

□ Похідна за напрямком.
Градiєнт. Застосування
диференціала до
наближених обчислень

1. Опрацювати наступні питання лекційного матеріалу:

- частинні похідні функцій багатьох змінних;
- повний диференціал функції;
- частинні похідні другого і вищих порядків;
- повний диференціал другого порядку функцій двох змінних.

2. Самостійно опрацювати питання:

2.1. Похідна за напрямком. Градієнт.

2.2. Застосування диференціала до наближених обчислень.

2.1. Похідна за напрямком. Градієнт.

Означення. Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки $P_0(x_0; y_0)$

l — деякий промінь з початком в точці $P_0(x_0; y_0)$; $P(x; y)$ — точка на цьому промені, яка належить околу, що розглядається Δl — довжина відрізка PP_0 .

Границя $\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{f(P) - f(P_0)}{\Delta l}$, якщо вона існує, називається *похідною функції* $z = f(x; y)$ за напрямком l в точці P_0 і позначається $\frac{\partial z}{\partial l}$.

Теорема 4. Якщо функція $y = f(x)$ має в точці $P_0(x_0; y_0)$ неперервні частинні похідні, тоді в цій точці існує похідна за будь-яким напрямом $l = (\cos \alpha; \cos \beta)$ причому

$$\frac{\partial z}{\partial l} \Big|_{P_0} = \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{P_0} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{P_0} \cdot \cos \beta$$

Де $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{P_0}$ і $\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{P_0}$ — значення частинних похідних функції $z = f(x; y)$ у точці $P_0(x_0; y_0)$

Похідна за напрямом l характеризує швидкість змінювання функції $z = f(x; y)$ в точці P_0 за напрямом l

Наприклад. Знайти похідну функції $u = x^2 + y^2$ у точці $(1; 1)$ за напрямом $\vec{l} = (\cos 30^\circ; \cos 60^\circ)$.

Знайдемо та обчислимо частинні похідні в точці $(1; 1)$ функції $u = x^2 + y^2$

$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(1;1)} = 2x \Big|_{(1;1)} = 2, \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(1;1)} = 2y \Big|_{(1;1)} = 2$. Тоді за формулою похідної за напрямом дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = 2 \cos 30^\circ + 2 \cos 60^\circ = 1 + \sqrt{3}.$$

Означення. Вектор з координатами $\left(\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y} \right)$, який характеризує напрям максимального зростання функції

$z = f(x; y)$ у точці $P_0(x_0; y_0)$, називається *градієнтом функції* $z = f(x; y)$ у цій точці і позначається

$$\boxed{\text{grad} z = \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{P_0} \cdot i + \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{P_0} \cdot j} \quad (2.1.2)$$

Наприклад. Знайти градієнт функції $u = 4 - x^2 - 2y^2 - xy + z^2 y^2$ у точці $(1; 2; -1)$.

Знайдемо та обчислимо частинні похідні в точці $(1; 2; -1)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(1;2;-1)} = (-2x - y) \Big|_{(1;2;-1)} = -4, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(1;2;-1)} = (-4y - x + 2z^2 y) \Big|_{(1;2;-1)} = -2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{(1;2;-1)} = 2zy^2 \Big|_{(1;2;-1)} = -8 \quad . \quad \text{Тоді} \quad \overline{\text{grad}} \ u = -4\overline{i} - 2\overline{j} - 8\overline{k}.$$

2.2. Застосування диференціала до наближених обчислень.

Якщо функція $y = f(x)$ диференційована в точці $P_0(x_0; y_0)$ то виконується рівність $\Delta z \approx A\Delta x + B\Delta y$ або $f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0) \approx f'_x(x_0; y_0)\Delta x + f'_y(x_0; y_0)\Delta y$

Узявши в наближеній рівності $a = x_0 + \Delta x, b = y_0 + \Delta y$ дістанемо:

$$f(a; b) \approx f(x_0; y_0) + f'_x(x_0; y_0)(a - x_0) + f'_y(x_0; y_0)(b - y_0) \quad (2.2.1)$$

На формулі (2.2.1) ґрунтується алгоритм використання диференціала для наближених обчислень.

Наприклад. Обчислити наближено $\sin 28^\circ \operatorname{tg} 48^\circ$, замінюючи приріст функції її повним диференціалом. Відомо, що $\sin 30^\circ = 0,5; \operatorname{tg} 45^\circ = 1$. Треба обчислити $\sin(30^\circ - 2^\circ) \cdot \operatorname{tg}(45^\circ + 3^\circ)$. Розглянемо функцію $z = \sin x \operatorname{tg} y$.

Введемо позначення: $x_0 = \frac{\pi}{6}(30^\circ), y_0 = \frac{\pi}{4}(45^\circ), \Delta x \approx -2 \cdot 0,0175 = -0,035(-2^\circ)$

$\Delta y \approx 3 \cdot 0,0175 = 0,0525(+3^\circ)$. Скористуємось наближеною формулою:

$$f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) \approx f(x_0; y_0) + df(x_0; y_0), \text{ тобто}$$

$$f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) \approx f(x_0; y_0) + f'_x(x_0; y_0)\Delta x + f'_y(x_0; y_0)\Delta y \quad (2.2.2)$$

Знайдемо

$$f'_x(x; y) = \cos x \operatorname{tg} y, f'_y(x; y) = \sin x \frac{1}{\cos^2 y}$$

$$f(x_0; y_0) = f\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{6} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 0,5 \cdot 1 = 0,5,$$

$$f'_x(x_0; y_0) = \cos \frac{\pi}{6} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad f'_y(x_0; y_0) = \sin \frac{\pi}{6} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = 1$$

Підставляючи в (2.2.2), одержимо: $\sin 28^\circ \operatorname{tg} 48^\circ = \sin(30^\circ - 2^\circ) \cdot \operatorname{tg}(45^\circ + 3^\circ) =$

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{6} + \Delta x\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \Delta y\right) &\approx 0,5 + \frac{\sqrt{3}}{2}(-0,035) + 1 \cdot 0,0525 \approx \\ &\approx 0,5000 + 0,0525 - 0,0303 \approx 0,522 \end{aligned}$$

Завдання для самостійної роботи:

1. Знайти градієнт функції $\operatorname{grad} Z$ та величину градієнта $|\operatorname{grad} Z|$ функції $z = f(x; y)$ в точці $P_0(x_0; y_0)$

а) $z = x^2 + 2y^2 - 5, \quad P_0(-2; 1);$

б) $z = 4 - x^2 - y^2, \quad P_0(1; 2);$

в) $z = (x - y)^2, \quad P_0(1; 1);$

г) $z = \frac{xy}{x^2 + y^2 + 1}, \quad P_0(0; 3);$

д) $u = x^2 + y^2 - z^2, \quad P_0(1; -1; 2);$

е) $u = 4 - x^2 - y^2 + z^2, \quad P_0(3; 2; 1);$

є) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad P_0(-1; 2; 0);$

ж) $u = xyz, \quad P_0(3; -1; 2);$

2. Обчислити наближено значення:

а) $(1,08)^{3,96}$;

б) $\sin 1,59 \operatorname{tg} 3,09$;

в) $1,94^2 \cdot e^{0,12}$;

г) $2,68^{\sin 0,05}$;

д) $(1,97)^{1,03}$;

е) $(2,02)^{0,96}$;

є) $\sin 29^\circ \operatorname{tg} 47^\circ$;

ж) $\cos 62^\circ \operatorname{tg} 43^\circ$;

з) $2,003^2 \cdot 3,998^3 \cdot 1,002^2$;

и) $\sqrt{2,89^2 + 3,96^2}$;

і) $\sqrt{1,03^3 + 1,99^3}$;

й) $\sqrt{1,04^3 + 1,98^3 + 3,02^3}$;

к) $\sqrt{0,998^3 + 3,003^3 + 2,005^3}$;

л)
$$\frac{1}{\sqrt{5,97^2 + 8,05^2}} \cdot$$