Властивості тригонометричних функцій

Алгебра
10 клас

Вивчаючи матеріал цього параграфу ви дізналися:

- Кутом в 1 радіан називають центральний кут кола,який спирається на дугу, довжина якого дорівнює радіусу кола;
- Радіанна і градусна міра кута пов'язані формулами

$$1\text{рад} = \left(\frac{180^\circ}{\pi}\right) \qquad 1^\circ = \left(\frac{\pi}{180}\right)$$

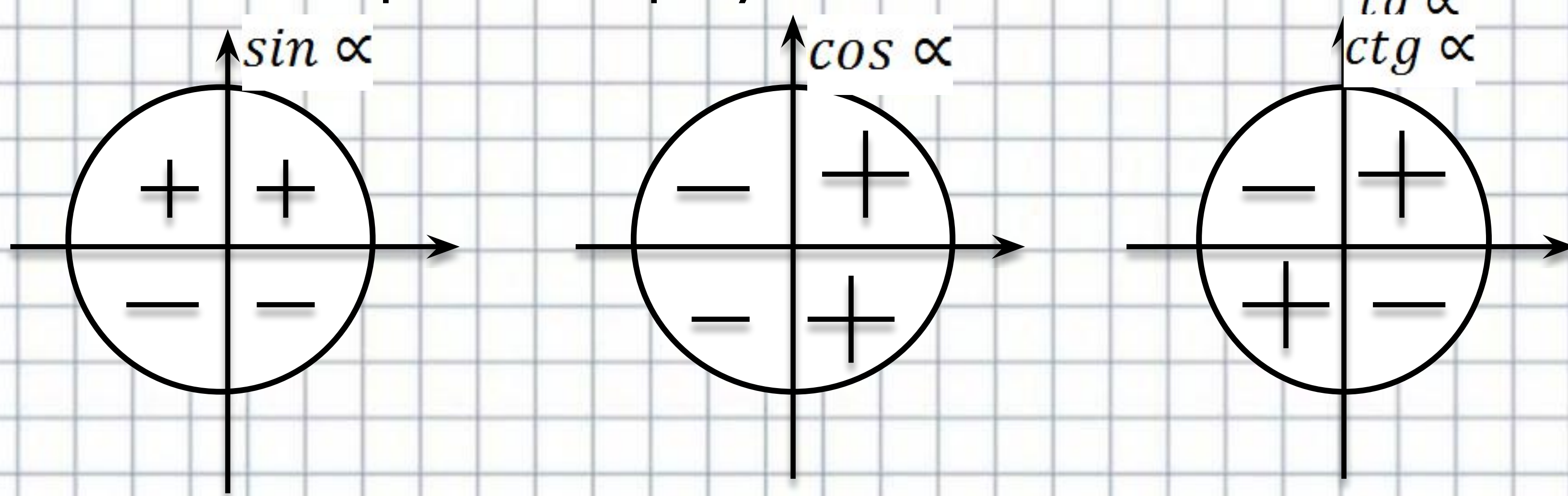
- Косинусом і синусом кута повороту $\propto$ називають відповідно абсцису x і ординату y точки P(x;y) одиничного кола,яку отримано з точки P_0 (1;0) у результаты повороту навколо початку координат на кут $\propto$;
- Тангенсом кута повороту $\propto$ називають выдношення синусу кута до його косинуса:

$$tg \propto = \frac{sin \propto}{cos \propto}$$

- Котангенсом кута повороту $\propto$ називають відношення косинуса до синуса:

$$ctg \propto = \frac{\cos \propto}{\sin \propto}$$

- Значення синуса,косинуса,тангенса і котангенса кута $\propto$ залежно від того,кутом якої чверті є кут $\propto$,мають знаки які схематично зображені на рисунках:



- Функція косинус є парною,а синус,тангес і котангес – непарними:

$$\cos(-\propto) = cos \propto$$
$$\sin(-\propto) = -sin \propto$$
$$tg(-\propto) = -tg \propto$$
$$ctg(-\propto) = -ctg \propto$$

- Функцією f називають періодичною,якщо існує таке число T$\neq$ 0,що будь-якого x з області визначення функції f виконуються рівності f(x-T)= f(x)= f(x+T). Число T називають періодом функції f.Якщо серед усіх періодів функції f існує додатний найменший період,то його називають головним періодом функції f;

- Функції y=sinx і y=cosx є періодичними з головним періодом, рівним 2π ,а функції y=tgx і y=ctgx є періодичними з головним періодом рівним π ;
- Функції y=sinx , y=cosx , y=tgx , y=ctgx мають властивості, наведені в таблицях:
- Властивості функції y=sinx

Область визначення	**R**
Область значень	$[-1;1]$
Періодичність	Періодична з головним періодом,який дорівнює 2π
Проміжки знакосталості	$sinx > 0$ на кожному з проміжків виду $(2\pi n; \pi + 2\pi n), n \in Z$ $sinx < 0$ на кожному з проміжків $(\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n), n \in Z$

Парність	Непарна
Зростання/Спадання	Зростає на кожному з проміжків виду $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+\ 2\pi n\right], n\in Z$ Спадає на кожному з проміжків виду $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right], n\in Z$
Найбільше і найменше значення	Найбільшого значення,яке дорівнює 1,набуває в точках виду $\frac{\pi}{2}+2\pi n$ $n\in Z$ Найменшого значення,яке дорівнює -1,набуває в точках виду $-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$

Властивості функції y=cosx

Область визначення	**R**
Область значень	$[-1;1]$
Періодичність	Періодична з головним періодом,який дорівнює 2 π
Проміжки знакосталості	$cosx > 0$ на кожному з проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right),n\in Z$ $cosx < 0$ на кожному з проміжків виду $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right),n\in Z$
Парність	Парна
Зростання/Спадання	Зростає на кожному з проміжків $[\pi+2\pi n;2\pi+2\pi n],n\in Z$ Спадає на кожному з проміжків $[2\pi n;\pi+2\pi n],n\in Z$
Найбільше і найменше значення	Найбільше значення,яке дорівнює 1,набуває в точках виду $2\pi n$ $n\in Z$ Найменше значення яке дорівнює -1,набуває в точках виду $\pi+2\pi n$ $n\in Z$

Графіки тригонометричних функцій мають такий вигляд

y=sinx

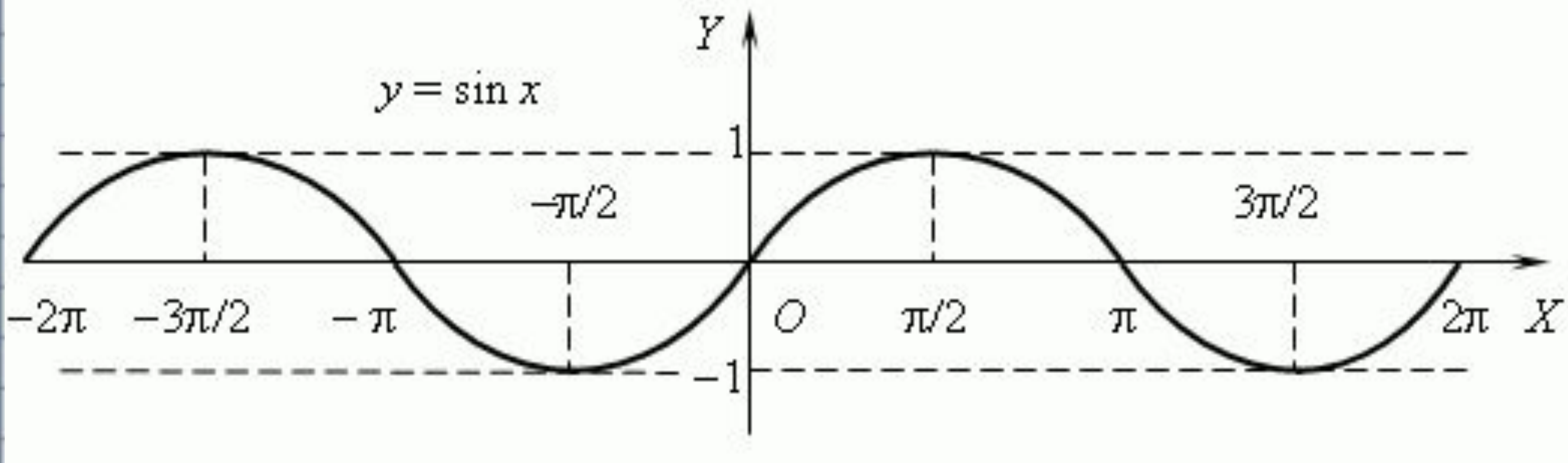
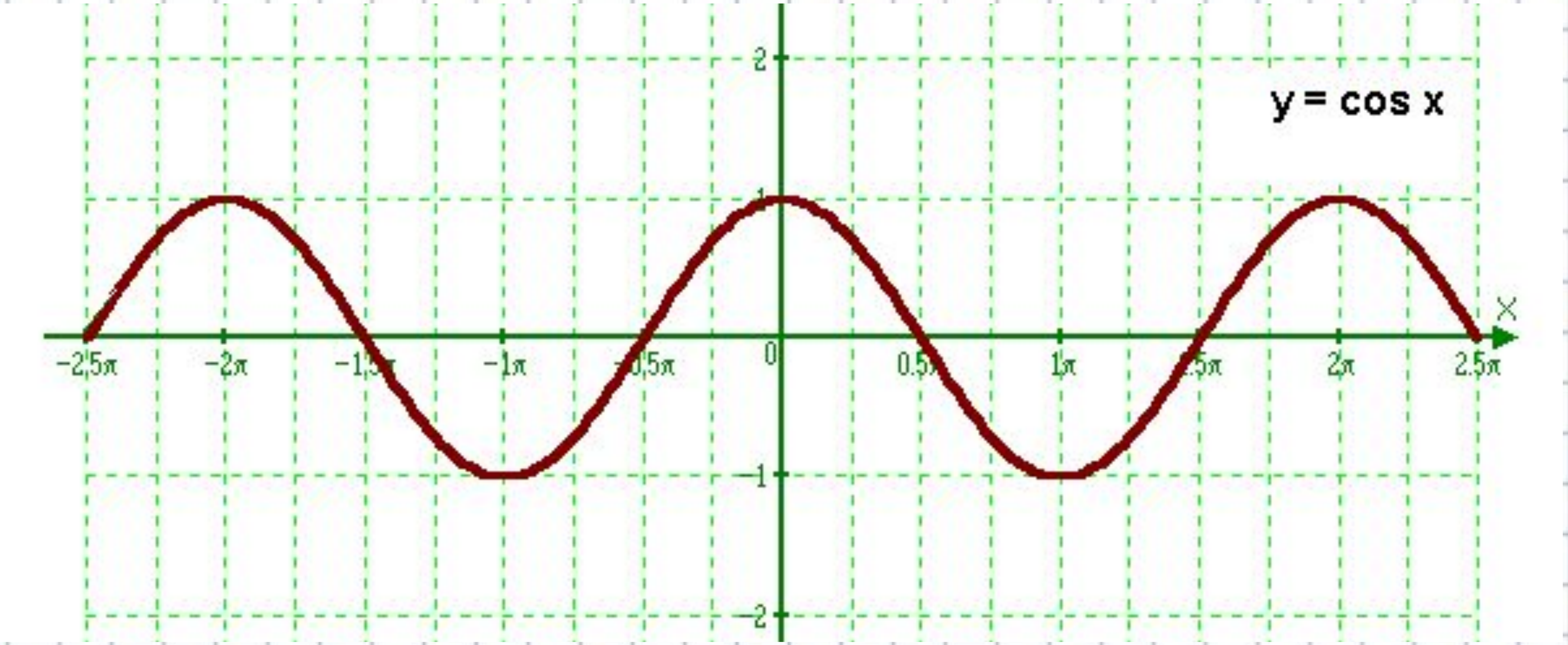


Рис. 19

y=cosx



y=tgx y=ctgx

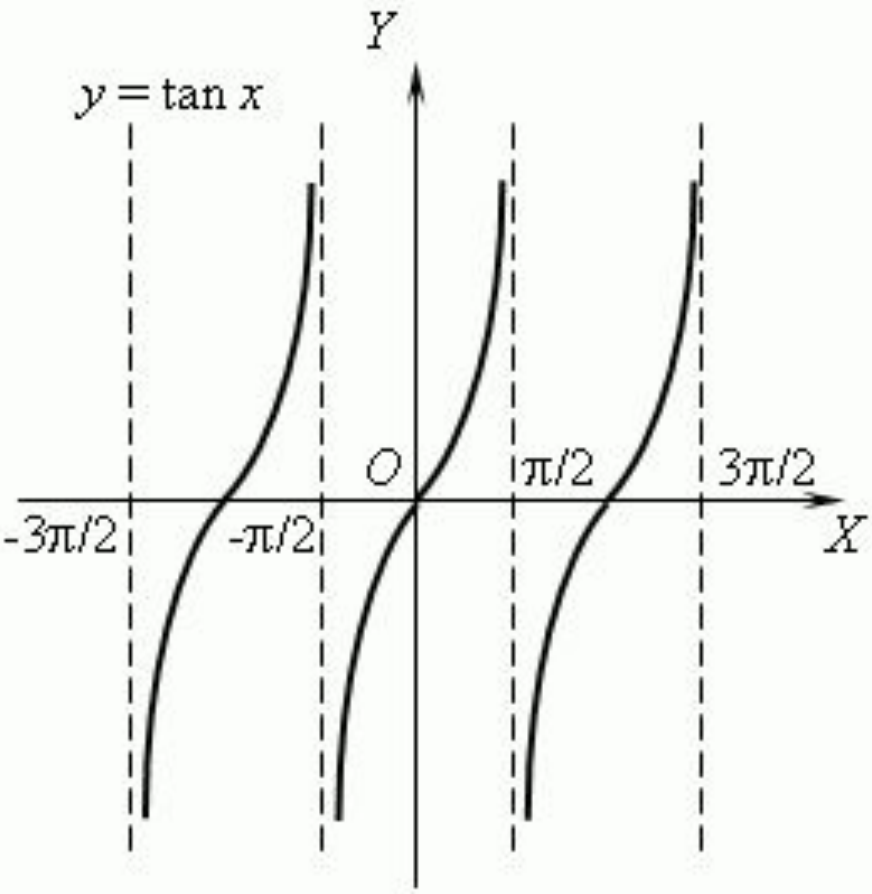


Рис. 21

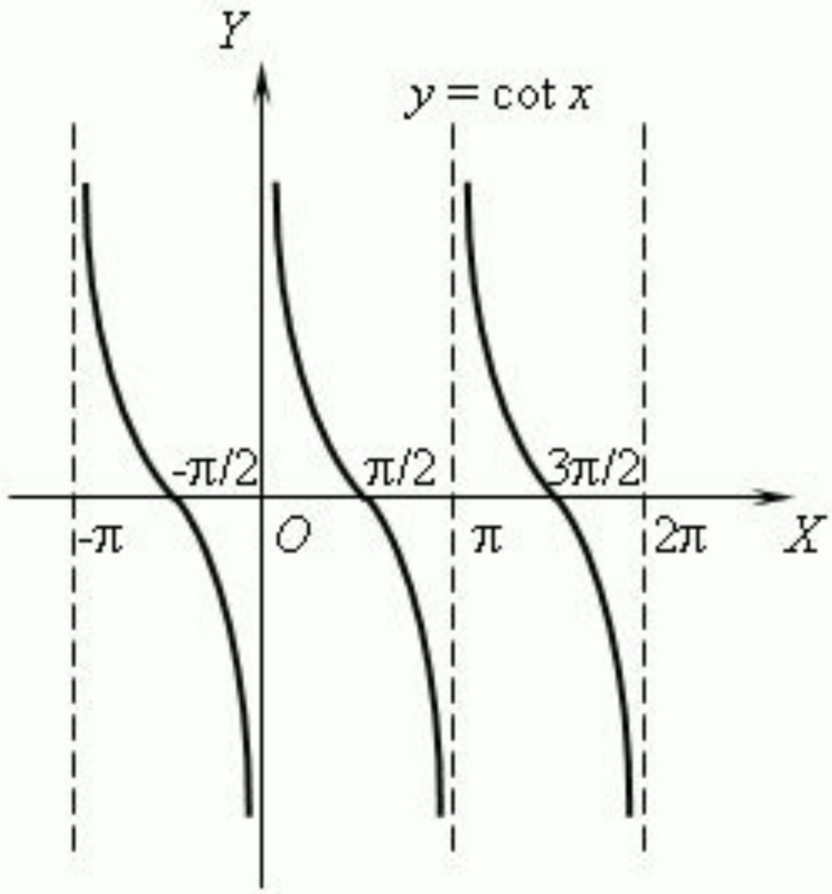


Рис. 22

Тригонометричні функції одного і того самого аргументу пов'язані формулами:

$$\sin^2 \propto + \cos^2 \propto = 1$$

$$1 + tg^2 = \frac{1}{\cos^2 \propto}$$

$$1 + ctg^2 \propto = \frac{1}{\sin^2 \propto}$$

$$tg \propto ctg \propto = 1$$

Формули,які виражають $cos(\alpha \pm \beta), sin(\alpha \pm \beta), tg(\alpha \pm \beta)$ через тригонометричні функції кутів α β ,називають формулами додавання:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}; \quad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

- Формули,які дозволяють зводити пошук значень тригонометричних функцій будь-якого кута до пошуку їх значень для кута від 0 до $\frac{\pi}{2}$, називають формулами зведення:

u	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\pi-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$
$\sin u$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos u$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\mathrm{tg}\, u$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}\, u$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$

- Для того,щоб записати будь-яку з формул зведення, можна керуватися такими правилами:

1) У правій частині рівності ставлять той знак,який має ліва частина при $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

2) Якщо в лівій частині формули аргумент має вигляд $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ або $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$,то синус міняють на косинус,тангес на котангес і навпаки. Якщо аргумент має вигляд $\pi \pm \alpha$,то зміни не відбувається

- Формули,які виражають тригонометричні функції аргументу 2ά через тригонометричні функції аргументу ά, називають формули подвійного аргументу:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\,\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\,\alpha}$$

$$\mathrm{ctg}\,2\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^2\,\alpha - 1}{2\,\mathrm{ctg}\,\alpha}$$

- Формули,які дозволяють знайти $cos^2 \propto$ $sin^2 \propto$, якщо відомо cos2ἀ,називать формулами понження степення:

$$\text{a) } \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2};$$

$$\text{b) } \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2};$$

$$\text{c) } \mathrm{tg}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}.$$

- Суму або різницю тригонометричних функцій можна перетворити в добуток,використовуючи формули

$$\operatorname{Sin}(\alpha) + \operatorname{Sin}(\beta) = 2 \cdot \operatorname{Sin}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \operatorname{Cos}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\operatorname{Sin}(\alpha) - \operatorname{Sin}(\beta) = 2 \cdot \operatorname{Cos}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \operatorname{Sin}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\operatorname{Cos}(\alpha) + \operatorname{Cos}(\beta) = 2 \cdot \operatorname{Cos}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \operatorname{Cos}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\operatorname{Cos}(\alpha) - \operatorname{Cos}(\beta) = -2 \cdot \operatorname{Sin}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \operatorname{Sin}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

- Добуток геометричних функцій можна перетворити в суму,використовуючи формули

$$\mathrm{Sin}(\alpha)\cdot \mathrm{Sin}(\beta) = \frac{1}{2}(\mathrm{Cos}(\alpha-\beta) - \mathrm{Cos}(\alpha+\beta))$$

$$\mathrm{Cos}(\alpha)\cdot \mathrm{Cos}(\beta) = \frac{1}{2}(\mathrm{Cos}(\alpha-\beta) + \mathrm{Cos}(\alpha+\beta))$$

$$\mathrm{Sin}(\alpha)\cdot \mathrm{Cos}(\beta) = \frac{1}{2}(\mathrm{Sin}(\alpha-\beta) + \mathrm{Sin}(\alpha+\beta))$$

Дякую за увагу !