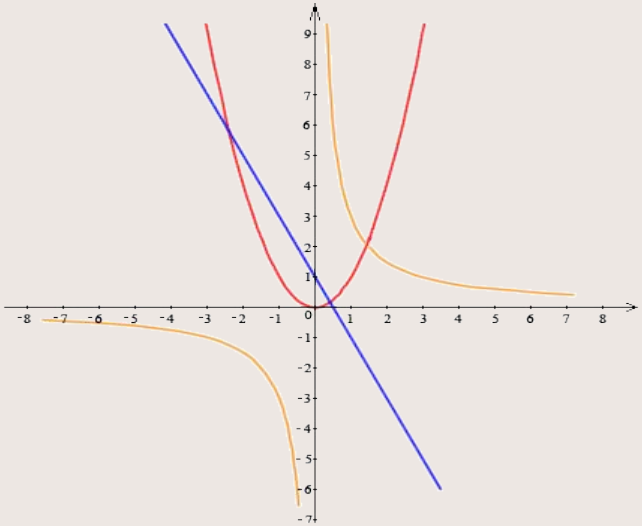
ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

к исследованию функции и построению графика функции



Исследование функции на монотонность

(т.е. определение промежутков возрастания и убывания функции).

Исследовать функцию на монотонность – это значит выяснить, на каких промежутках из области определения

функция возрастает,

а на каких – убывает.

Вспомним

О: Функция $f(x)$ называется возрастающей на промежутке I,

если для любых $x_1, x_2 \in I: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

О: Функция $f(x)$ называется убывающей на промежутке I,

если для любых $x_1, x_2 \in I: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

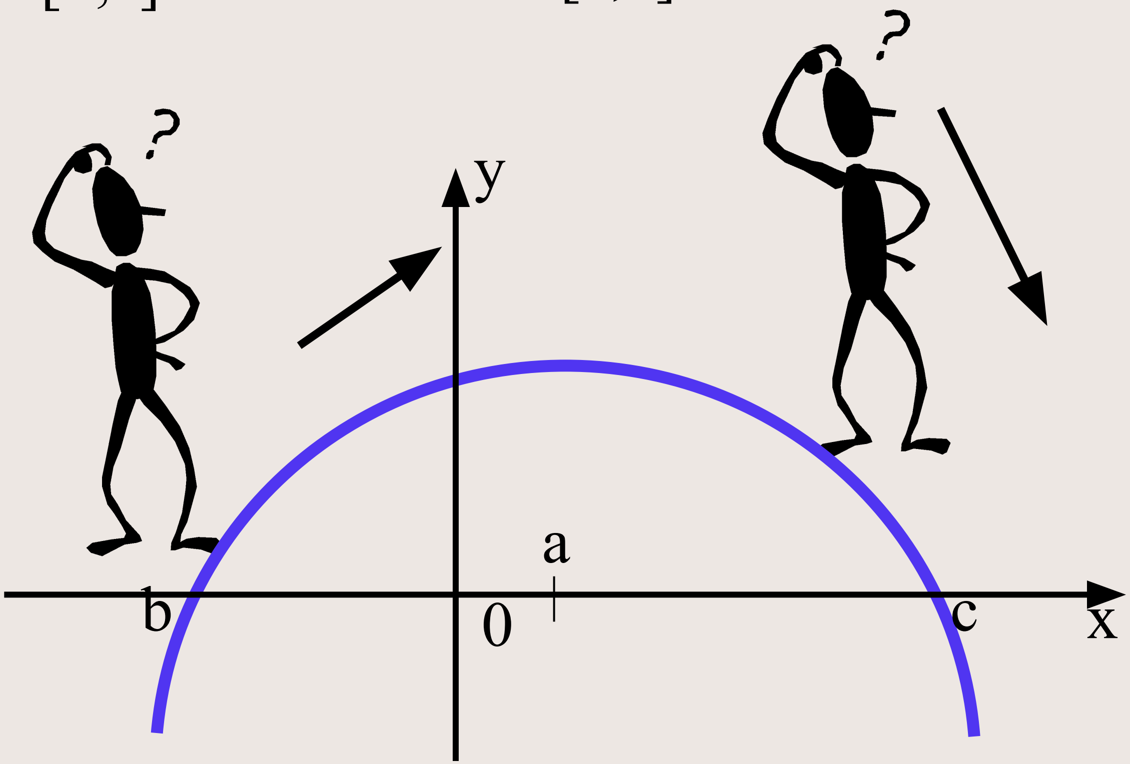
О: Функция $f(x)$ называется монотонной на промежутке I,

если она либо возрастает, либо убывает на этом промежутке.

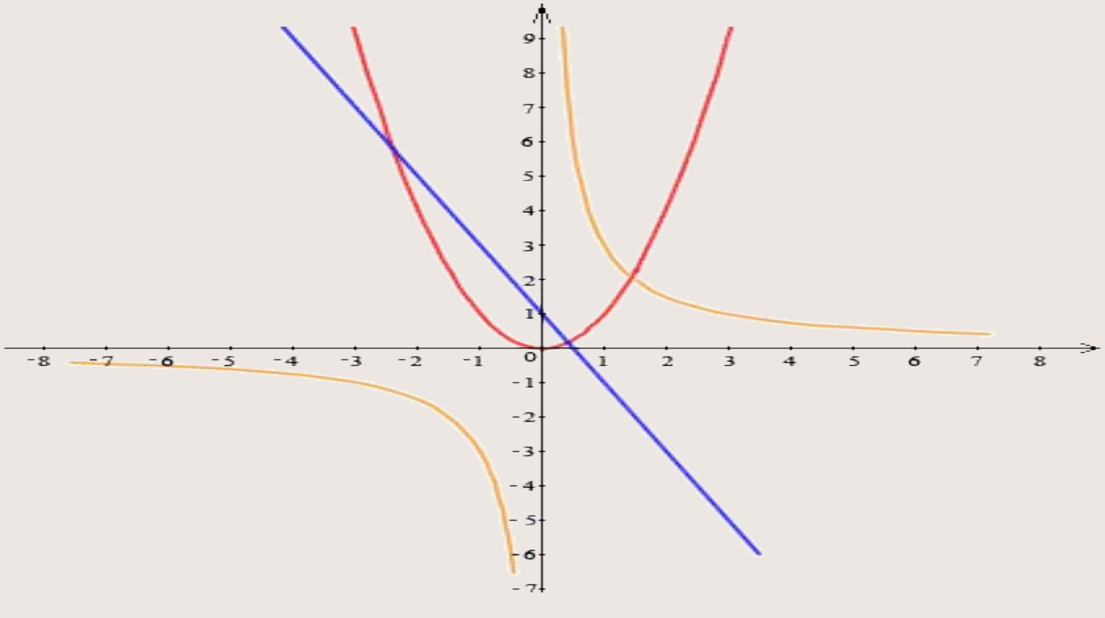
Возрастание и убывание функции можно изобразить так

Иду в гору. Функция ***возрастает*** на промежутке[b;a]

Иду под гору. Функция ***убывает*** на промежутке [a;c]



Для определения промежутков возрастания и убывания функции можно использовать и производную .



Теорема:

Если f(x) – непрерывна на промежутке и имеет f´(x), то

а) если $f'(x) > 0$, то f(x) – возрастает

б) если $f'(x) < 0$, то f(x) – убывает

в) если $f'(x) = 0$, то f(x) – постоянна

(константа)

Алгоритм исследования функции на монотонность

1) Найти производную функции f ´(x)
2) Найти **стационарные** (**f ´(x) = 0**) и **критические** (**f ´(x) не существует**) точки функции y= f(x)
3) Отметить стационарные и критические точки на числовой прямой
4) Определить знаки производной на получившихся промежутках
5) По знаку производной определить промежутки монотонности функции

(если f ´(x) > 0 – функция возрастает; если f ´(x) < 0 функция убывает; если f ´(x) =0 – функция постоянна)

Определения

- Внутренние точки области определения функции, в которых производная функции равна нулю, называются **стационарными.**
- Внутренние точки области определения функции, в которых функция непрерывна, но производная не существует, называются **критическими**

Например: **найти промежутки монотонности функции** $\mathbf{f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1}$

1) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

2) Найдем стационарные точки:

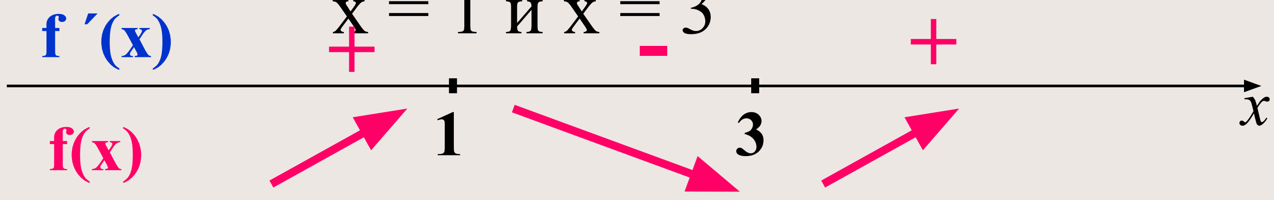
$$f'(x) = 0, \quad 3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = 1 \text{ и } x = 3$$

3)

4)



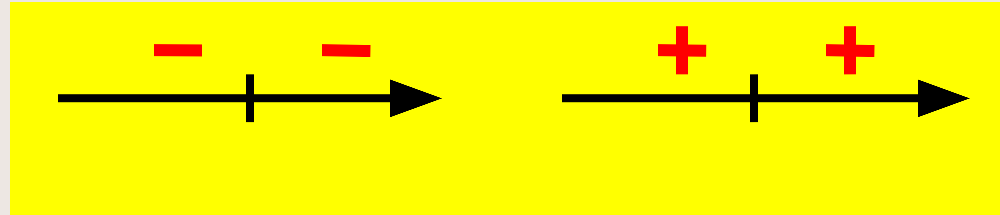
5) $\mathbf{f\,'(x) > 0}$, при $\mathbf{x \in (-\infty; 1)}$ **и** $\mathbf{(3; +\infty)}$

$\mathbf{f\,'(x) < 0}$, при $\mathbf{x \in (1; 3)}$

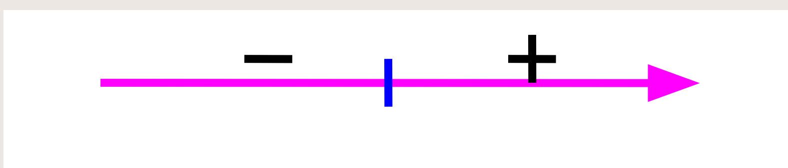
Ответ: при $x \in (-\infty; 1)$ и $(3; +\infty)$ функция возрастает, а при $x \in (1; 3)$ - убывает

Найти промежутки монотонности функции

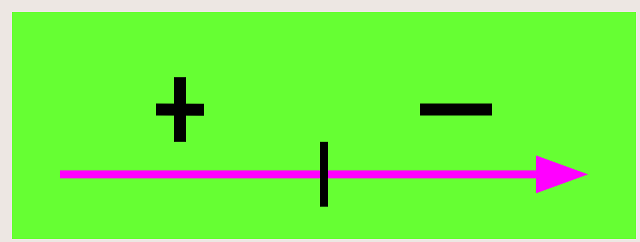
1. $y = 2x^3 + 3x^2 - 100$
2. $y = x^3 + 2x^2 + 6$
3. $y = 5x^2 + 15x - 1$
4. $y = 60 + 45x – 3x^2 - x^3$
5. $y = - 3x + 6x^2 - 100$



Нахождение точек экстремума



функции



Определения

- Точка $\mathbf{x_0}$ называется **точкой минимума** функции y = f(x), если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство

$$\mathbf{f(x) \geq f(x_0)}$$

- Точка $\mathbf{x_0}$ называется **точкой максимума** функции y = f(x), если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство

$$\mathbf{f(x) \leq f(x_0)}$$

Определения

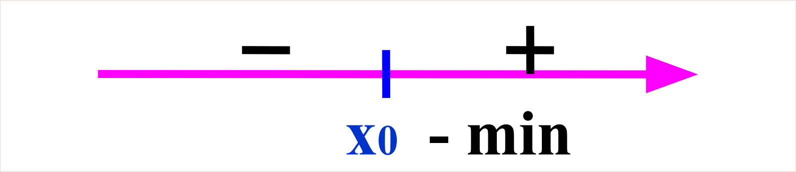
- Значение функции в точке максимума обозначают **Ymax** (но на определенном участке вокруг точки максимума, а не на всей области определения функции – это **Унаиб.**)
- Значение функции в точке минимума обозначают **Ymin** (но это не **Унаим**. функции на всей области определения)
- Точки минимума и максимума называются **точками экстремума**

Теорема

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри промежутка стационарную или критическую точку $x=x_0$. Тогда:

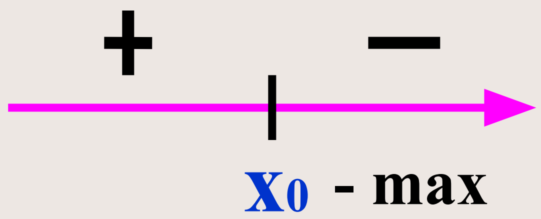
а) если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x<x_0$ выполняется неравенство $f'(x) <0$, а при $x>x_0$ - неравенство $f'(x) >0$, то

x_0 – точка минимума функции $y = f(x)$

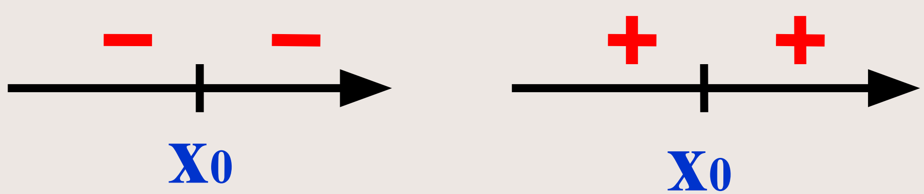


б) если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x<x_0$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$, а при $x>x_0$ - неравенство $f'(x) <0$, то

x_0 – точка максимума функции $y = f(x)$



в) если у этой точки существует такая окрестность, что в ней и слева и справа от точки x_0 знаки производной одинаковы, то в точке x_0 **экстремума нет** (происходит изменение кривизны графика функции – это **точка перегиба**)



экстремума нет

Алгоритм нахождения точек экстремума функции

1) Найти производную функции $f'(x)$
2) Найти стационарные и критические точки функции $y = f(x)$
3) Отметить стационарные и критические точки на числовой прямой
4) Определить знаки производной на получившихся промежутках
5) Если $f'(x_0)$ при переходе через точку меняет знак с «+» на «-», то эта точка – точка максимума.
   Если $f'(x_0)$ при переходе через точку меняет знак с «-» на «+», то эта точка – точка минимума.
   Если $f'(X_0)$ не меняет знак, то в этой точке экстремума нет (это точка перегиба).

Например: найти точки экстремума функции

$$y = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 11$$

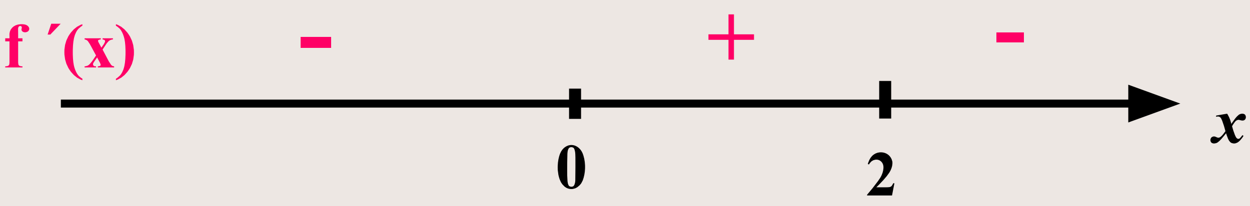
Решение. 1) **$y' = 12x^3 - 48x^2 + 48x =$**

$= 12x(x^2 - 4x + 4) = 12x(x - 2)^2$

2) **$y' = 0$** при **$x = 0$** и **$x = 2$** (стационарные точки)

3)

4)



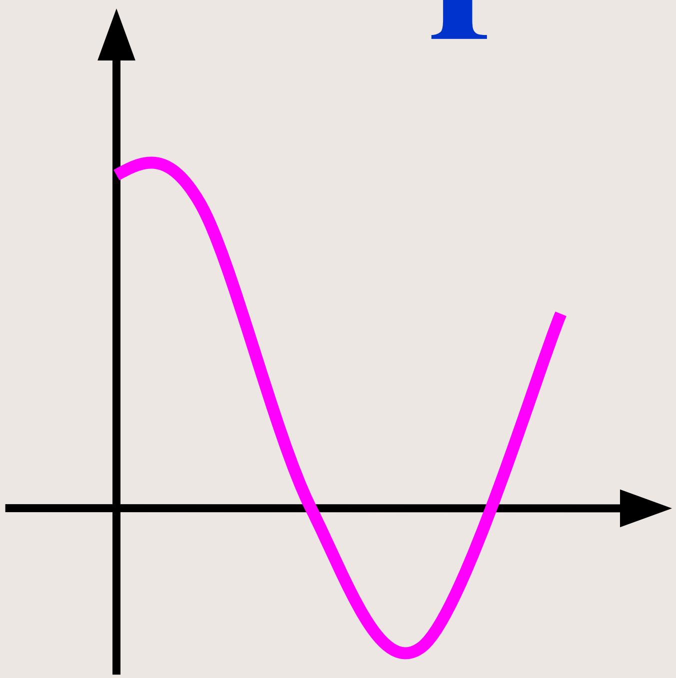
5) Значит: **$x = 0$** – **точка минимума**,

$x = 2$ - **точка максимума**.

Найдите точки экстремума функции и определите их характер

1) $y = 7 + 12x - x^2$
2) $y = 3x^3 + 2x^2 - 7$
3) $y = -2x^3 + 21x^2 + 19$
4) $y = 3x^2 - x^3$
5) $y = x + 4/x$

Построение графиков функций



В тех случаях, когда речь идет о построении графика незнакомой функции или

когда заранее трудно представить вид графика,

используют следующий алгоритм:

План построения графика функции с помощью производной

1) Найти область определения функции и определить точки разрыва если они существуют
2) Выяснить является ли функция четно или нечетной, проверить её на периодичность
3) Найти точки пересечения графика с осями координат, если это возможно
4) Найти стационарные и критические точки
5) Найти точки экстремума функции и промежутки монотонности
6) Определить промежутки вогнутости, выпуклости и точки перегиба графика функции
7) Найти координаты ещё нескольких точек (для большей точности)

Как найти промежутки выпуклости, вогнутости и точку перегиба графика функции

Промежутки выпуклости и вогнутости кривой можно находить с помощью производной.

Теорема. (признак вогнутости и выпуклости)

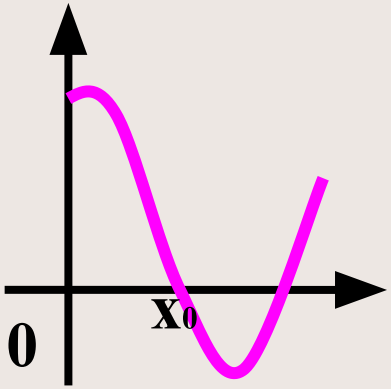
Если вторая производная функции y=f(x) в данном промежутке положительна, то кривая вогнута в этом промежутке, а если отрицательна – выпукла в этом промежутке.

Для нахождения интервалов выпуклости графика функции используют следующий алгоритм:

1) Находят $f'(x)$, а затем $f''(x)$
2) Находят точки, в которых $f''(x) = 0$
3) Отмечают полученные точки на числовой прямой и получают несколько промежутков области определения функции
4) Устанавливают знаки второй производной в каждом из полученных промежутков. Если $f''(x) < 0$, то на этом промежутке кривая выпукла; если

   $f''(x)>0$ - вогнута

Точкой перегиба кривой называется такая точка, которая отделяет выпуклую часть кривой от вогнутой её части.



Точкой перегиба кривой графика функции будут те точки, в которых $f''(x) = 0$ и при переходе через неё вторая производная меняет знак.

Найти интервалы выпуклости и точку перегиба функции

$$y = x^4 - 6x^2 + 4$$

<u>Решение.</u>

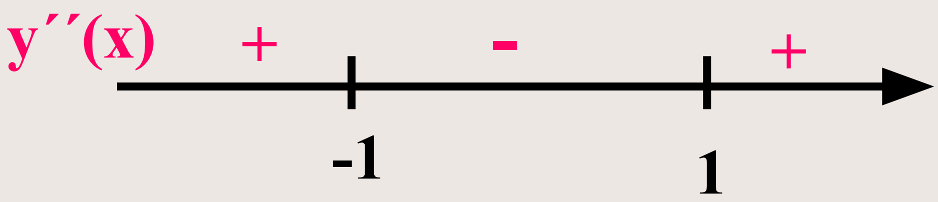
Найдем **y´(x)** и **y´´(x):**

y´(x) = $4x^3-12x$ => **y´´(x)** = $12x^2-12=12(x^2-1)$

Найдём стационарные точки второго порядка,

т.е. **y´´(x)=0** => $12(x^2-1)=0$ => $x^2-1=0$ => $x^2=1$

$\Rightarrow$ **x = ±1**



Значит: при x є (-∞; -1) и (1;+ ∞) функция вогнута, а при x є (-1:1) – выпукла; точки перегиба x= ±1

Например: исследовать функцию $y = 2x^3+3x^2-1$ и построить её график

<u>Решение</u>. $D(y) = (-\infty; +\infty)$, четность не определена

<u>Найдем стационарные точки:</u>

т.к. $y' = 6x^2+6x = 6x(x+1)$ => $6x(x+1)=0$

тогда $x=0$ и $x=-1$ стационарные точки

<u>Найдем точки экстремума:</u>

т.к.

	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; +\infty)$
$f'(x)$	+		-		+
$f(x)$	↗		↘		↗

и $x=-1$ – точка максимума

$x=0$ – точка минимума

Найдем промежутки монотонности:

при **$x \in (-\infty; -1]$ и $[0; +\infty)$ -** функция возрастает

при **$x \in [-1; 0]$ -** функция убывает

Найдем точки пересечения графика с осями координат:

если $x=0$, то $y=-1$ => **(0;-1)**

если $y=0$, то $x= -1$ => **(-1; 0)**

<u>Найдем ещё некоторые точки</u> (контрольные, дополнительные):

- т.к. **х=-1** – точка максимума, то $y_{max}=0$ => **(-1; 0)** -точка локального максимума
- т.к. **х= 0** – точка минимума, $y_{min}=-1$

  => **(0;-1)** -точка локального минимума
- если х=1, то у=4 => **(1;4)**
- если х=-2, то у=-5 => **(-2;-5)**

Удобнее все эти данные заполнять в виде таблицы.

Составим таблицу:

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\uparrow$	0 $(-1;0)$ max	$\downarrow$	-1 $(0;-1)$ min	$\uparrow$

Найдем $f''(x)$.

$$f''(x) = (6x(x+1))' = 12x+6 = 6(2x+1)$$

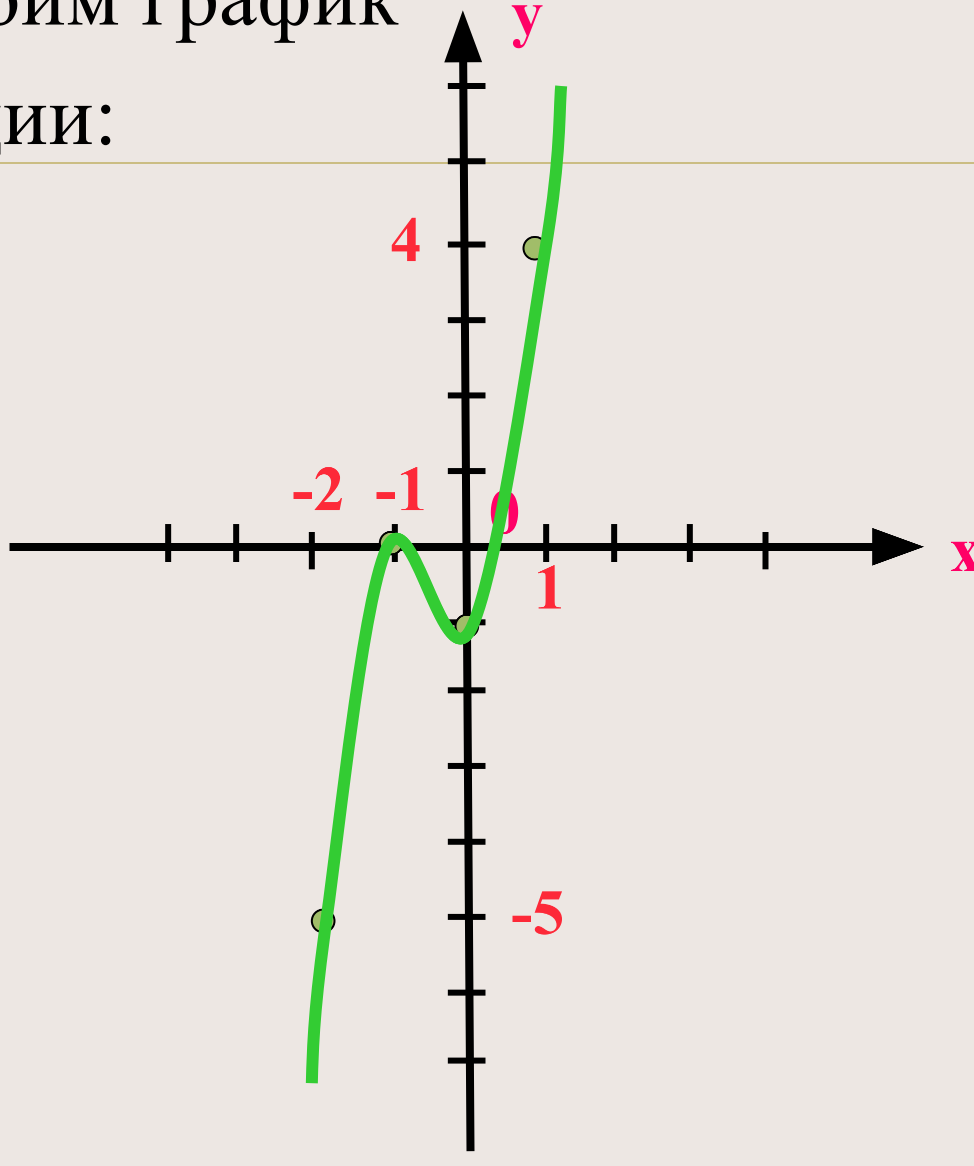
$f''(x)=0 \Rightarrow 6(2x+1)=0 \Rightarrow x = -0{,}5$ - точка перегиба

т.к. при $x=-1$(левее $x=-0{,}5$) $f''(x) <0$,

а при $x=-0{,}1$(правее $x=-0{,}5$) $f''(x) >0$

Найдем её координаты: $(-0{,}5; ?)$, если это не трудно

Построим график
функции:



Исследовать функцию и построить её график

1) $y = 3x^2 - x^3$

2) $y = -9x + x^3$

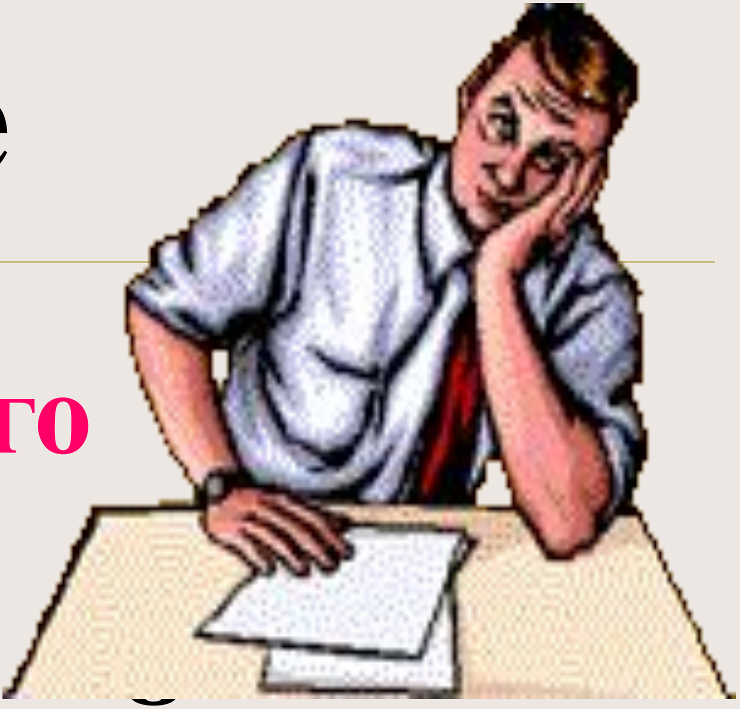
3) $y = x^3 - 3x^2 + 2$

4) $y = -x^3 + 6x^2 - 5$

5) $y = 3x^3 + x^2 - 8x – 7$

6) $y = (x)/(1+x^2)$

Нахождение наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на промежутке



Теорема

Дифференцируемая на (a;b) и непрерывная на [a;b] функция y=f(x) достигает своего наибольшего (наименьшего) значения на границе отрезка [a;b] или в одной из точек экстремума на интервале (a;b).

Если функция удовлетворяет условиям теоремы и имеет единственную точку экстремума – точку максимума (минимума), то в ней достигается наибольшее (наименьшее) значение

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции y=f(x) на отрезке [а;в]

1) Найти производную f ´(x)

2) Найти стационарные и критические точки функции и проверить принадлежат ли они отрезку [а;в]

3) Вычислить значение функции y=f(x)

- на концах отрезка, т.е в точках x=а и x=в
- в стационарных и критических точках, принадлежащих [а;в]

4) Выбрать среди найденных значений наименьшее (это и будет Унаим.) и наибольшее (это и будет Унаиб.)

Например: **найти наименьшее и наибольшее значения функции**
$y = x^3 - 3x^2 - 45x + 1$ на отрезках а) $[-4;6]$

б) $[-2;2]$

<u>Решение.</u> **а) 1) $y' = 3x^2 - 6x - 45$**

2) $y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 45 = 0 | :3$

$x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow$

$x_1 = -3 \in [-4;6]$ и $x_2 = 5 \in [-4;6]$

3) Найдём $y(-4)$; $y(6)$; $y(-3)$; $y(5)$:

Получим: $y(-4)=69$; $y(6)=-161$; $y(-3)=82$; $y(5)=-174$.

Значит: $y_{наим} = -174$; $y_{наиб} = 82$.

Решение. **б)** на **[-2;2]**

1) $y' = 3x^2 - 6x - 45$

2) $y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 45 = 0 | :3$

$x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow x_1 = -3 \notin$ **[-2;2]**

$x_2 = 5 \notin$ **[-2;2]**

3) Найдём **y(-2); y(2):**

Получили **y(-2)= 71; y(2)=-93**

Значит: **Унаим = - 93; Унаиб = 71.**

Самостоятельно найдите наименьшее и наибольшее значения функции

$$y = x^3 - 3x^2 - 45x + 1$$

на отрезке [0;6]

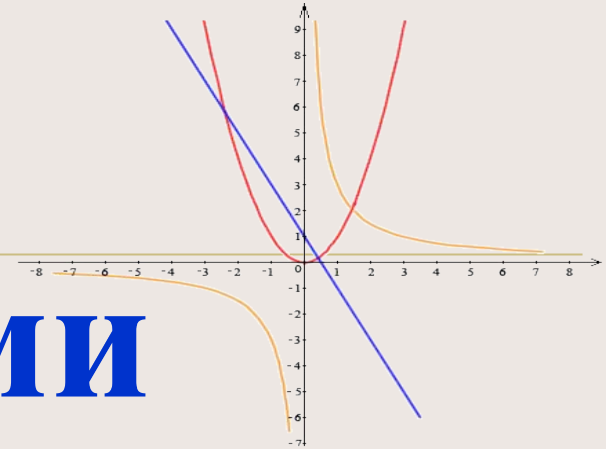
Ответ: Унаим. = -174 (достигается в точке x=5)

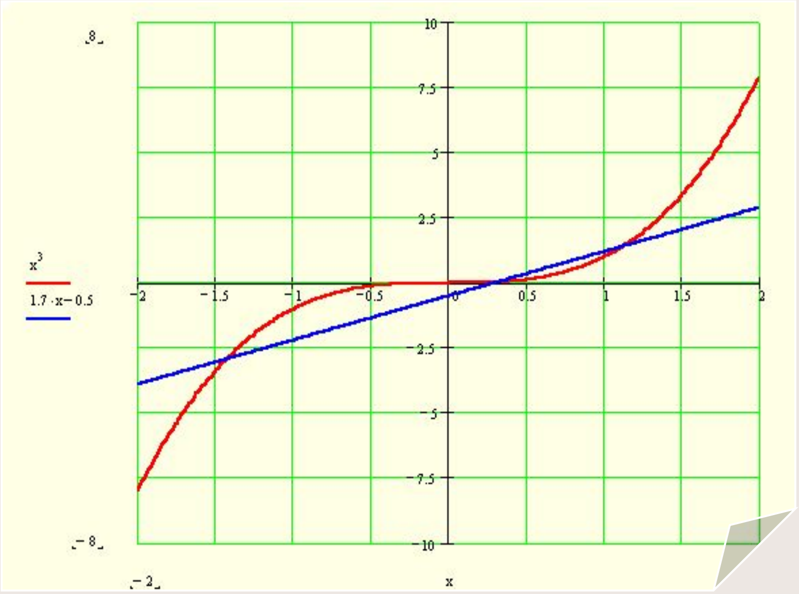
Унаиб. = 1 (достигается в точке x=0)

Найдите наименьшее и наибольшее значения функции на заданном промежутке.

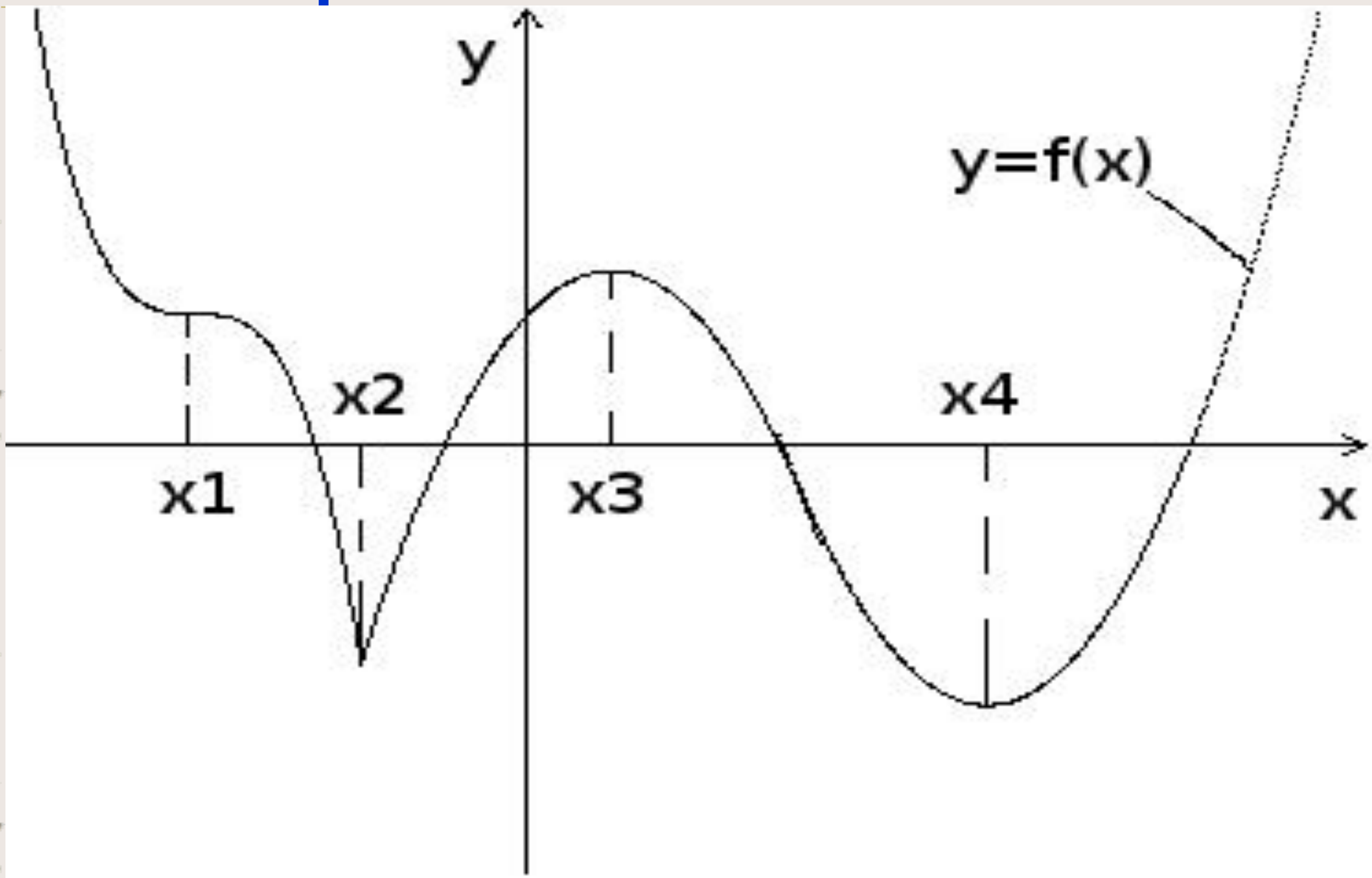
1) $y = x^2 - 8x + 19$ на $[-1;5]$
2) $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 1$ на $[-2;3]$
3) $y = x + 4/(x+1)$ на $[-2;0]$
4) $y = x^3 - 2x^2 + 1$ на $[0{,}5;+\infty)$
5) $y = 0{,}2x\square - x^2$ на $(-\infty; 1]$

Работа
с графиками
функций





№ 1. По графику функции ответьте на вопросы



1) Отметьте стационарные точки.

2) Что можно сказать о производной в точке $\mathbf{x_1}$?

3) Назовите точки экстремума.

4) Что можно сказать о производной на $\mathbf{(-\infty;\ x_2)}$?

5) Укажите промежутки возрастания функции.

6) Отметьте критические точки

Проверим ответы

1. (x_1, x_3, x_4).
2. не существует.
3. (x_2, x_3, x_4).
4. $f'(x) \leq 0$.
5. $[x_2; x_3] \cup [x_4; +\infty)$ функция возрастает.
6. x_2

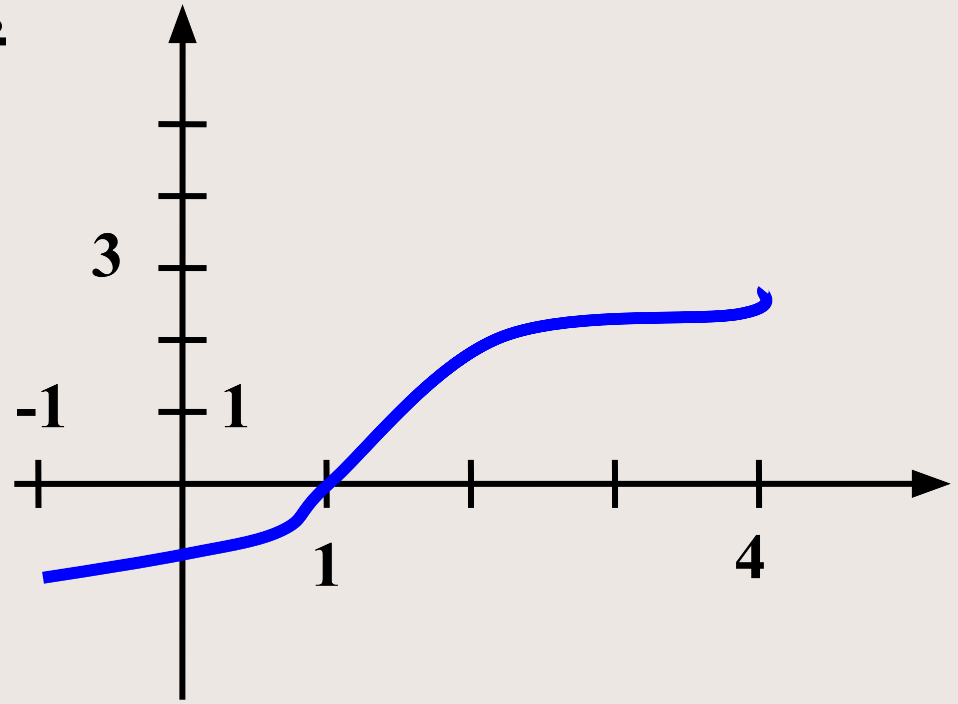
№ 2. **Постройте график непрерывной функции y = f(x), определенной на [а;в], удовлетворяющей следующим условиям:**

а) $а=-1$, $в=4$, $f'(x)>0$ при $-1<x<4$, $f(1)=0$, $f(4)=3$

б) $а=0$, $в=5$, $f'(x)<0$ при $0<x<5$, $f(2)=0$, $f(3)=-2$

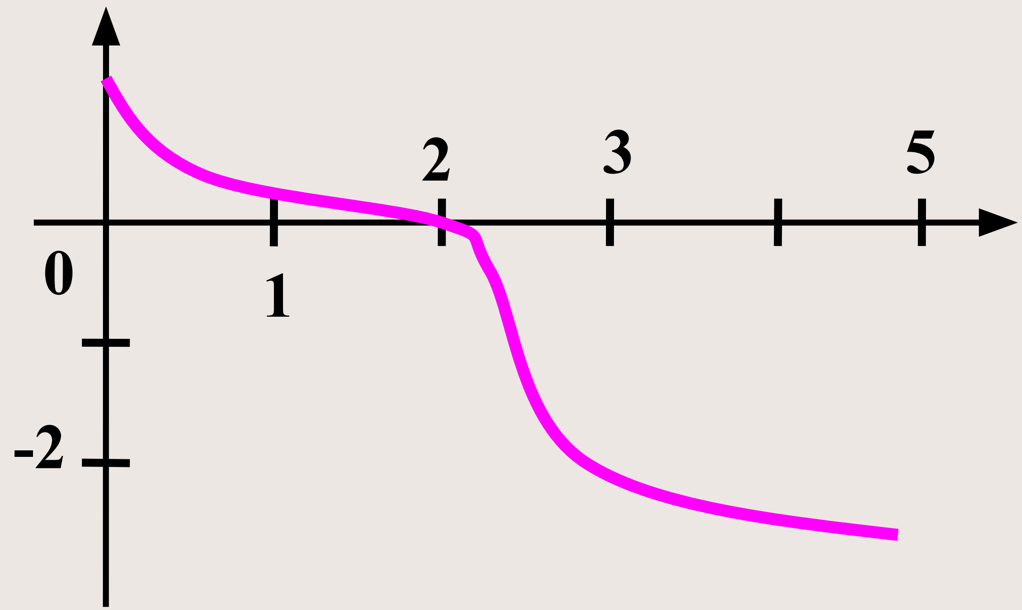
График.

а)

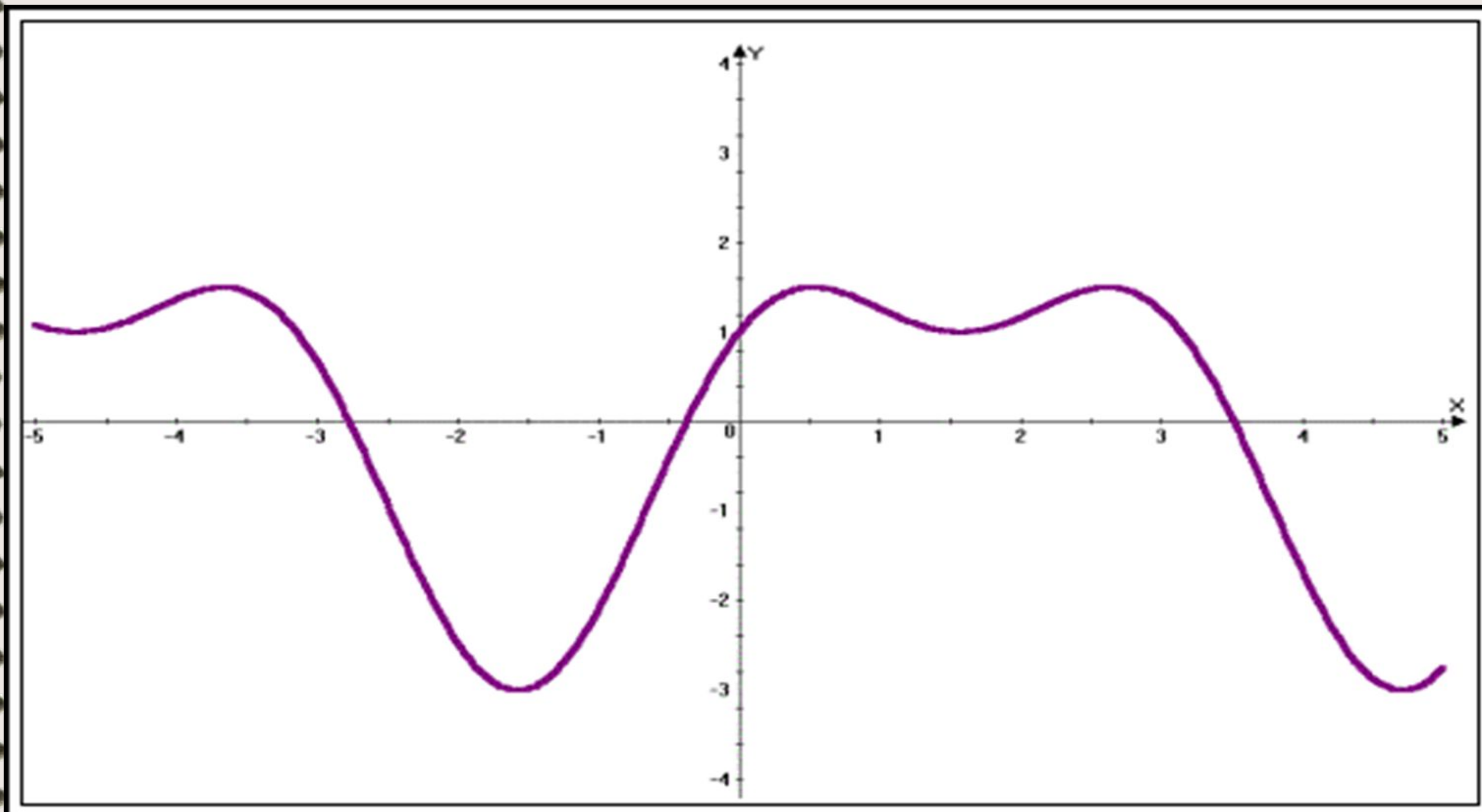


б) а=0, в=5, $f'(x)<0$ при $0<x<5$, $f(2)=0$, $f(3)=-2$

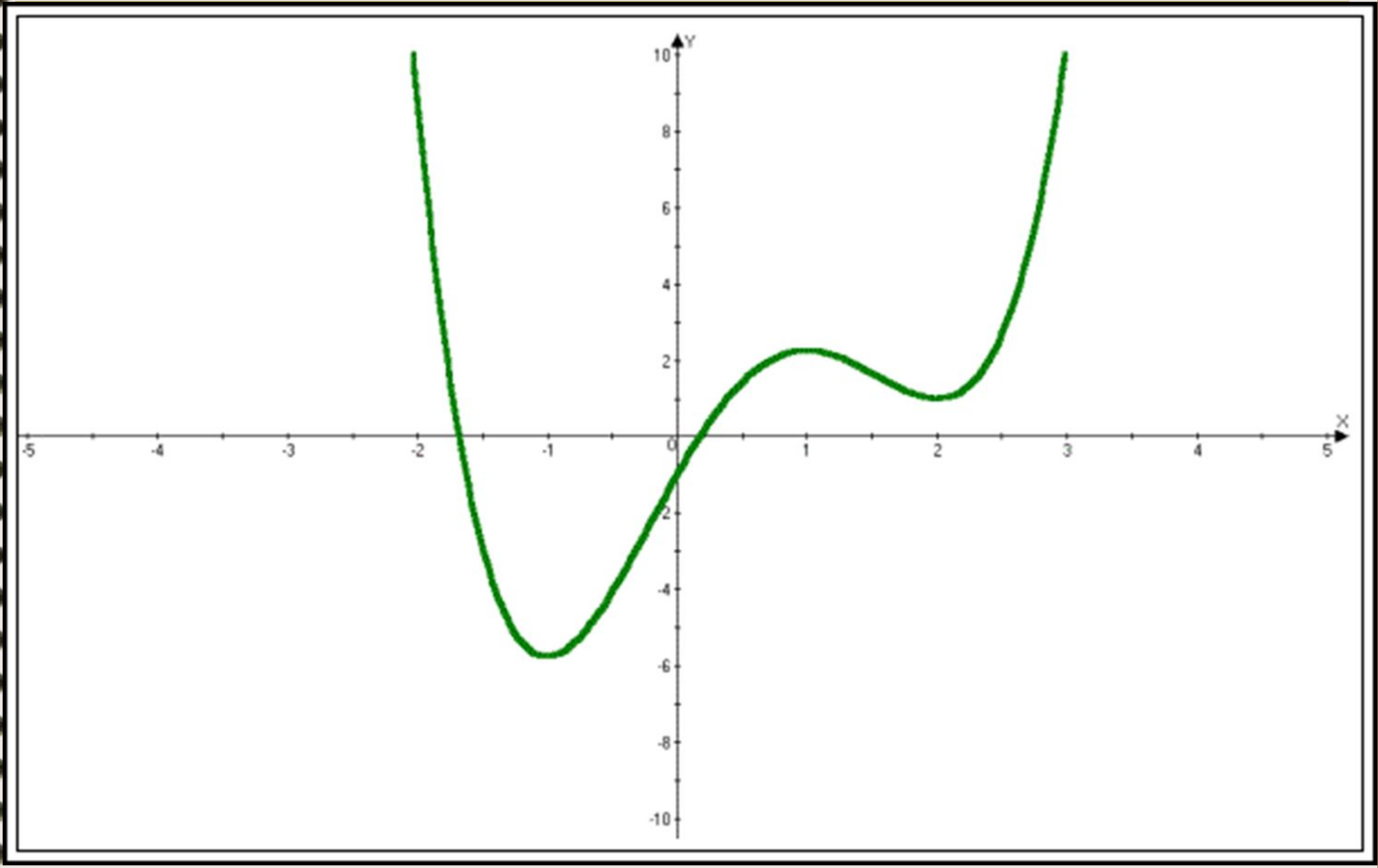
График.



№ 3. **По графику производной некоторой функции укажите интервалы, на которых функция монотонно возрастает, убывает, имеет максимум, имеет минимум.**



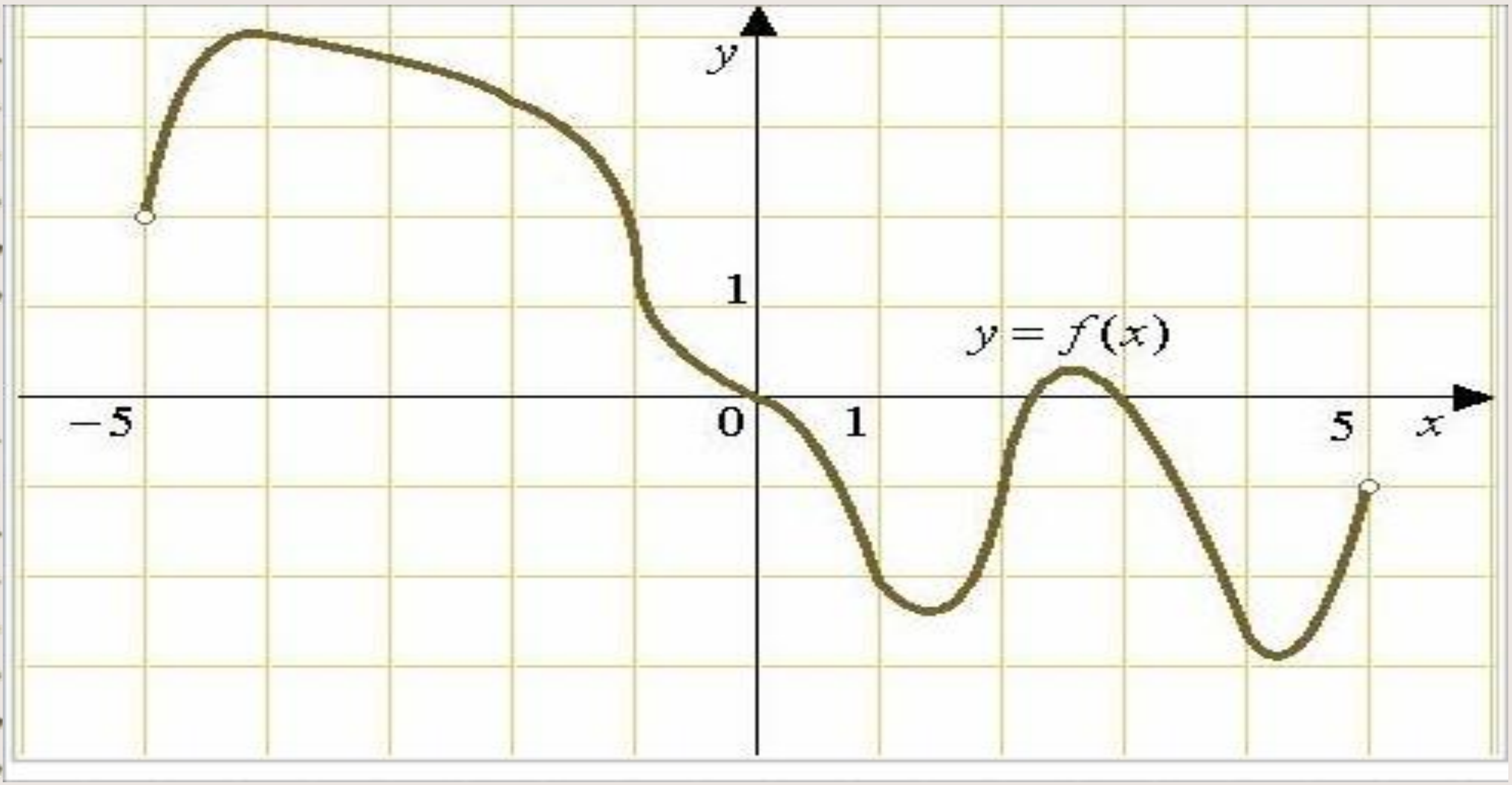
№ 4. **На рисунке изображён график производной функции y=f(x). Сколько точек максимума имеет эта функция? Назовите их.**



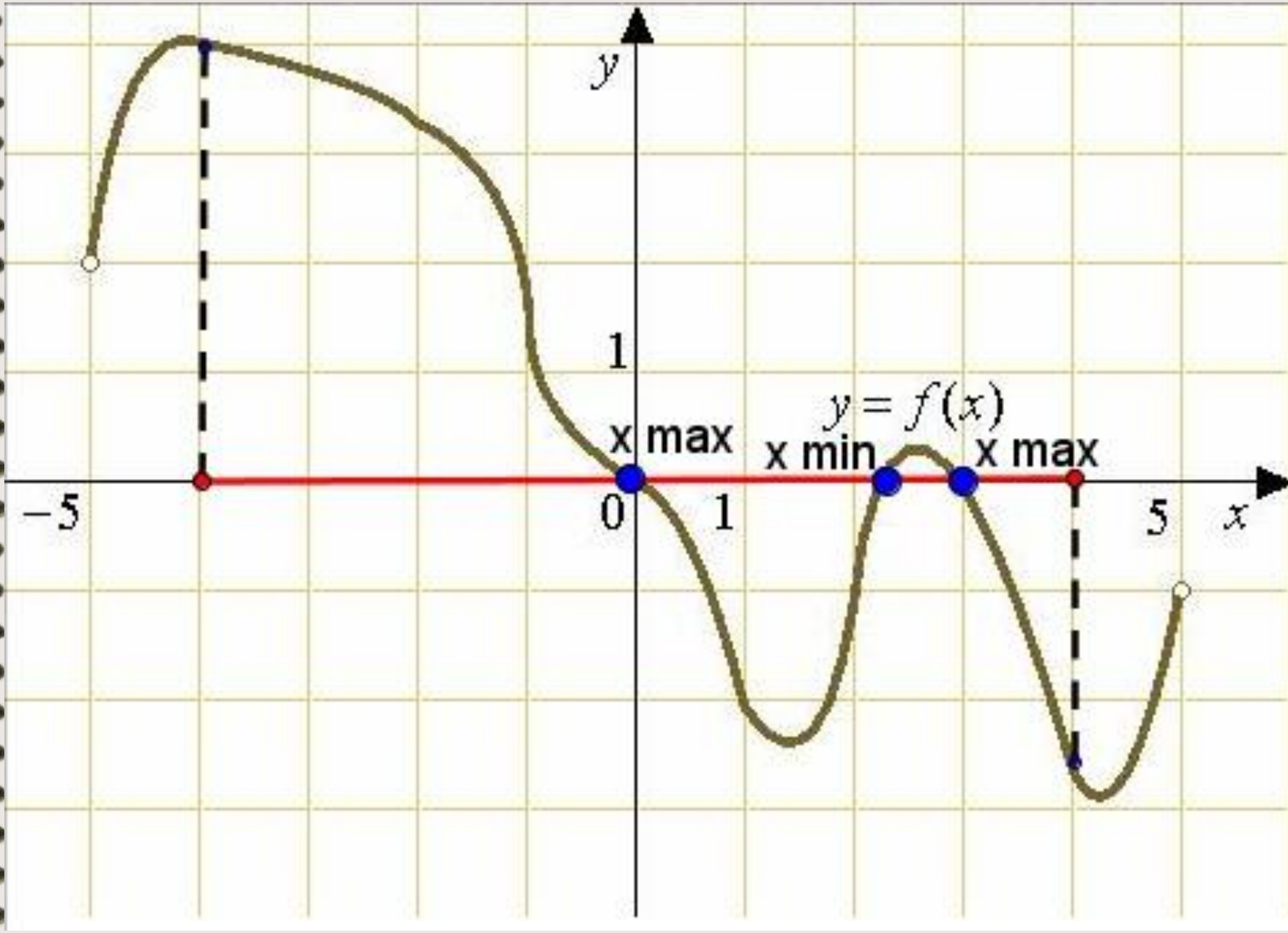
№ 5. **По графику функции определить:**

а) сколько точек экстремума имеет функция?

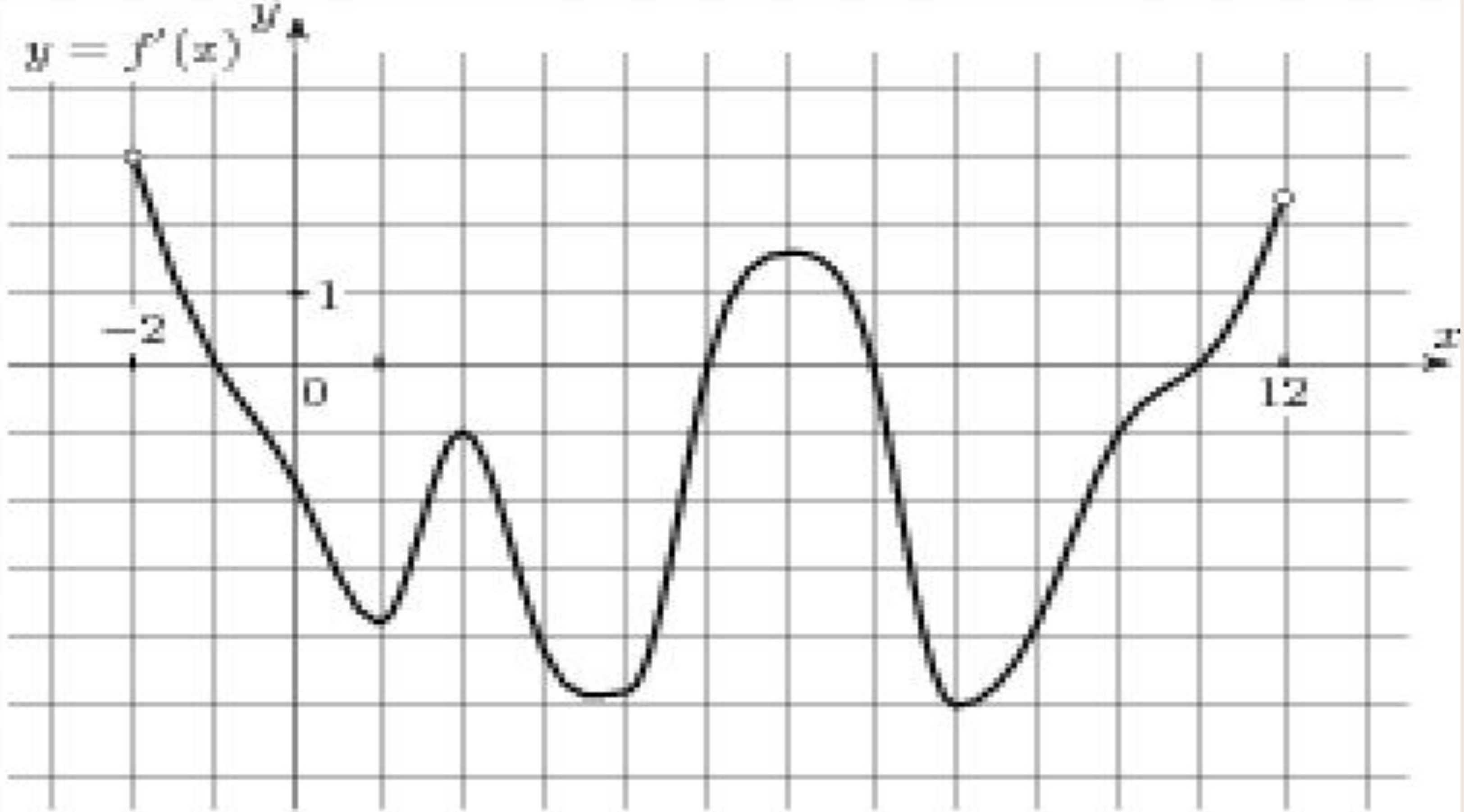
б) при каких х принадлежащих [-4;4]функция достигает наименьшего и наибольшего значения?



Ответ



№ 6. **Дан график производной некоторой функции. Определить промежутки, на которых функция убывает?**



Ответ