метод множителей Лагранжа

Пример поиска условного экстремума функции методом множителей Лагранжа:

$$f(x)=(x_1-4)^2+(x_2-5)^2 \to \min,$$
$$g_1(x)=x_1+x_2-1\le 0,$$
$$g_2(x)=-x_1\le 0,$$
$$g_3(x)=-x_2\le 0.$$

Решение:

1. Составим обобщённую функцию Лагранжа:

$$L(x,\lambda_0,\lambda)=\lambda_0\left[(x_1-4)^2+(x_2-5)^2\right]+\lambda_1(x_1+x_2-1)+\lambda_2(-x_1)+\lambda_3(-x_2).$$

2. Выпишем необходимые условия минимума первого порядка:

а) $$\frac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda)}{\partial x_1}=2\lambda_0(x_1-4)+\lambda_1-\lambda_2=0,$$
$$\frac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda)}{\partial x_2}=2\lambda_0(x_2-5)+\lambda_1-\lambda_3=0;$$

б) $x_1+x_2-1\le 0,\ -x_1\le 0,\ -x_2\le 0;$

в) $\lambda_1\ge 0,\ \lambda_2\ge 0,\ \lambda_3\ge 0;$

г) $\lambda_1(x_1+x_2-1)=0,\ \lambda_2(-x_1)=0,\ \lambda_3(-x_2)=0.$

3. Решим систему для двух случаев.

В первом случае $\lambda_0=0$. Тогда условия а) запишутся в виде:

$$\lambda_1-\lambda_2=0,$$
$$\lambda_1-\lambda_3=0.$$

Рассмотрим восемь вариантов выполнения условий г) дополняющей нежесткости.

1) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$. Невозможно, так как множители не должны быть равны нулю одновременно.

2) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \neq 0$. Тогда из второго уравнения условия а) имеем $\lambda_3 = 0$, т.е. имеется противоречие.

3) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$. Тогда из первого уравнения условия а) имеем $\lambda_2 = 0$, т.е. имеется противоречие.

4) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$. Тогда из условия а) имеем $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, т.е. имеется противоречие.

5) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$. Тогда из условия а) имеем $\lambda_1 = 0$, т.е. имеется противоречие.

6) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \neq 0$. Тогда из первого уравнения условия а) имеем $\lambda_1 = 0$, т.е. имеется противоречие.

7) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$. Тогда из второго уравнения условия а) имеем $\lambda_1 = 0$, т.е. имеется противоречие.

8) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$. Тогда из условия а) имеем $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. При этом условия г) дополняющей нежесткости записываются в виде:

$$x_1 + x_2 - 1 = 0,$$

$$-x_1 = 0,$$

$$-x_2 = 0.$$

Заметим, что одновременно эти условия не выполняются, т.к. если $x_1 = x_2 = 0$, то первое из условий дополняющей нежесткости не удовлетворяется.

Условно-стационарных точек пока не найдено.

Во втором случае $\lambda_0 \neq 0$. Поделим уравнения системы а)-г), приведенной в п.2, на λ_0 и заменим $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1, $\frac{\lambda_2}{\lambda_0}$ на λ_2, $\frac{\lambda_3}{\lambda_0}$ на λ_3. Получаем:

а) $2(x_1 - 4) + \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \quad 2(x_2 - 5) + \lambda_1 - \lambda_3 = 0;$

б) $x_1 + x_2 - 1 \le 0, \ -x_1 \le 0, \ -x_2 \le 0;$

в) $\lambda_1 \ge 0, \lambda_2 \ge 0, \lambda_3 \ge 0;$

г) $\lambda_1(x_1 + x_2 - 1) = 0, \lambda_2(-x_1) = 0, \lambda_3(-x_2) = 0.$

Рассмотрим восемь вариантов выполнения условий дополняющей нежесткости.

1) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$. Тогда из условия а) имеем $x_1 = 4, x_2 = 5$, и не выполняется первое ограничение в условии б).

2) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 \neq 0$. Тогда

$$\begin{cases} 2(x_1 - 4) = 0, \\ 2(x_2 - 5) - \lambda_3 = 0, \\ x_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4, \\ x_2 = 0, \\ \lambda_3 = -10. \end{cases}$$

Получаем $\lambda_3 = -10 < 0$, что противоречит условию в).

3) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 = 0$. Тогда

$$\begin{cases} 2(x_1 - 4) - \lambda_2 = 0, \\ 2(x_2 - 5) = 0, \\ x_1 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 5, \\ \lambda_2 = -8. \end{cases}$$

Получаем $\lambda_2 = -8 < 0$, что противоречит условию в).

4) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_3 \neq 0$. Тогда

$$\begin{cases} 2(x_1 - 4) - \lambda_2 = 0, \\ 2(x_2 - 5) - \lambda_3 = 0, \\ x_1 = 0, \\ x_2 = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \\ \lambda_2 = -8, \\ \lambda_3 = -10. \end{cases}$$

Получаем $\lambda_2 = -8 < 0,\ \lambda_3 = -10 < 0$, что противоречит условию в).

5) $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0$. Тогда

$$\begin{cases} 2(x_1 - 4) + \lambda_1 = 0, \\ 2(x_2 - 5) + \lambda_1 = 0, \\ x_1 + x_2 - 1 = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 1 - x_2, \\ 2(1 - x_2 - 4) + \lambda_1 = 0, \\ 2(x_2 - 5) + \lambda_1 = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 1, \\ \lambda_1 = 8. \end{cases}$$

Отметим, что в данном случае выполняются все условия б). Получили условно-стационарную точку A: $x_1^* = 0, x_2^* = 1, \lambda_1^* = 8, \lambda_2^* = \lambda_3^* = 0$.

6) $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 \neq 0$. Тогда

$$\begin{cases} 2(x_1 - 4) + \lambda_1 = 0, \\ 2(x_2 - 5) + \lambda_1 - \lambda_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 1 = 0, \\ x_2 = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 0, \\ \lambda_1 = 6, \\ \lambda_3 = -4. \end{cases}$$

Получаем $\lambda_3 = -4 < 0$, что противоречит условию в).

7) $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_3 = 0$. Тогда

$$\begin{cases} 2(x_1 - 4) + \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ 2(x_2 - 5) + \lambda_1 = 0, \\ x_1 + x_2 - 1 = 0, \\ x_1 = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 1, \\ \lambda_1 = 8, \\ \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Получаем $\lambda_2 = 0$, что противоречит условию $\lambda_2 \neq 0$.

8) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$. Тогда

$$\begin{cases} 2(x_1 - 4) + \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ 2(x_2 - 5) + \lambda_1 - \lambda_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 1 = 0, \\ x_1 = 0, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Получаем что если $x_1 = x_2 = 0$, то первое из условий дополняющей нежесткости не удовлетворяется.

Следовательно, получили одну условно-стационарную точку A: $x_1^* = 0, x_2^* = 1, \lambda_1^* = 8, \lambda_2^* = \lambda_3^* = 0$.

4. Проверим достаточные условия минимума. В точке A имеются два активных ограничения, т.е. $l = 2$. Так как $l = 2 < n = 3$, то достаточные условия первого порядка не выполняются. Проверим условия второго порядка. Второй дифференциал классической функции Лагранжа:

$$d^2L(A) = 2\lambda_0^* dx_1^2 + 2\lambda_0^* dx_2^2.$$

Условия, накладываемые на первые дифференциалы активных ограничений, имеют вид:

$$dg_1(A) = dx_1 + dx_2 = 0, \quad \lambda_1^* = 8 > 0;$$

$$dg_2(A) = -dx_1 \leq 0, \quad \lambda_2^* = 0;$$

В результате исследования знака второго дифференциала классической функции Лагранжа для ненулевых dx получено, что $dx_2 = -dx_1 < 0$, $dx_1 > 0$, тогда при $\lambda_0 > 0 \Rightarrow d^2L > 0$. Следовательно, в точке A условный локальный минимум.

5. Вычислим значение функции в точке минимума: $f(A) = 32$.

Метод штрафных функций

К **методам штрафных функций** обычно относят группу методов, связанных с параметризацией исходной экспериментальной задачи. Самый распространенный подход основан на введении функций штрафа, зависящих от штрафного параметра и обладающих следующими свойствами:

-на большей части допустимого множества задачи математического программирования эти функции близки к нулю;

-каждая из функций достаточно быстро возрастает либо при приближении изнутри к границе допустимого множества, либо при выходе за его пределы;

-степень близости штрафа к нулю и скорость его возрастания зависят от значения штрафного параметра и увеличиваются с ростом параметра.

Функция штрафа добавляется к целевой функции, после чего решается параметрическое семейство получившихся задач без функциональных ограничений.

Метод штрафных функций

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

(8)

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Определения

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Метод штрафных функций

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Метод штрафных функций

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Определение

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x =$

Метод штрафных функций

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Метод штрафных функций

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Ч.Т.Д

Метод штрафных функций

Теорема составляет основу метода штрафных функций, понимаего как способ перехода от задачи с функциональными ограничениями к параметрическому семейству задач оптимизации функций Ф(x,C) на множестве P.

Примеры штрафных функций

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.
Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
– либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
– либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
– либо натуральные значения ($x_i \in N$),
– либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).
Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

Метод штрафных функций

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.
Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).
Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Эта функция барьерного типа может и не удовлетворять условию неотрицательности (10), однако основополагающая теорема для нее справедлива.

Метод штрафных функций

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Метод штрафных функций

Алгоритм метода штрафных функций

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Метод штрафных функций

Пример поиска условного экстремума функции методом штрафных функций:

$$f(x)=(x_1-4)^2+(x_2-5)^2\to\min,$$
$$g_1(x)=x_1+x_2-1\le 0,$$
$$g_2(x)=-x_1\le 0,$$
$$g_3(x)=-x_2\le 0.$$

Решение:

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B = \{0,1\}$).

$$F(x,C_k)=(x_1-4)^2+(x_2-5)^2+\frac{C_k}{2}\left[\left(\max\{0,x_1+x_2-1\}\right)^2+\left(\max\{0,-x_1\}\right)^2+\left(\max\{0,-x_2\}\right)^2\right].$$

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $x\in R^n$ или $x\in Z^n$, или $x\in N^n$, или $x\in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть — целые, натуральные или булевские значения

$$\frac{\partial F(x,C_k)}{\partial x_1}=0=\begin{cases}2(x_1-4),\ x_1+x_2-1\le 0,-x_1\le 0,-x_2\le 0,\\ 2(x_1-4),\ x_1+x_2-1\le 0,-x_1\le 0,-x_2>0,\\ 2(x_1-4)+C_kx_1,\ x_1+x_2-1\le 0,-x_1>0,-x_2\le 0,\\ 2(x_1-4)+C_kx_1,\ x_1+x_2-1\le 0,-x_1>0,-x_2>0,\\ 2(x_1-4)+C_k(x_1+x_2-1),\ x_1+x_2-1>0,-x_1\le 0,-x_2\le 0,\\ 2(x_1-4)+C_k(x_1+x_2-1),\ x_1+x_2-1>0,-x_1\le 0,-x_2>0,\\ 2(x_1-4)+C_k\left[(x_1+x_2-1)+x_1\right],\ x_1+x_2-1>0,-x_1>0,-x_2\le 0,\\ 2(x_1-4)+C_k\left[(x_1+x_2-1)+x_1\right],\ x_1+x_2-1>0,-x_1>0,-x_2>0,\end{cases}$$

$$\frac{\partial F(x,C_k)}{\partial x_2}=0=\begin{cases}2(x_2-5),\ x_1+x_2-1\le 0,-x_1\le 0,-x_2\le 0,\\ 2(x_2-5)+C_kx_2,\ x_1+x_2-1\le 0,-x_1\le 0,-x_2>0,\\ 2(x_2-5),\ x_1+x_2-1\le 0,-x_1>0,-x_2\le 0,\\ 2(x_2-5)+C_kx_2,\ x_1+x_2-1\le 0,-x_1>0,-x_2>0,\\ 2(x_2-5)+C_k(x_1+x_2-1),\ x_1+x_2-1>0,-x_1\le 0,-x_2\le 0,\\ 2(x_2-5)+C_k\left[(x_1+x_2-1)+x_2\right],\ x_1+x_2-1>0,-x_1\le 0,-x_2>0,\\ 2(x_2-5)+C_k(x_1+x_2-1),\ x_1+x_2-1>0,-x_1>0,-x_2\le 0,\\ 2(x_2-5)+C_k\left[(x_1+x_2-1)+x_2\right],\ x_1+x_2-1>0,-x_1>0,-x_2>0,\end{cases}$$

Рассмотрим восемь случаев.

1) $x_1+x_2-1\le 0,-x_1\le 0,-x_2\le 0$. Тогда

$$\begin{cases}2(x_1-4)=0,\\ 2(x_2-5)=0.\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x_1=4,\\ x_2=5.\end{cases}$$

Но при полученных значениях не выполняется первое ограничение $g_1(x)\le 0$.

2) $x_1+x_2-1\le 0,-x_1\le 0,-x_2>0$. Тогда

$$\begin{cases}2(x_1-4)=0,\\ 2(x_2-5)+C_kx_2=0.\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x_1=4,\\ x_2=\dfrac{10}{2+C_k}.\end{cases}$$

Однако $4+\dfrac{10}{2+C_k}-1>0$ при $C_k>0$, что противоречит первому ограничению $g_1(x)\le 0$.

3) $x_1+x_2-1\le 0,-x_1>0,-x_2\le 0$. Тогда

$$\begin{cases}2(x_1-4)+C_kx_1=0,\\ 2(x_2-5)=0.\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x_1=\dfrac{8}{2+C_k},\\ x_2=5.\end{cases}$$

Однако $\frac{8}{2+C_k}+5-1>0$ при $C_k>0$, что противоречит первому ограничению $g_1(x)\le 0$.

4) $x_1+x_2-1\le 0, -x_1>0, -x_2>0$. Тогда

$$\begin{cases} 2(x_1-4)+C_k x_1=0, \\ 2(x_2-5)+C_k x_2=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{8}{2+C_k}, \\ x_2=\dfrac{10}{2+C_k}. \end{cases}$$

Однако $-\frac{8}{2+C_k}<0$ и $-\frac{10}{2+C_k}<0$ при $C_k>0$, что противоречит второму и третьему ограничениям

5) $x_1+x_2-1>0, -x_1\le 0, -x_2\le 0$. Тогда

$$\begin{cases} 2(x_1-4)+C_k(x_1+x_2-1)=0, \\ 2(x_2-5)+C_k(x_1+x_2-1)=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{4}{C_k+1}, \\ x_2=\dfrac{C_k+5}{C_k+1}. \end{cases}$$

Отметим, что в данном случае выполняются все ограничения. Получили точку $x^*=\left(\frac{4}{C_k+1};\frac{C_k+5}{C_k+1}\right)$.

Так как $H\left(x^*(C_k),C_k\right)=\begin{pmatrix} 2+C_k & C_k \\ C_k & 2+C_k \end{pmatrix}>0$, то достаточные условия локального минимума выполняются.

6) $x_1+x_2-1>0, -x_1\le 0, -x_2>0$. Тогда

$$\begin{cases} 2(x_1-4)+C_k(x_1+x_2-1)=0, \\ 2(x_2-5)+C_k(x_1+2x_2-1)=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{C_k^2+3C_k+9}{\dfrac{C_k^2}{2}+3C_k+2}, \\ x_2=\dfrac{2C_k+10}{\dfrac{C_k^2}{2}+3C_k+2}. \end{cases}$$

Однако $-\frac{2C_k+10}{\frac{C_k^2}{2}+3C_k+2}<0$ при $C_k>0$, что противоречит третьему ограничению $g_3(x)>0$.

7) $x_1 + x_2 - 1 > 0, -x_1 > 0, -x_2 \le 0$. Тогда

$$\begin{cases} 2(x_1-4) + C_k(2x_1 + x_2 - 1) = 0, \\ 2(x_2-5) + C_k(x_1 + x_2 - 1) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{8}{\dfrac{C_k^2}{2} + 3C_k + 2}, \\ x_2 = \dfrac{\dfrac{C_k^2}{2} + 7C_k + 10}{\dfrac{C_k^2}{2} + 3C_k + 2}. \end{cases}$$

Однако $-\dfrac{8}{\dfrac{C_k^2}{2} + 3C_k + 2} < 0$ при $C_k > 0$, что противоречит второму ограничению $g_2(x) > 0$.

8) $x_1 + x_2 - 1 > 0, -x_1 > 0, -x_2 > 0$. Тогда

$$\begin{cases} 2(x_1-4) + C_k(2x_1 + x_2 - 1) = 0, \\ 2(x_2-5) + C_k(x_1 + 2x_2 - 1) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{C_k^2 + 8C_k + 16}{3C_k + 2}, \\ x_2 = \dfrac{C_k^3 + 10C_k^2 + 38C_k + 36}{3C_k^2 + 8C_k + 4}. \end{cases}$$

Однако $-\dfrac{C_k^2 + 8C_k + 16}{3C_k + 2} < 0$ и $-\dfrac{C_k^3 + 10C_k^2 + 38C_k + 36}{3C_k^2 + 8C_k + 4} < 0$ при $C_k > 0$, что противоречит второму и третьему ограничениям соответственно.

В результате получаем решение задачи:

$$x_1^* = \lim_{C_k \to \infty} \frac{4}{C_k + 1} = 0,\ x_2^* = \lim_{C_k \to \infty} \frac{C_k + 5}{C_k + 1} = 1,\ f(x^*) = 32.$$

Метод проекции градиента

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Определение

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Метод проекции градиента

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.
Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).
Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$.
Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.
Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).
Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$.
Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

Описание метода проекции градиента

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$), (15)
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$.
Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Метод проекции градиента

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Метод проекции градиента

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Метод проекции градиента

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Алгоритм метода проекции градиента

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Алгоритм метода проекции градиента

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Алгоритм метода проекции градиента

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Метод проекции градиента

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Пример поиска условного экстремума функции методом проекции градиента:

$$f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 5)^2 \to \min,$$
$$g_1(x) = x_1 + x_2 - 1 \le 0,$$
$$g_2(x) = -x_1 \le 0,$$
$$g_3(x) = -x_2 \le 0.$$

Решение:

1. Задаем $x^0 = (0;0)^T, \varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 0, M = 5$.
2. Полагаем $k = 0$.

3⁰. Проверяем условие $k \ge M$: $k = 0 < 5 = M$.

4⁰. Вычислим $g_j(x^0), j = 1,2,3$: $g_1(x^0) = -1 < 0$, $g_2(x^0) = 0$, $g_3(x^0) = 0$.

5⁰. В точке x^0 активны ограничения $g_2(x^0) \le 0$, $g_3(x^0) \le 0$, они формируют матрицу A_0. Так как $\nabla f(x^0) = (-8, -10)^T \ne 0$, переходим к шагу 7.

Метод проекции градиента

7^0. Вычисляем Δx^0: $\Delta x^0 = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, так как $A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

8^0. Проверяем условие $\|\Delta x^0\| \le \varepsilon_2$: $\|\Delta x^0\| = 0$, переходим к шагу 9.

9^0. Вычисляем λ^0: $\lambda^0 = -\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \end{pmatrix}$, удаляем третье ограничение $-x_2 \le 0$ (оно переходит в пассивные), которому соответствует наибольший по модулю отрицательный множитель -10, и переходим к шагу 7 (при этом исключается вторая строка матрицы A_0).

7^1. Вычисляем Δx^0: $\Delta x^0 = -\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$, так как $A_0 = (-1;\ 0)$.

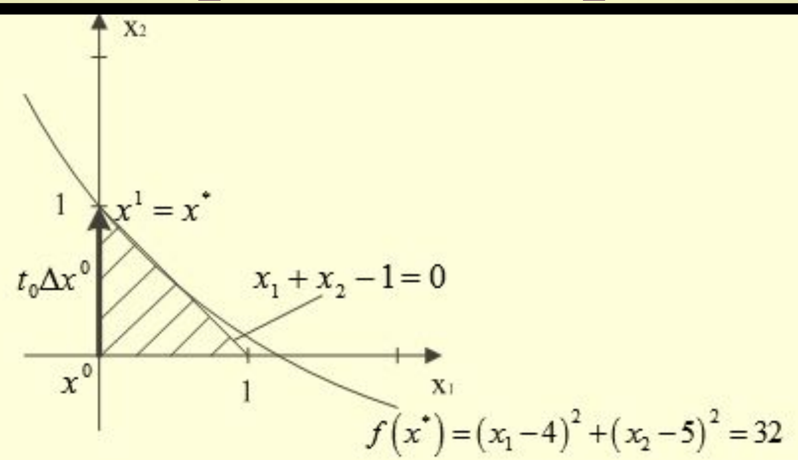
8^1. Проверяем условие $\|\Delta x^0\| \le \varepsilon_2$: $\|\Delta x^0\| = 10 > \varepsilon_2 = 0$.

10^0. Получаем точку $x^0 + t_0 \Delta x^0$: $x^0 + t_0 \Delta x^0 = (0; 10 t_0)^T$.

11^0. Определяем $t_0 = \min\{t_0^*, t_{0_{\max}}\}$: величину t_0^* находим из условия $f(x^0 + t_0 \Delta x^0) = \min\limits_{t_0 \ge 0} f(x^0 + t_0 \Delta x^0)$: $t_0^* = 0{,}5$; так как первое ограничение пассивно в точке x^0, то из условий $10 t_0 - 1 = 0$ и $t_0 \ge 0$ находим $t_0^1 = \frac{1}{10}$; третье ограничение в аналогичной процедуре не участвует, поскольку переведено в пассивные на шаге 9; $t_{0_{\max}} = \min\limits_j \{t_0^j\} = \frac{1}{10}$; $t_0 = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{10}\right\} = \frac{1}{10}$.

12^0. Вычисляем $x^1 = x^0 + t_0 \Delta x^0$: $x^1 = (0;0)^T + \frac{1}{10} \cdot (0;10)^T = (0;1)^T$ (см. рисунок). Полагаем $k = 1$ и переходим к шагу 3.

Метод проекции градиента



3¹. Проверяем условие $k \geq M$: $k = 1 < 5 = M$.

4¹. Вычисляем $g_j(x^0), j = 1,2,3$: $g_1(x^1) = 0$, $g_2(x^1) = 0$, $g_3(x^1) = -1 < 0$.

5¹. Проверяем условия $\varepsilon_1 \leq g_j(x^1) \leq 0$: $g_1(x^1) = 0$, $g_2(x^1) = 0$, $g_3(x^1) < \varepsilon_1$.
Активны первое и второе ограничения, они формируют матрицу A_1, $\nabla f(x^1) \neq 0$.

7². Вычисляем Δx^1: $\Delta x^1 = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, так как $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

8². Проверяем условие $\|\Delta x^1\| \leq \varepsilon_2$: $\|\Delta x^1\| = 0$, переходим к шагу 9.

9¹. Вычисляем λ^1: $\lambda^1 = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$;
$\lambda_1^1 = 8$, $\lambda_2^1 = 0$. Необходимые условия минимума выполнены.

Проверяем достаточные условия минимума: $d^2L = 2dx_1^2 + 2dx_2^2$. Дополнительные условия $dx_1 + dx_2 = 0$, $-dx_1 \leq 0$. Отсюда $dx_1 = -dx_2 \geq 0$. Следовательно, $d^2L = 4dx_2^2 > 0$. Точка $x^1 = (0;1)^T$ – точка минимума $f(x)$.

Вопросы для проверки знаний

- Выпуклое программирование. Теорема Кун-Таккера.
- Метод штрафных функций для решения задач условной минимизации: идея метода, геометрическая интерпретация, виды штрафных функций, алгоритм, пример. Основополагающая теорема для метода штрафных функций.
- Метод Лагранжа для поиска условного экстремума : идея метода, геометрическая интерпретация, алгоритм, пример.
- Метод проекции градиента для решения задач условной минимизации: идея метода, геометрическая интерпретация, алгоритм, пример.

Список литературы

1 Андреева Е.А. Вариационное исчисление и методы оптимизации: Учебное пособие / Е.А. Андреева , В.М. Цирулева. Оренбург : ГОУ ОГУ, ; Тверь: ТГУ 2004. - 575 с.

2. Болодурина И.П. Курс лекций по дисциплине «Методы оптимизации»: Учебное пособие. – Оренбург: ОГУ, 2002. – 93с.

3. Васильев О.В., Аргучинцев А. В. Методы оптимизации в задачах и упражнениях: Учебное пособие. - М..: Физматлит, 1999. - 208 с.

4. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. Учебное пособие / Ф.П. Васильев - М.: "Наука", 1988.- 552 с.

5. Галеев, Э. М. Оптимизация: теория, примеры, задачи: Учебное пособие / В. М. Тихомиров - М. : Эдиториал УРСС, 2000. - 320 с.

6. Корнеенко В.П. Методы оптимизации: Учебник /В.П.Корнеенко. – М.: Высш.шк., 2007. – 664 с.

7. Пантелеев А. В. Методы оптимизации. Практический курс. Учебное пособие / Пантелеев А. В., Летова Т. А.- Логос, 2020. - 424 с

Заключение

Электронный курс лекций «Методы оптимизации» самостоятельная учебная дисциплина. Формирование данного курса – это значительная работа, направленная на логически обоснованное завершение изучения студентами чисто математических дисциплин и взаимное обогащение курсов математики, программирования.

В результате освоения электронного курса лекций «Методы оптимизации» осуществляется:

- овладение понятийным аппаратом, теоретико-практической математической базой, направленной на изучение основ теории задач оптимизации и оптимизационных методов их решения

- изучение общих идей и принципов построения оптимизационных моделей прикладных задач; умение выбирать метод оптимизации, его параметры для поставленной задачи; умение интерпретировать результаты численного решения задач оптимизации.