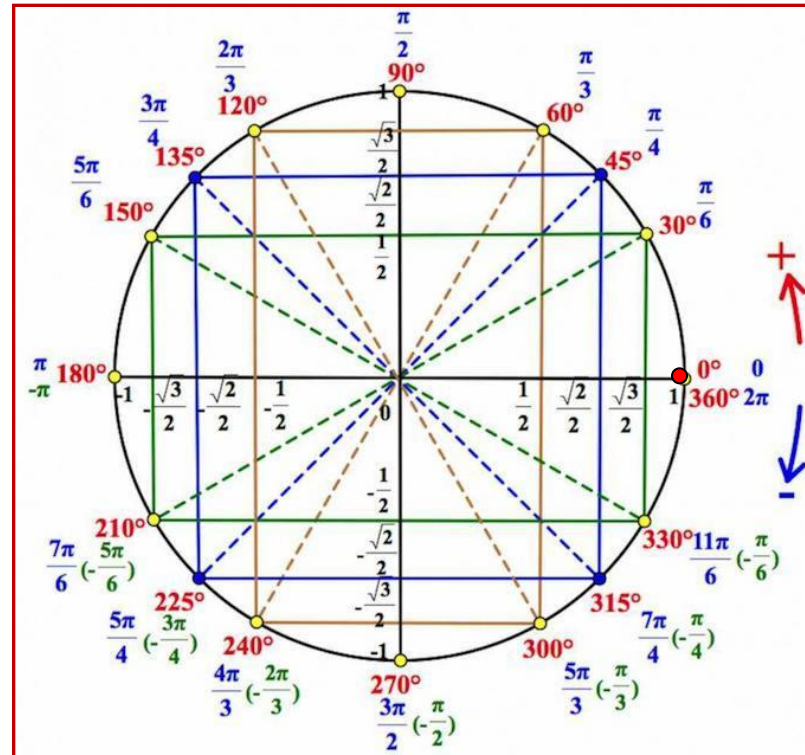
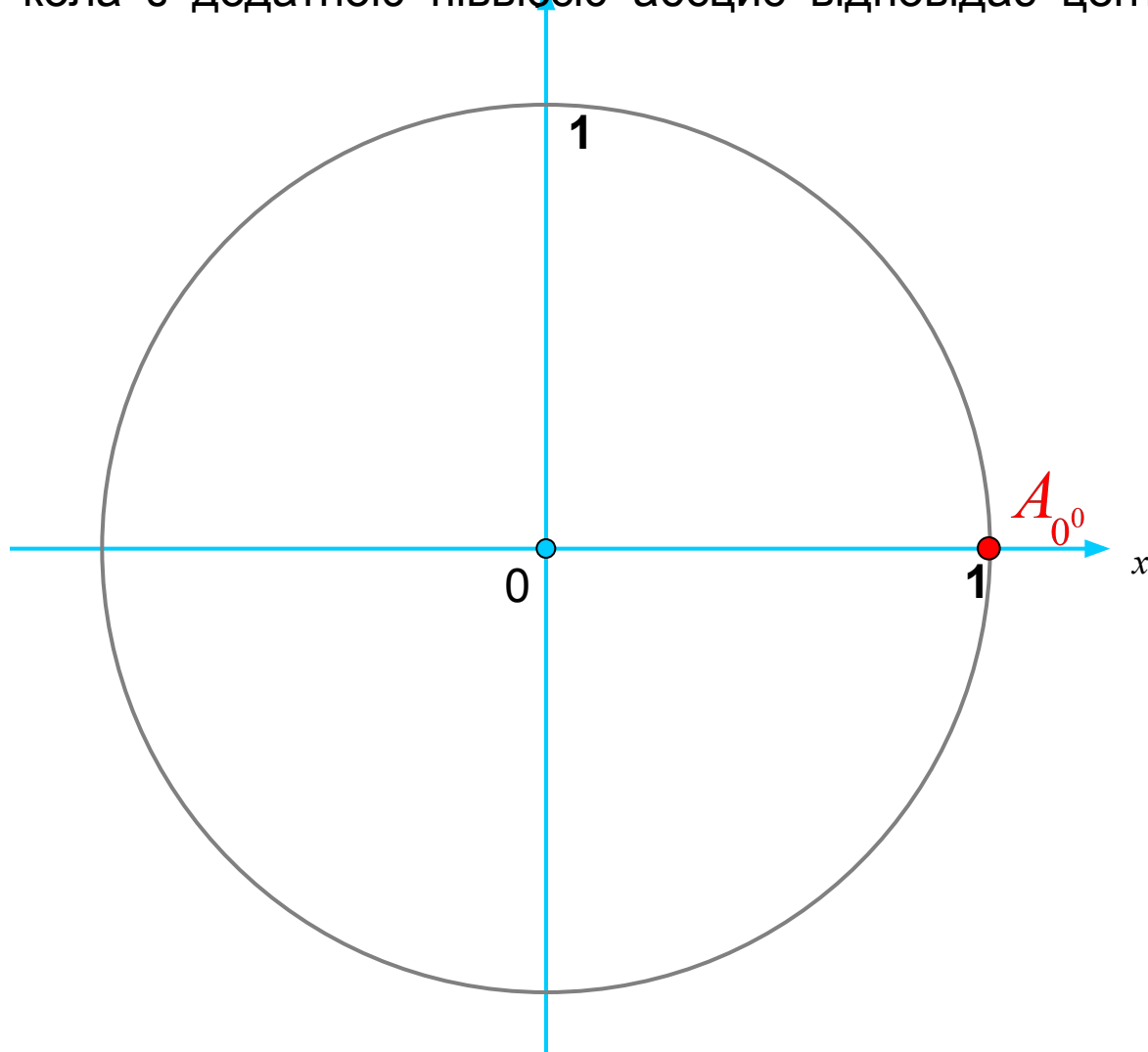




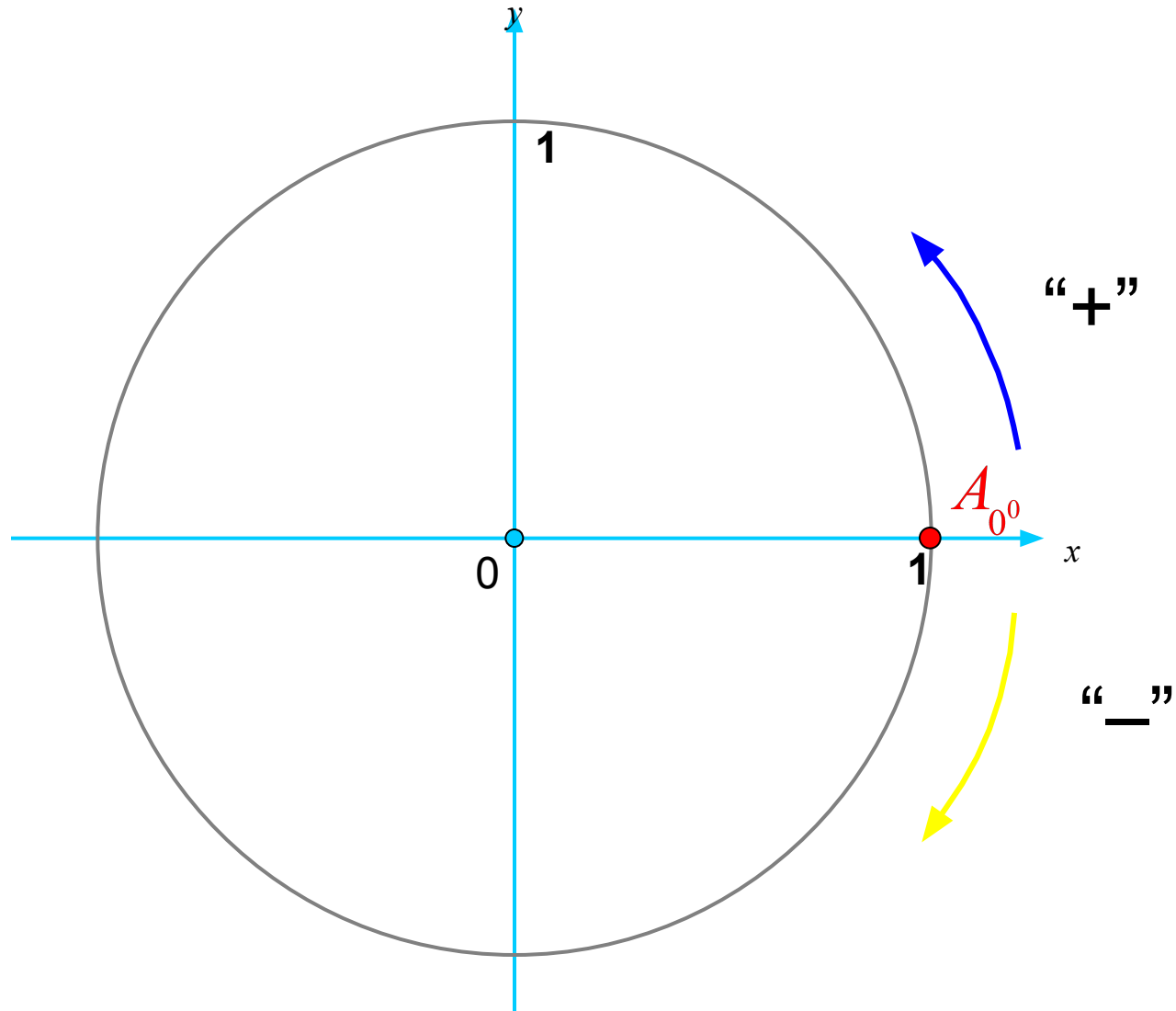
Тригонометричні функції числового аргументу. Означення синуса, косинуса, тангенса і котангенса кутів повороту.

Коло одиничного радіуса з центром в початку координатної площини називається одиничним (тригонометричним) колом.

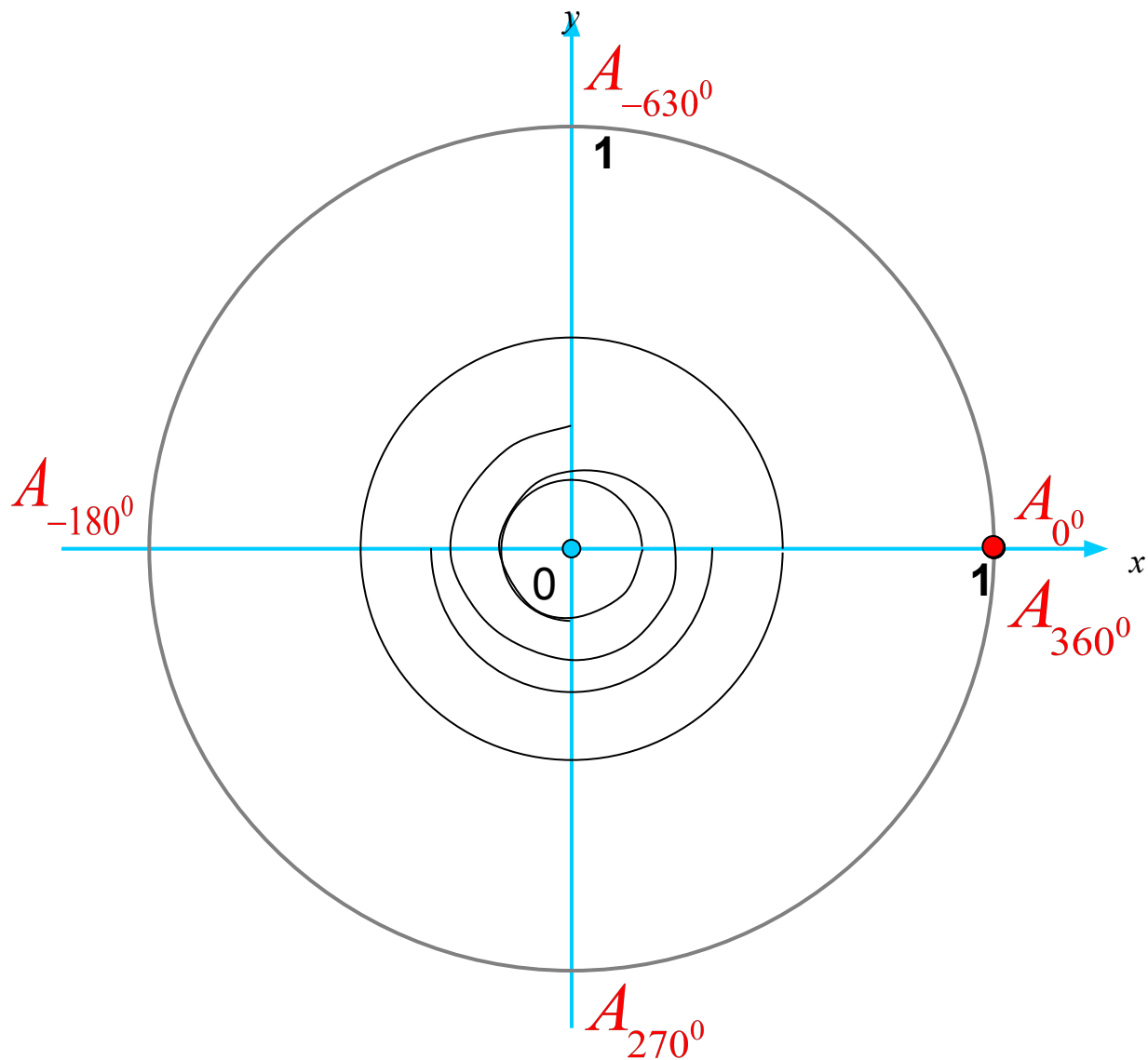
Точка перетину кола з додатною піввіссю абсцис відповідає центральному куту повороту 0^0 .



Цю початкову точку можна обертати по колу і отримувати різні центральні кути. Обертання точки в напрямку **проти годинникової стрілки** вважається **додатнім**, а **за годинниковою стрілкою** – **від'ємним**.



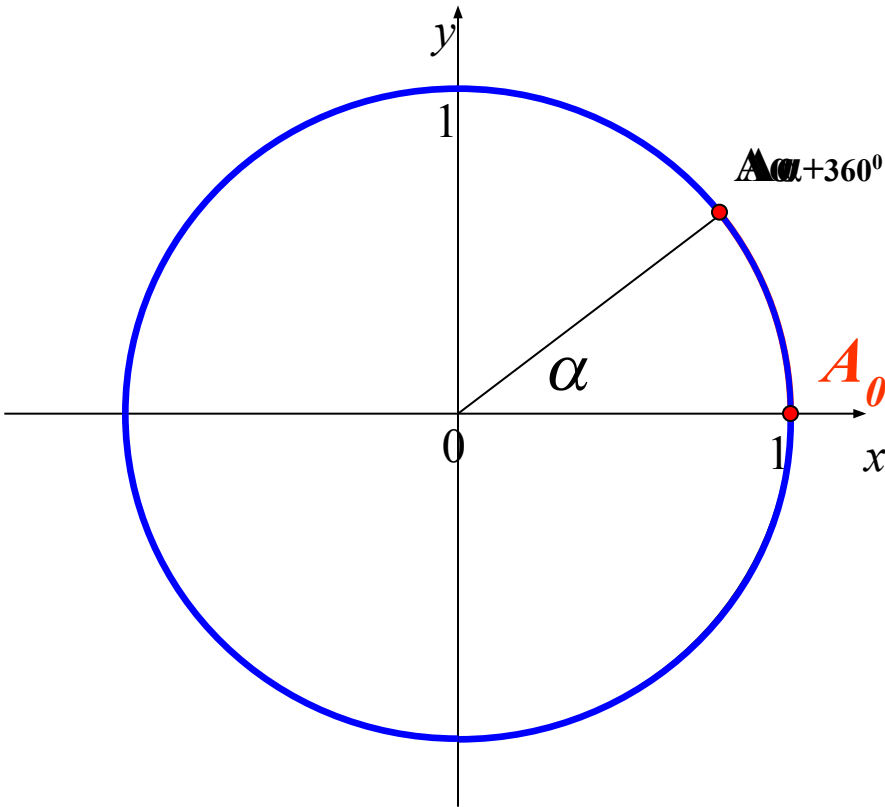
Прослідкуйте за обертанням точки по колу і назвіть отримані кути повороту:



Якщо додати повний оберт до гострого кута α , то ми знову опинимось в тій самій точці А. Але зараз вона відповідає куту повороту $\alpha + 360^\circ$ (подумайте)...

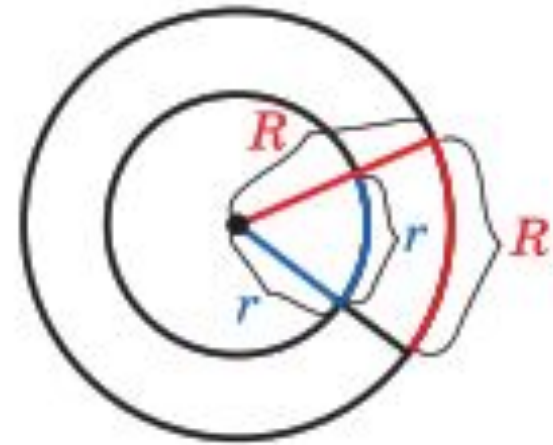
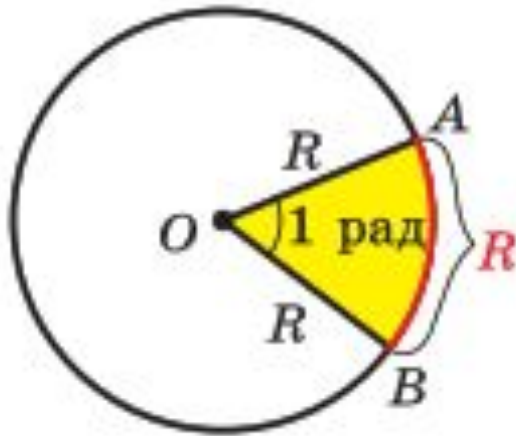
$$1020^\circ = 360^\circ \cdot 2 + 300^\circ$$

$$\begin{array}{r} - \quad 1020 \overline{) 360} \\ \underline{720} \\ 300 \end{array}$$



Радіанна міра кута

Означення. Кутом в один радіан називають центральний кут кола, що спирається на дугу, довжина якої дорівнює радіусу кола.



Розгорнутий кут = π радіан
 $180^0 = \pi$ радіан

1 градус позначається так: 1^0 .

Радіан не має ніяких позначень. Наприклад, запис **$\sin 2$** означає “синус двох радіан”, а запис **$\sin 2^0$** означає “синус двох градусів”.

.

Задача

Дано: кут $\alpha = 30^0$.

Треба: перевести в радіани.

Складаємо пропорцію:

$$180^0 - \pi$$

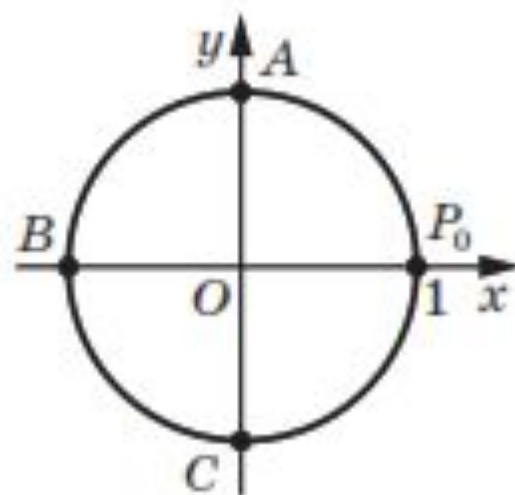
$$30^0 - x$$

8.8.° У якій координатній чверті знаходиться точка одиничного кола, отримана в результаті повороту точки $P_0(1; 0)$ на кут:

1) 127° ; 4) 400° ; 7) -470° ; 10) $2,4\pi$;

2) 89° ; 5) 600° ; 8) $\frac{\pi}{5}$; 11) 3 ;

3) 276° ; 6) -400° ; 9) $-\frac{7\pi}{6}$; 12) $-2?$



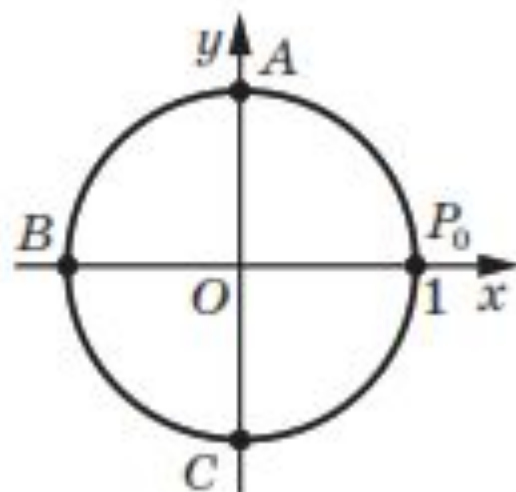
8.16.* Знайдіть координати точок одиничного кола, отриманих у результаті повороту точки $P_0(1; 0)$ на кути:

1) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$

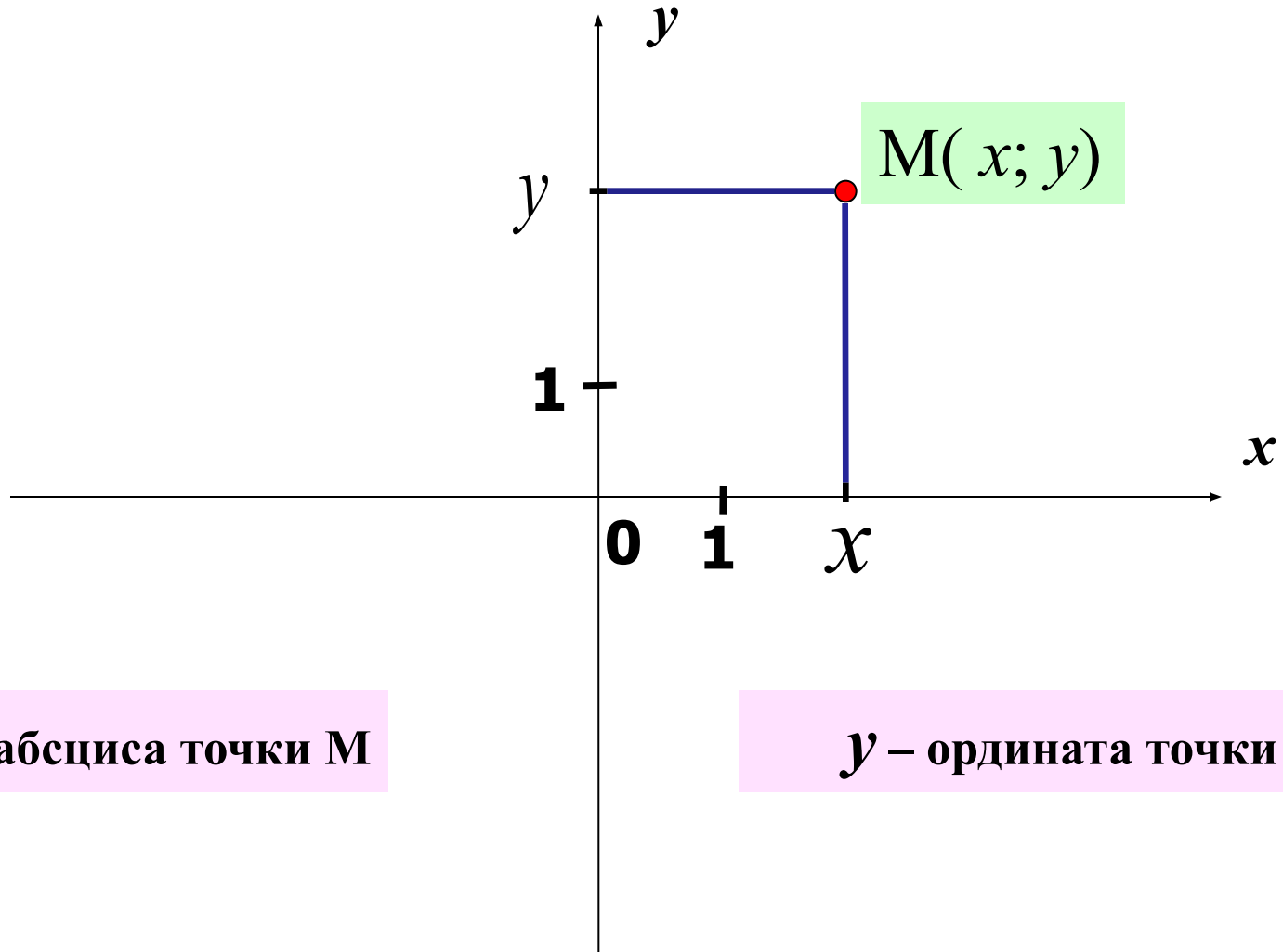
3) $\frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$

2) $-\frac{\pi}{2} + 4\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$

4) $\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$



Пригадаємо, що будь-яка точка координатної площини має дві координати – абсцису і ординату:



x – абсциса точки M

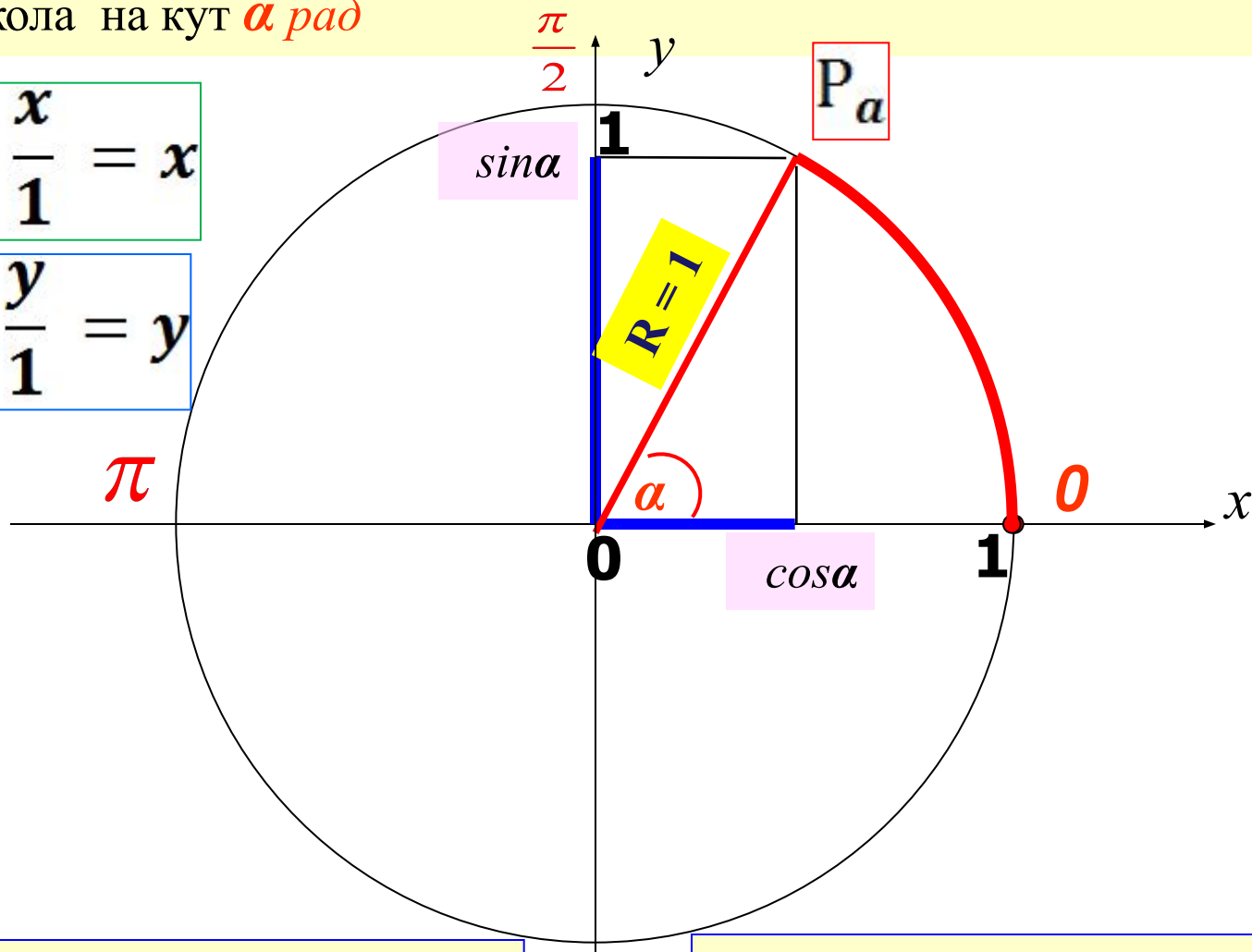
y – ордината точки M

$(x; y)$ – координати точки M

Розглянемо одиничне тригонометричне коло і довільний гострий кут повороту α , який ми отримуємо в результаті повороту точки $P_0(1;0)$ навколо центра кола на кут α рад

$$\cos \alpha = \frac{x}{1} = x$$

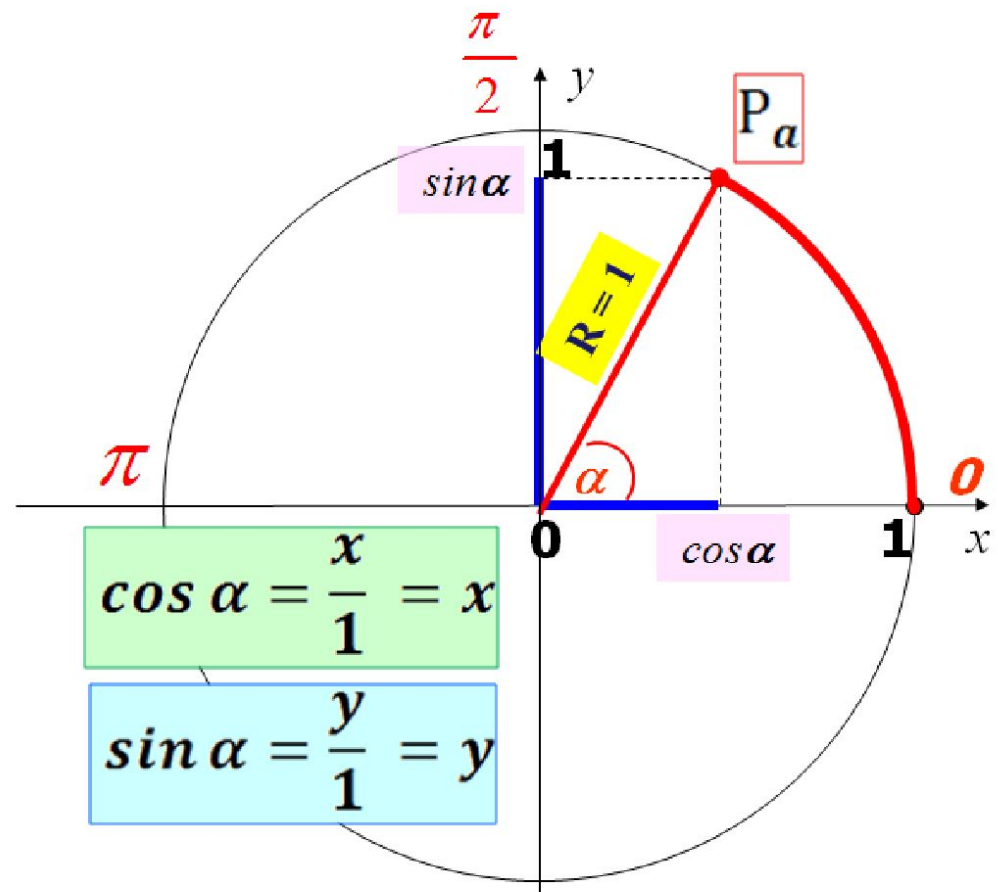
$$\sin \alpha = \frac{y}{1} = y$$



$\cos \alpha$ – абсциса точки повороту

$\sin \alpha$ – ордината точки повороту

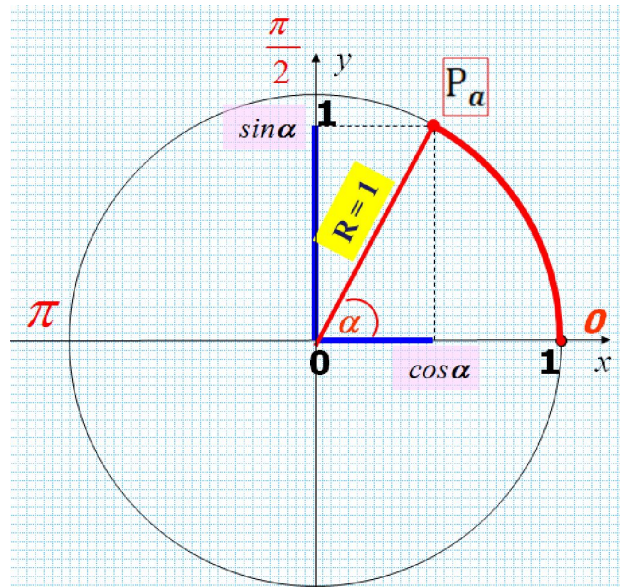
Отже, маємо
залежність між дійсним
числом **α** і абсцисою
та ординатою
відповідної точки
одиничного кола, на яку
відображується
початкова точка $P_0(1;0)$
під час повороту
навколо центра кола
на кут **α** рад



Ці залежності дістали назву
тригонометричних функцій числа, або
тригонометричних функцій числового аргументу.

Синусом числа α

називається **ордината** точки P_α одиничного кола, в яку переходить початкова точка $P_0(1;0)$ під час повороту навколо центра кола на кут α рад, і позначається **$\sin \alpha$** .



Косинусом числа α називається **абсциса** точки P_α одиничного кола, в яку переходить початкова точка $P_0(1;0)$ під час повороту навколо центра кола на кут α рад, і позначається **$\cos \alpha$** .

Тангенсом числа α називається відношення $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ а **котангенсом числа α** відношення $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ і позначаються вони відповідно **$\tan \alpha$** і **$\cot \alpha$** .

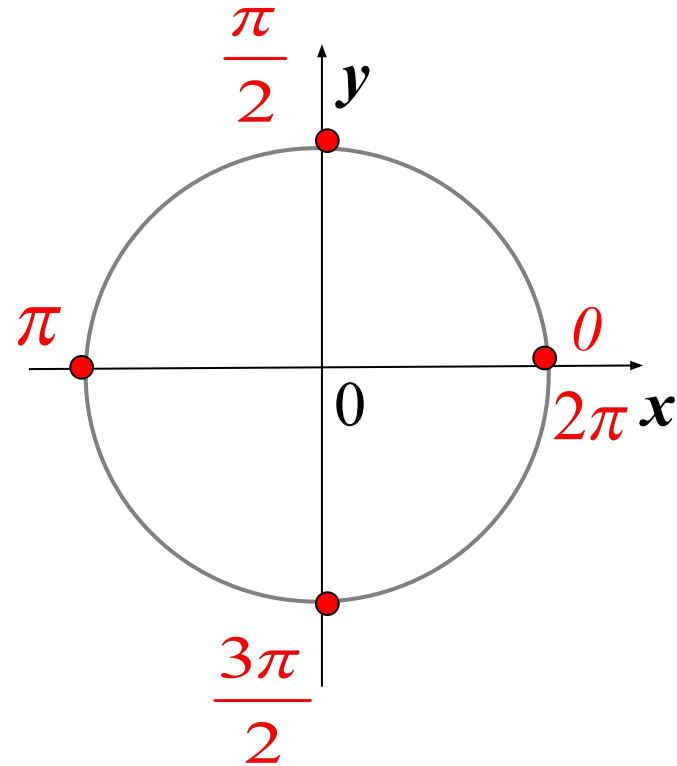
Отже, за означенням

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\cos \alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

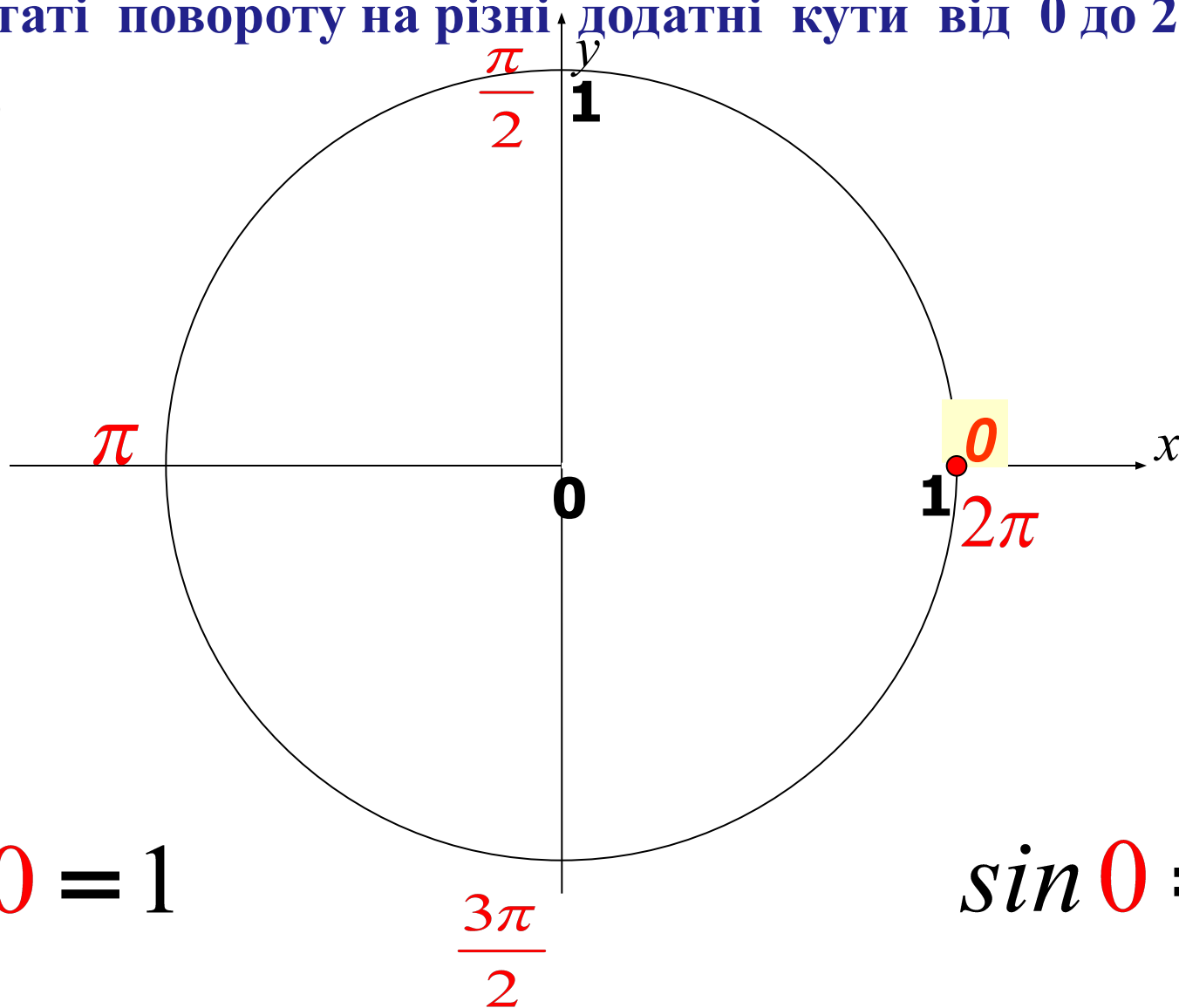
$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\sin \alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$$



Прослідкуємо за координатами точки одиничного тригонометричного кола, яку будемо отримувати в результаті повороту на різні додатні кути від 0 до 2π :

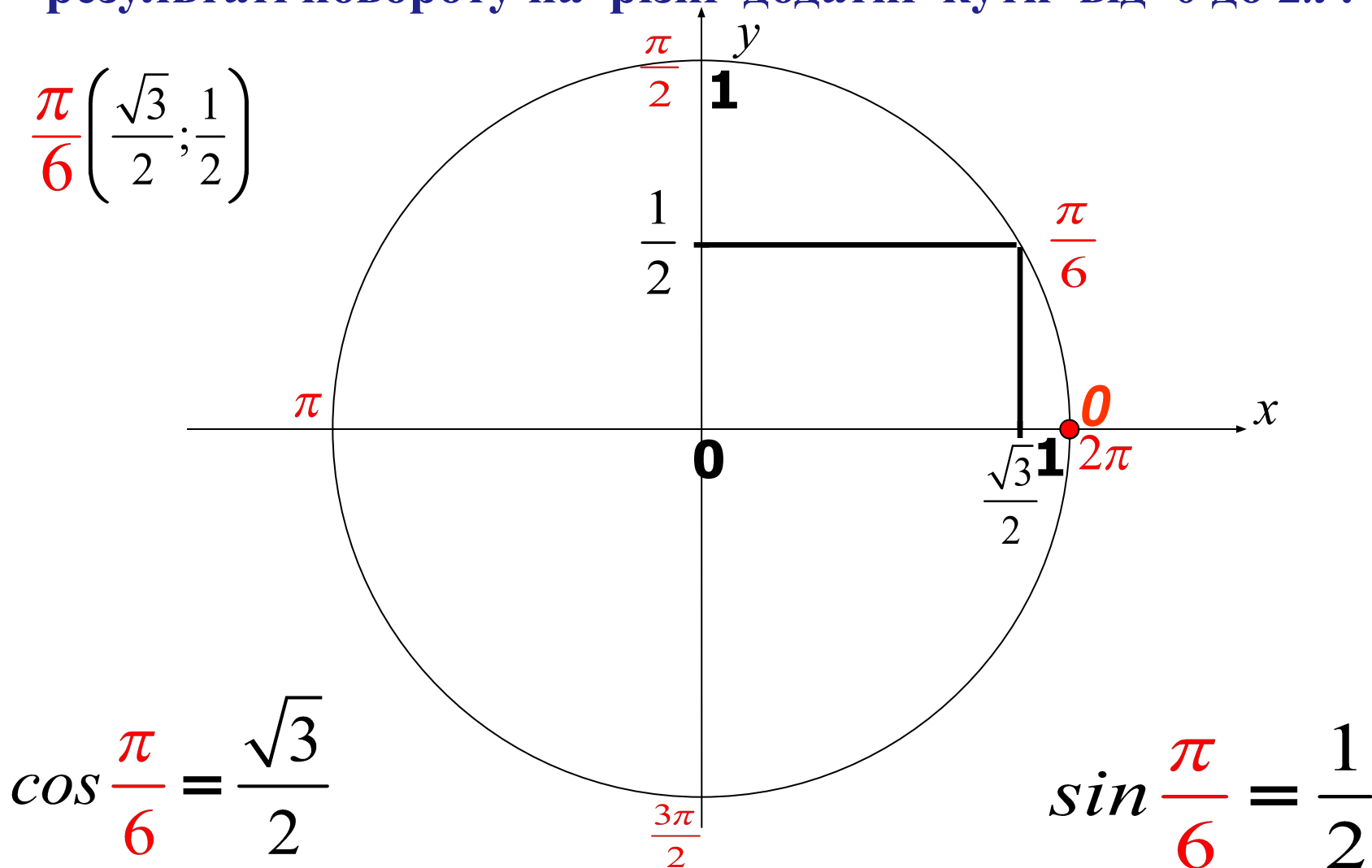
$$0(1; 0)$$



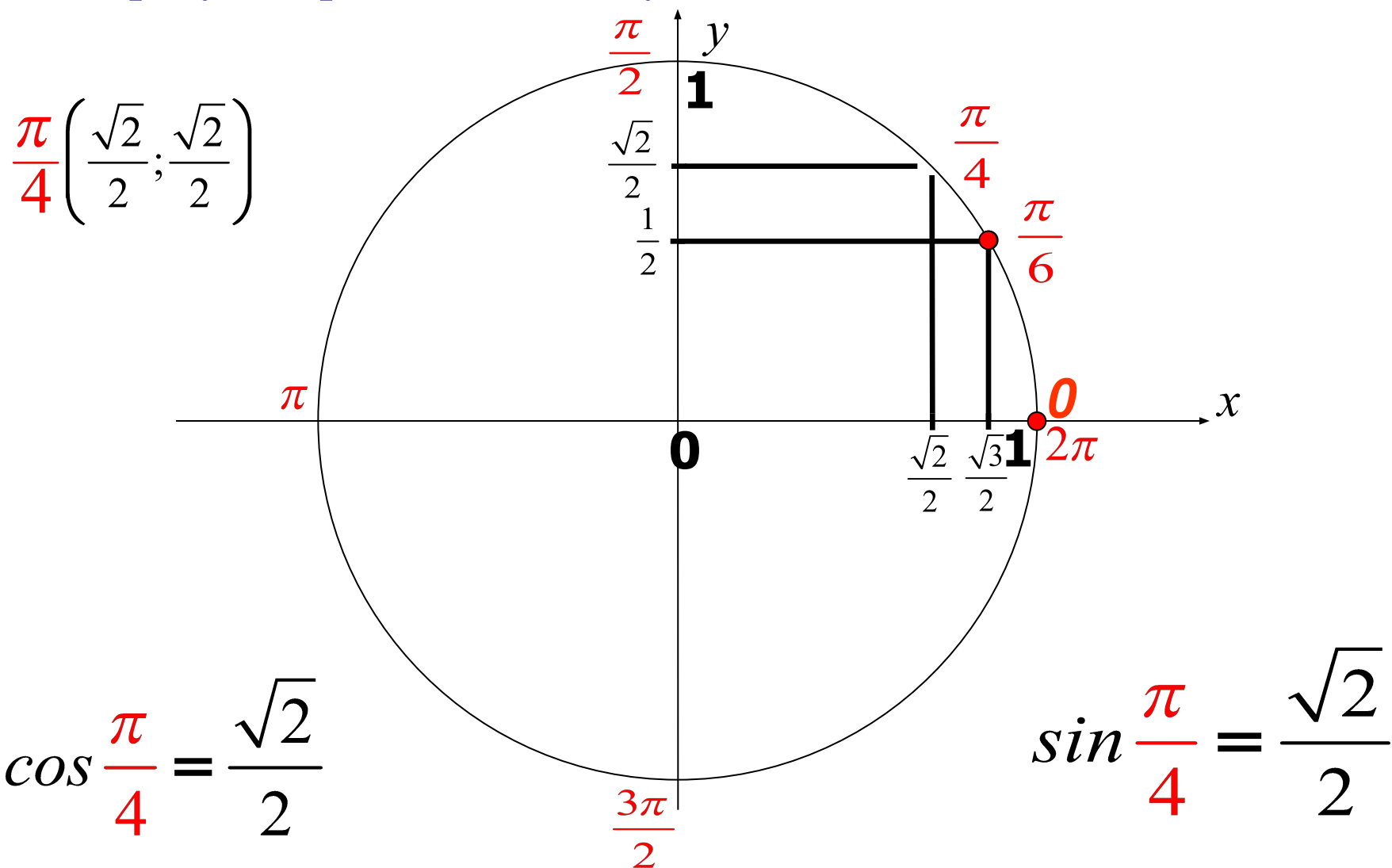
$$\cos 0 = 1$$

$$\sin 0 = 0$$

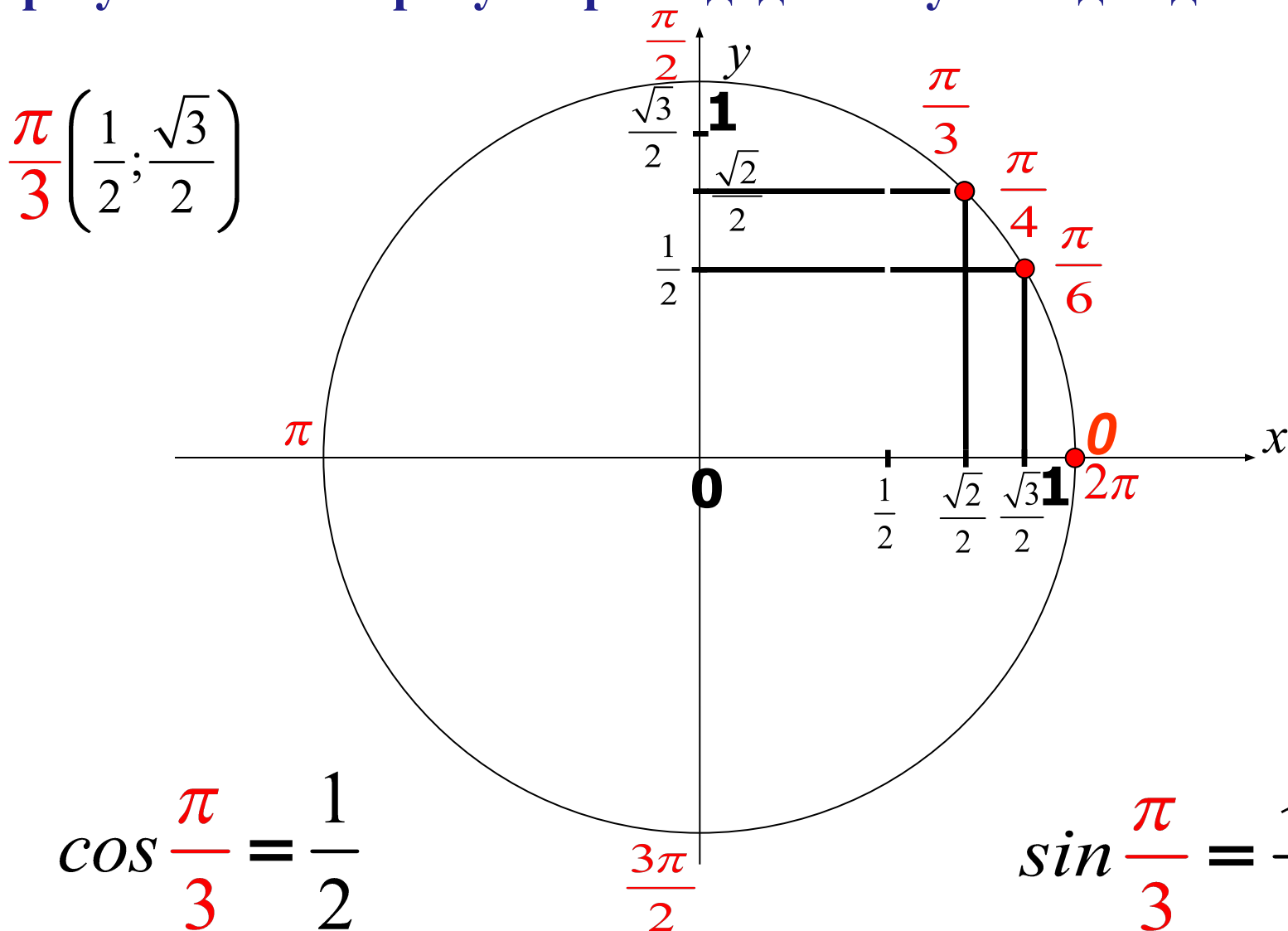
Прослідкуємо за координатами точки одиничного тригонометричного кола, яку будемо отримувати в результаті повороту на різні додатні кути від 0 до 2π :



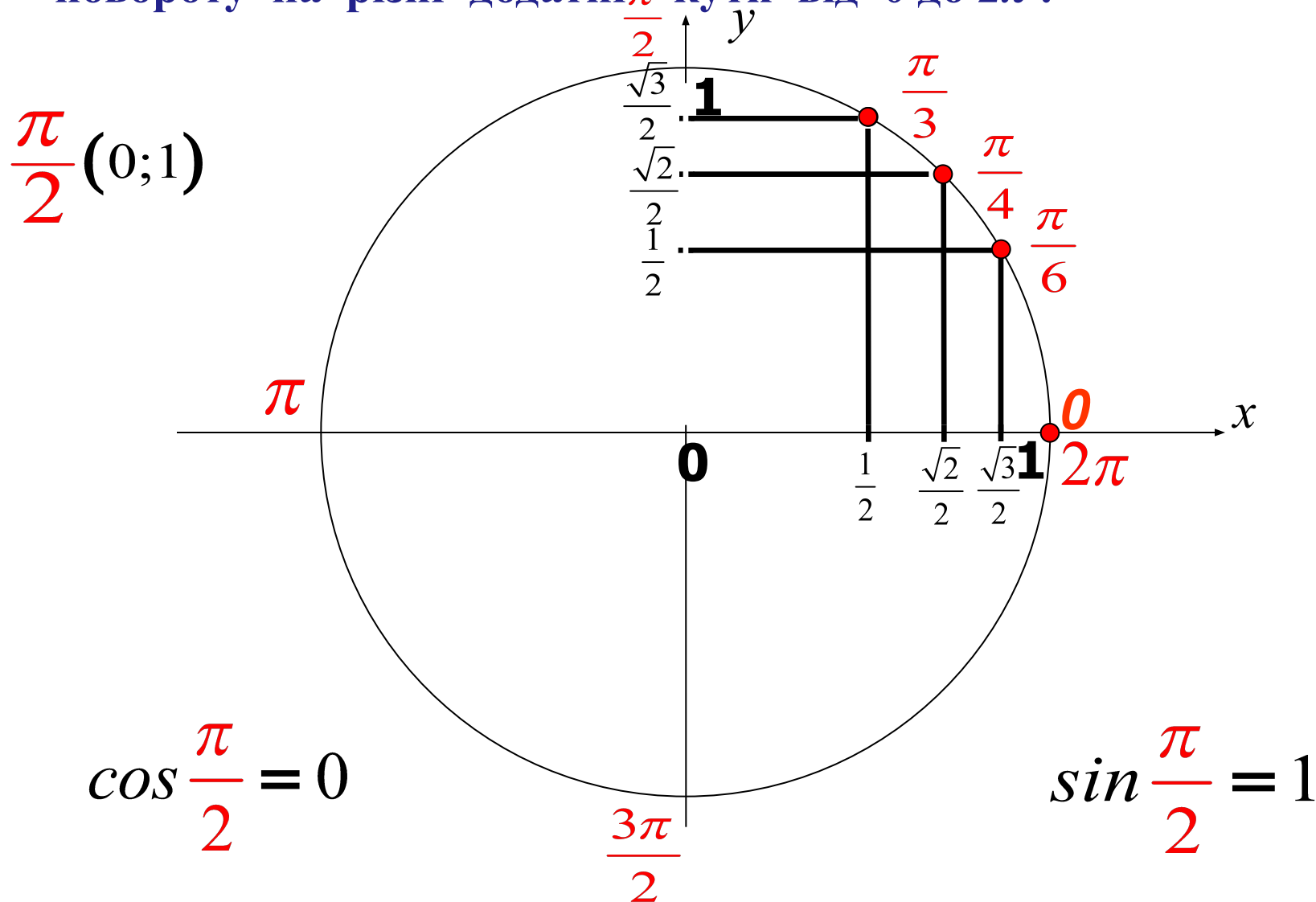
Прослідкуємо за координатами точки одиничного тригонометричного кола, яку будемо отримувати в результаті повороту на різні додатні кути від 0 до 2π :

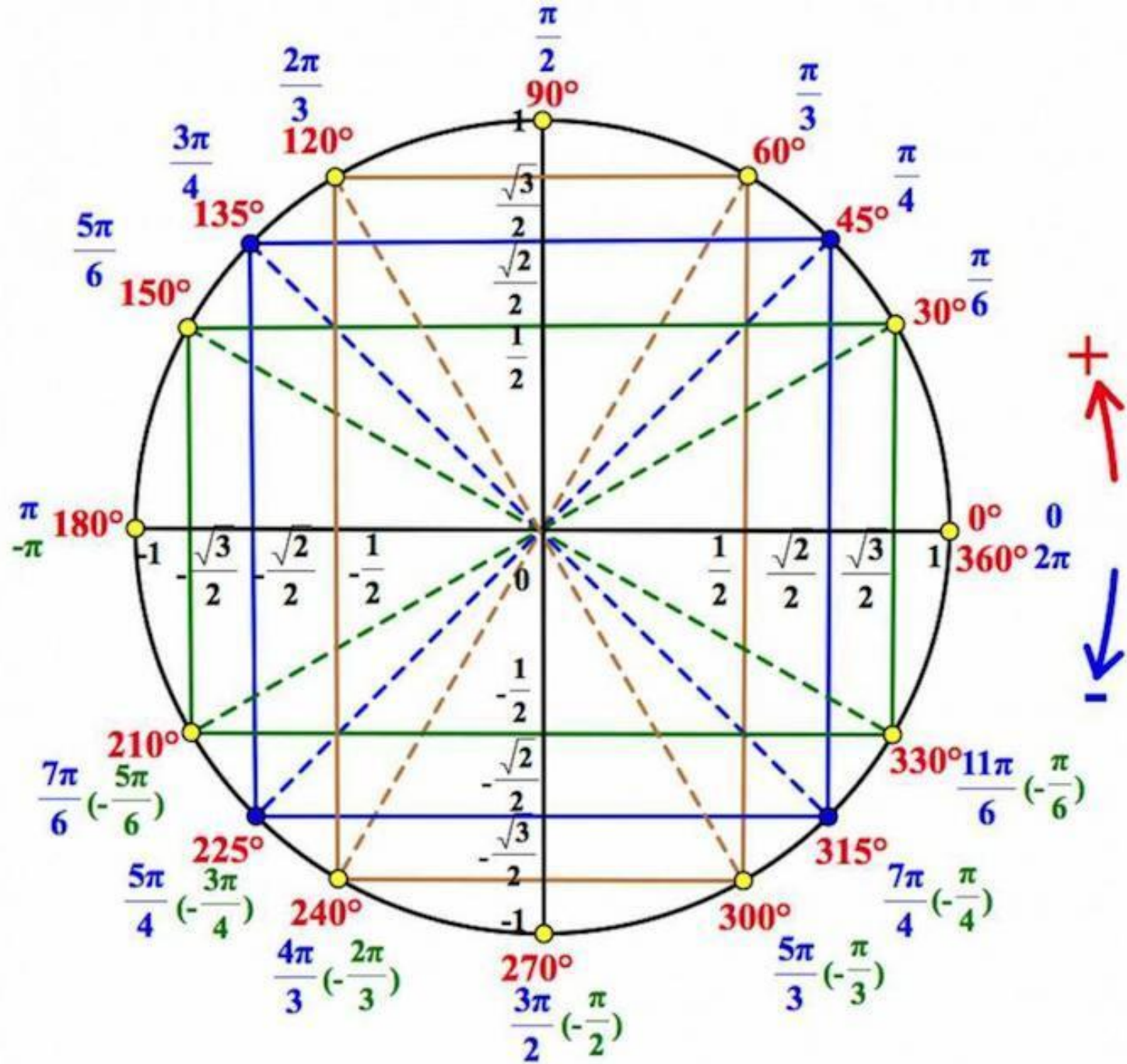


Прослідкуємо за координатами точок одиничного тригонометричного кола, яку будемо отримувати в результаті повороту на різні додатні кути від 0 до 2π :

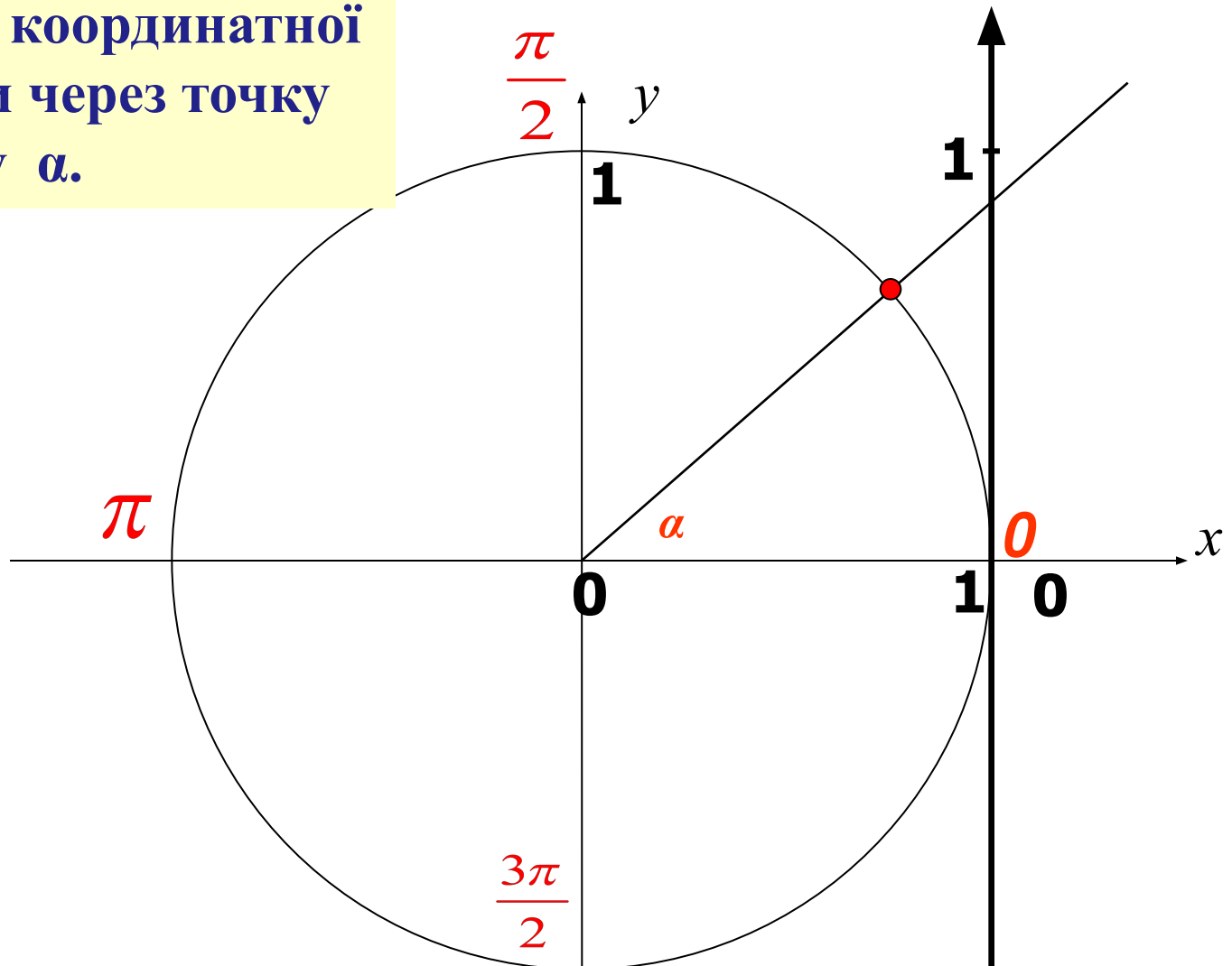


Прослідкуємо за координатами точки одиничного тригонометричного кола, яку будемо отримувати в результаті повороту на різні додатні π кути від 0 до 2π :



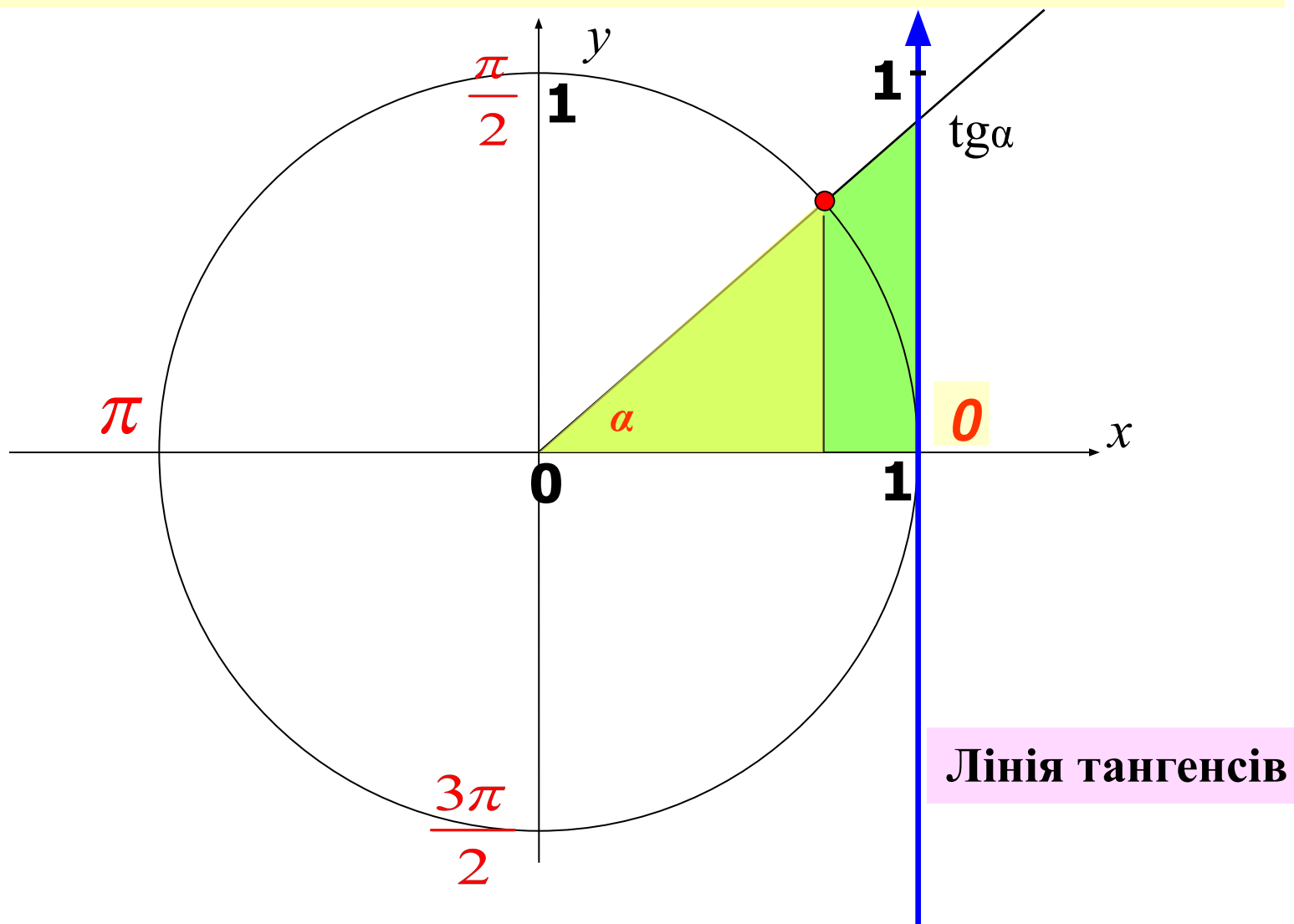


Проведемо промінь з початку координатної площини через точку повороту α .



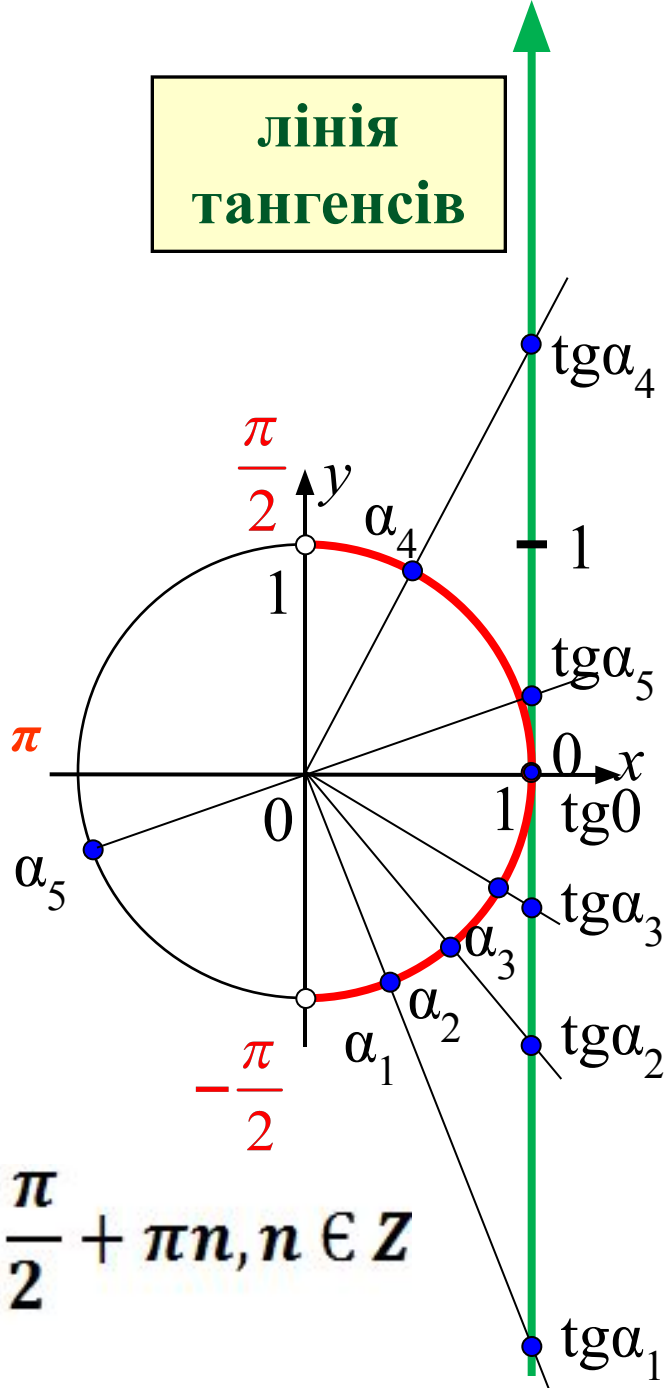
Тепер проведемо числову пряму, яка є дотичною до одиничного кола в точці 0 , з тим же початком відліку і таким же одиничним відрізком як на осі Oy .

Ця координатна пряма називається *лінією тангенсів*, бо в точці перетину променя, проведеного з центра кола через точку повороту α знаходиться значення $\operatorname{tg}\alpha$.



лінія
тангенсів

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

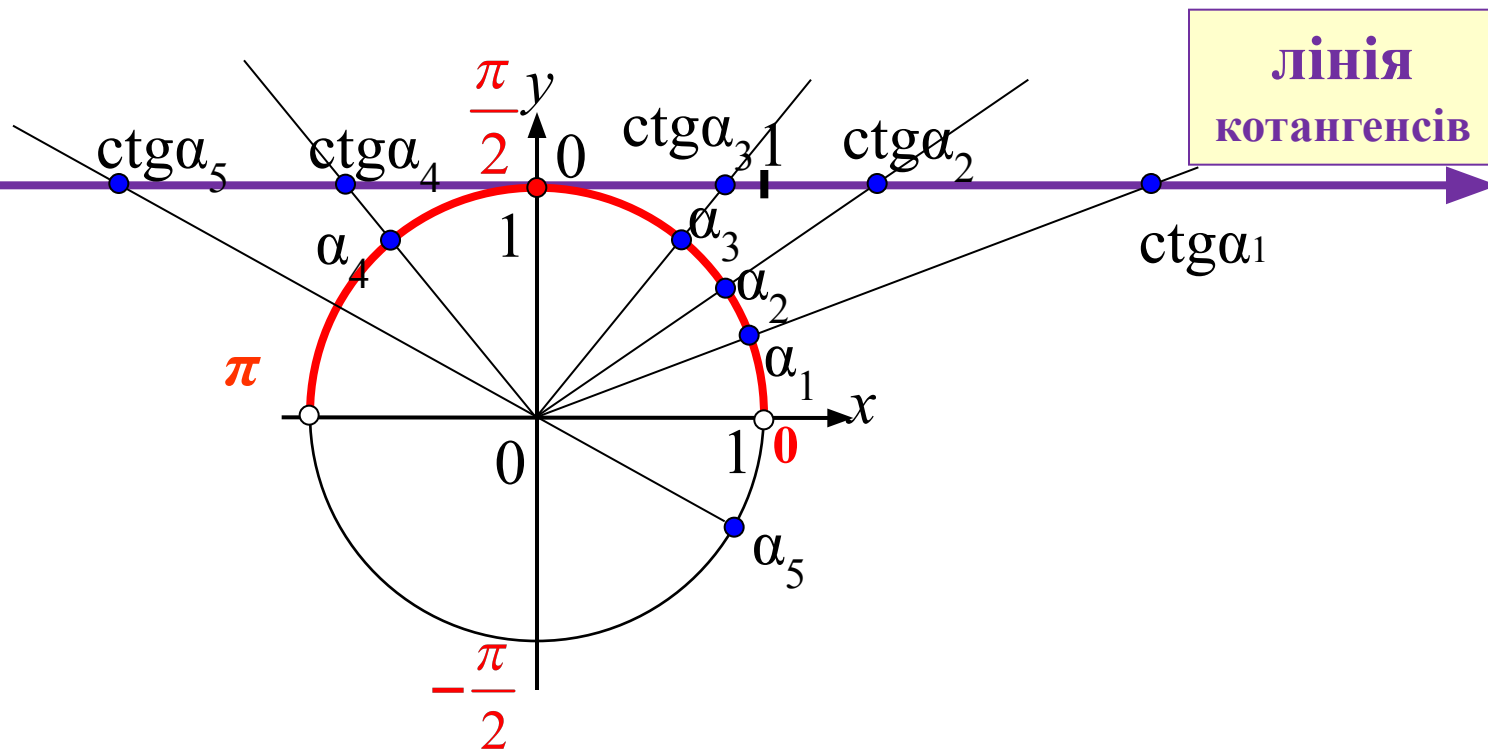


$$\cos \alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Аналогічно побудуємо **лінію котангенсів**

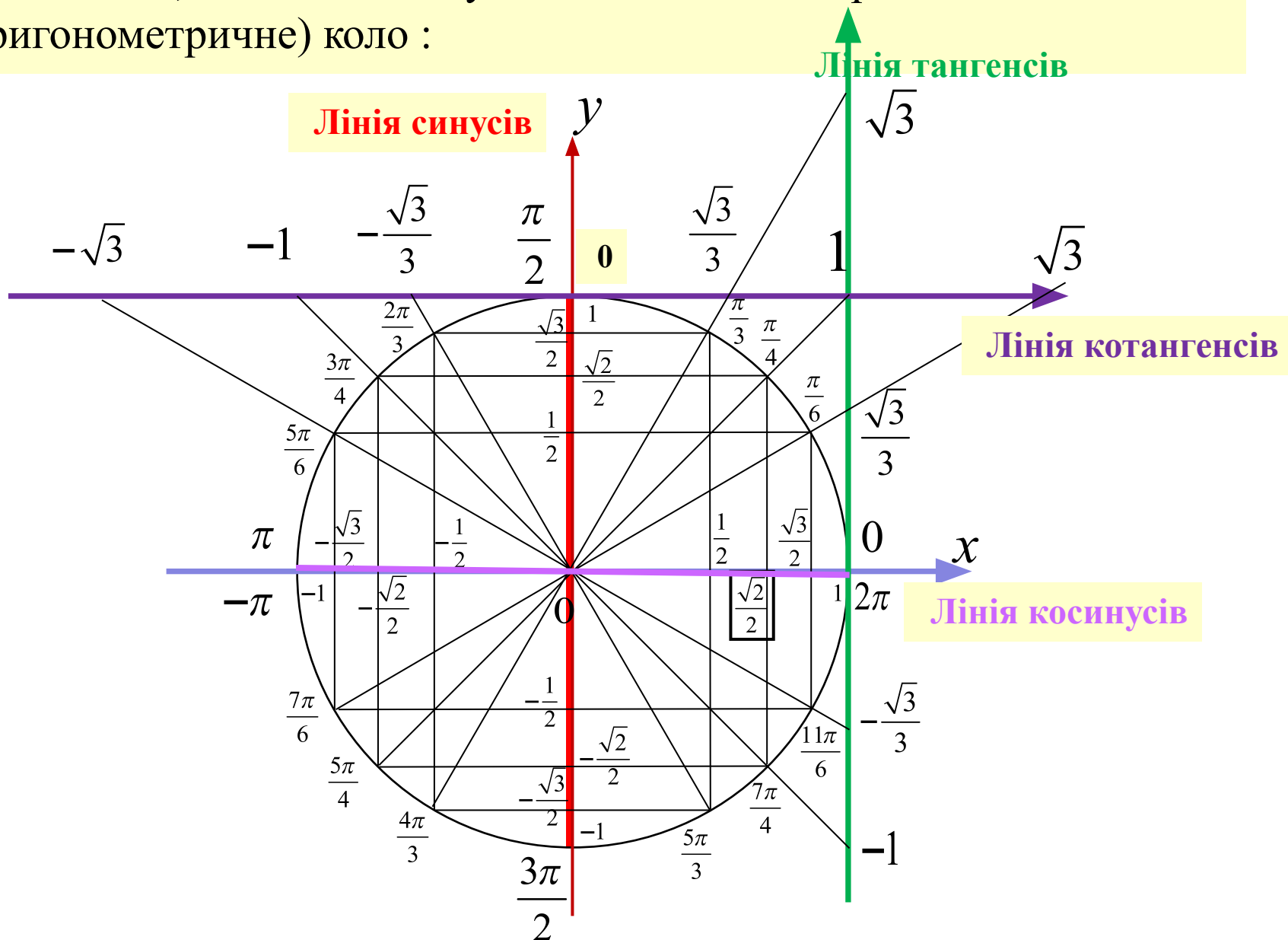
$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\sin \alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$$



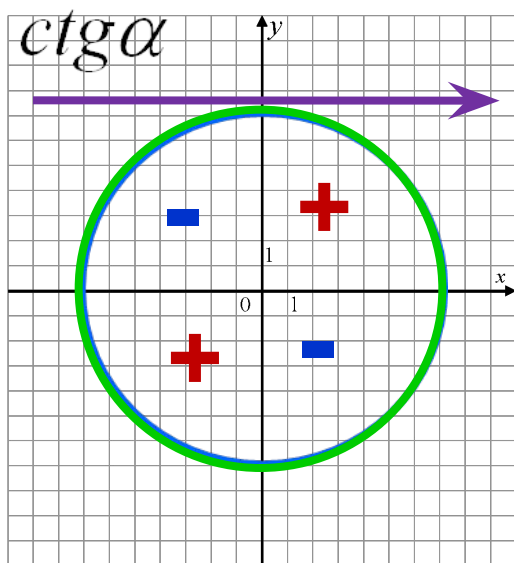
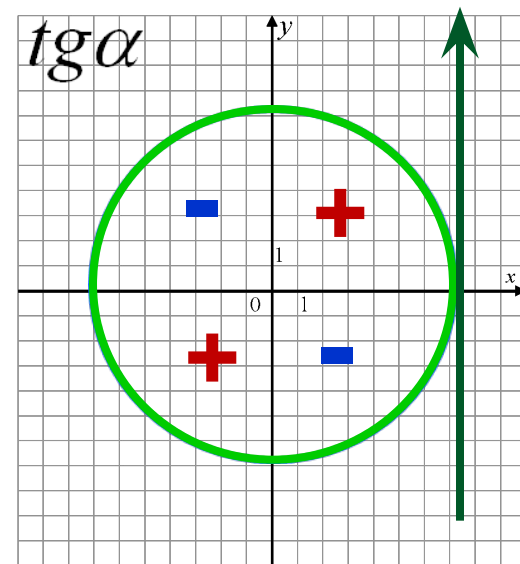
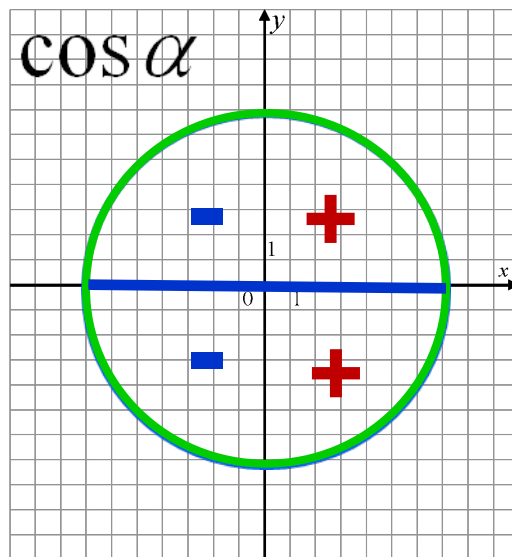
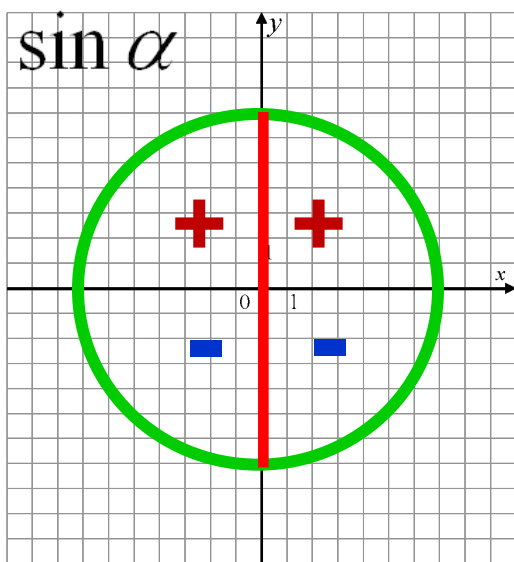
Проведемо числову пряму, яка дотичною до одиничного кола в точці $\frac{\pi}{2}$, з тим же початком відріку і таким же одиничним відрізком як на осі Ox .

Отже, кожен з Вас у зошиті повинен отримати одиничне (тригонометричне) коло :



Перевірте його правильність

Поясніть знаки тригонометричних функцій у кожній з чотирьох координатних чвертей



$$\sin 68^\circ > 0$$

$$\sin 153^\circ > 0$$

$$\sin 249^\circ < 0$$

$$\sin 315^\circ < 0$$

$$\cos 76^\circ > 0$$

$$\cos 236^\circ < 0$$

$$\operatorname{tg} 127^\circ < 0$$

$$\operatorname{ctg} 195^\circ > 0$$

Який знак має вираз :

III чверть

-

$$\sin 200^\circ < 0$$

IV чверть

+

$$\cos 310^\circ > 0$$

II чверть

+

$$\sin 97^\circ > 0$$

III чверть

+

$$\operatorname{tg} 190^\circ > 0$$

II чверть

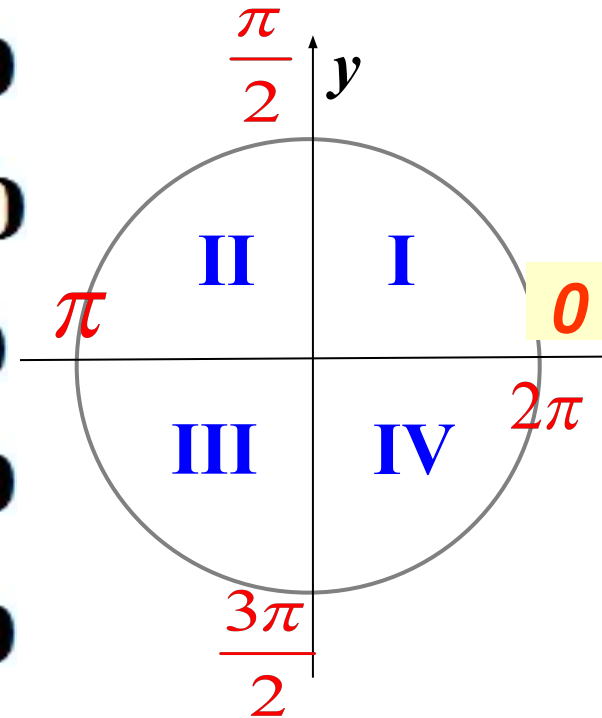
-

$$\cos 110^\circ < 0$$

I чверть

+

$$\operatorname{ctg} 80^\circ > 0$$



Запишіть у градусній мірі кут:

$$1) \frac{7\pi}{5} \cdot \frac{180^0}{\pi} = 252^0$$

$$a = \frac{a^0 \cdot \pi}{180^0}$$

$$a^0 = \frac{a \cdot 180^0}{\pi}$$

Запишіть у радіанній мірі кут:

$$2) 300^0 \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{3}$$

У якій чверті закінчується кут?

$$3) \frac{13\pi}{6}; \frac{5\pi}{4}; \frac{8\pi}{7}$$

$$\frac{7\pi}{7} = \pi$$

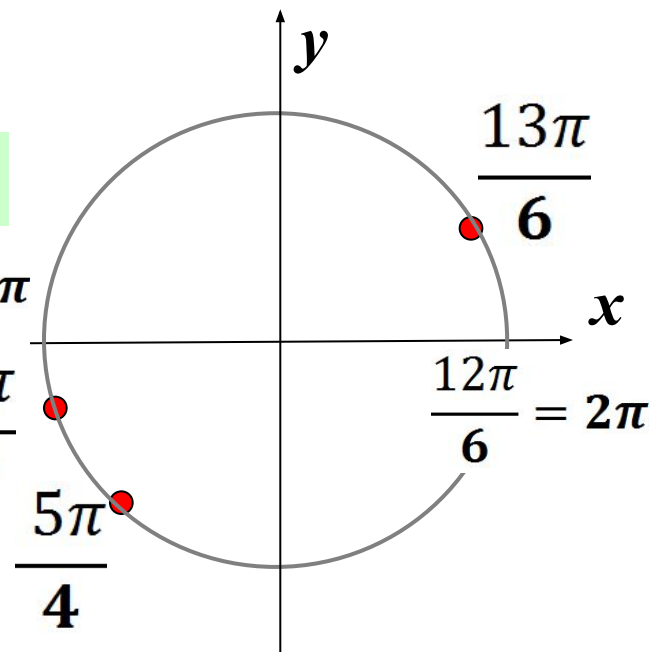
$$\frac{8\pi}{7}$$

$$\frac{5\pi}{4}$$

$$\frac{13\pi}{6}$$

$$\frac{12\pi}{6} = 2\pi$$

Відповідь: I чверть, : III чверть, : III чверть

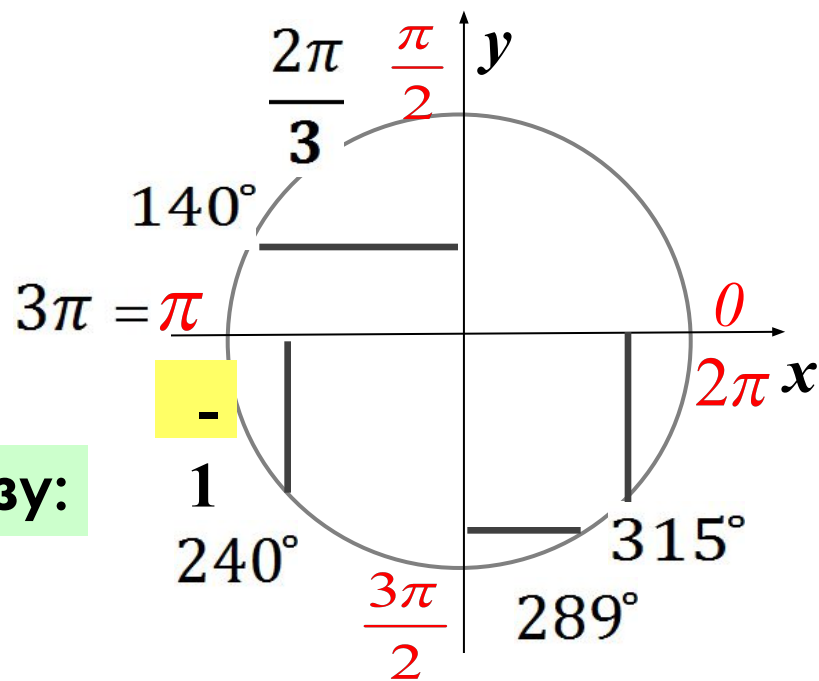


Який знак має вираз :

4) $\cos 240^\circ \sin 140^\circ \sin 289^\circ \cos 315^\circ > 0$

$$\cos 240^\circ < 0 \quad \sin 140^\circ > 0$$

$$\sin 289^\circ < 0 \quad \cos 315^\circ > 0$$



5) Знайдіть значення виразу:

$$\begin{aligned} & \cos 2\pi + \sin \frac{3\pi}{2} + \cos(-3\pi) - \cos \frac{2\pi}{3} = \\ & = 1 + (-1) + \cos 3\pi - \left(-\frac{1}{2}\right) = (-1) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

6)

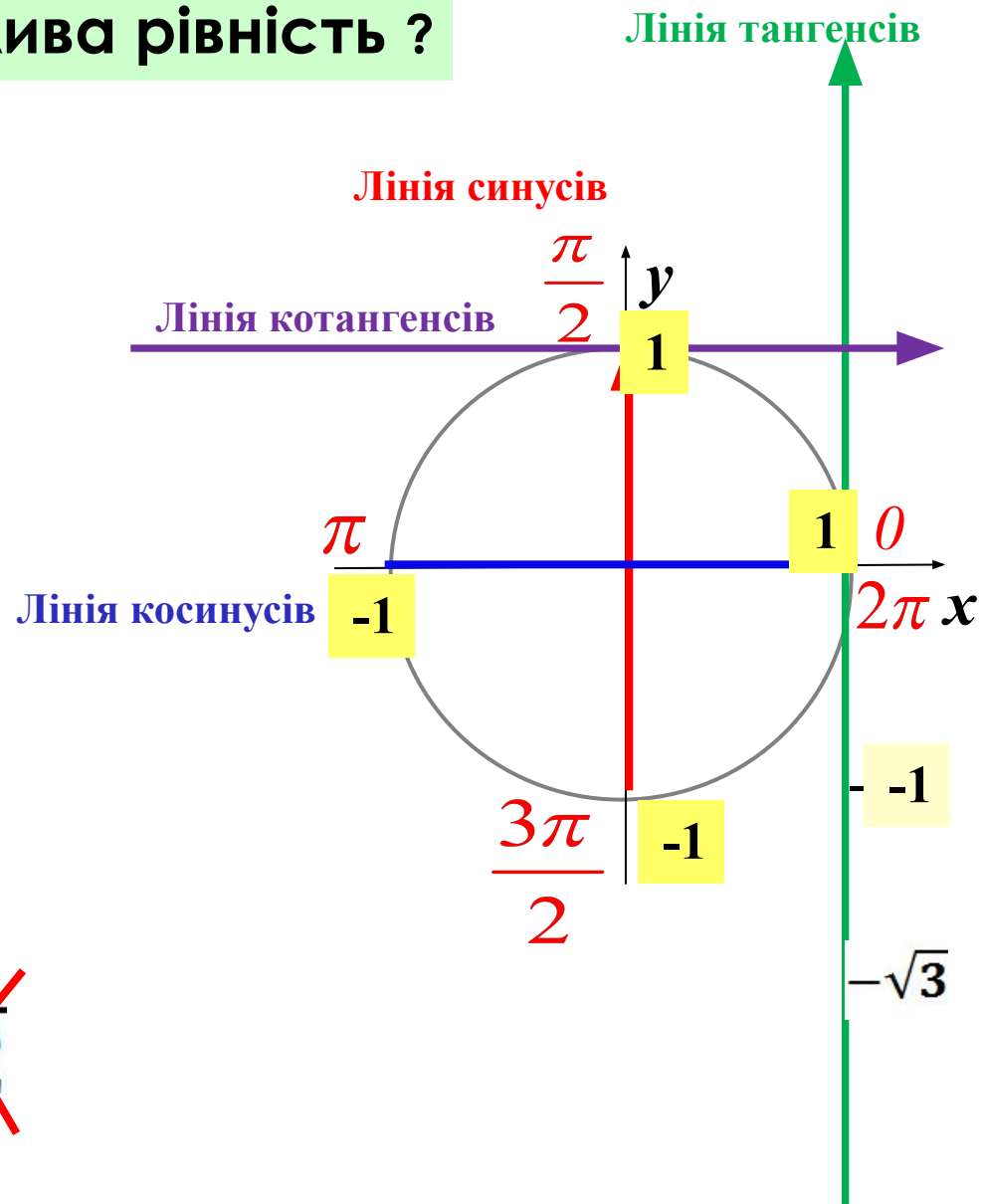
Чи можлива рівність ?

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\sin \alpha = \frac{5}{4}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3}$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{2}$$



Математичний диктант

Тригонометричні функції числового аргументу. Означення синуса, косинуса, тангенса і котангенса кутів повороту.

I варіант

II варіант

Запишіть у градусній мірі кути:

1)

а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{3\pi}{5}$

$\frac{3\pi}{2}$; б) $\frac{4\pi}{9}$

Запишіть у радіанній мірі кути:

2)

а) 270° ; б) 36°

а) 180° ; б) 40°

У якій чверті закінчується кут?

3)

$\frac{7\pi}{4}$

$\frac{11\pi}{6}$



Математичний диктант

Тригонометричні функції числового аргументу. Означення синуса, косинуса, тангенса і котангенса кутів повороту.

I варіант

II варіант

Який знак має вираз :

4) а) $\cos 320^\circ$; б) $\sin \frac{7\pi}{6}$ | а) $\cos 210^\circ$; б) $\sin \frac{4\pi}{3}$

Знайдіть значення виразу:

5) $\sin \pi$

$\cos \pi$

Знайдіть значення виразу:

6) $\cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{11\pi}{6}$

$\sin 2\pi + \cos \frac{4\pi}{3}$



Математичний диктант

Тригонометричні функції числового аргументу. Означення синуса, косинуса, тангенса і котангенса кутів повороту.

I варіант

II варіант

7)

$$\cos \frac{3\pi}{2}$$

Знайдіть значення виразу:

$$\sin \frac{3\pi}{2}$$

Кутом якої чверті є кут α , якщо відомо, що

8)

$$\sin \alpha > 0 \text{ і } \cos \alpha < 0$$

$$\cos \alpha > 0 \text{ і } \sin \alpha < 0$$

Порівняйте значення виразів.

Відповідь поясніть за допомогою тригонометричного кола:

9)

$$\text{а) } \cos 70^\circ \text{ і } \sin 340^\circ$$

$$\text{а) } \cos 340^\circ \text{ і } \sin 189^\circ$$

$$\text{б) } \cos \frac{5\pi}{6} \text{ і } \sin \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{б) } \cos \frac{3\pi}{2} \text{ і } \sin \frac{5\pi}{4}$$





Математичний диктант

Тригонометричні функції числового аргументу. Означення синуса, косинуса, тангенса і котангенса кутів повороту.

Взаємоперевірка

І варіант

ІІ варіант

1)

2 бали

$$\frac{\pi}{2} = 90^{\circ} \quad \frac{3\pi}{5} = 108^{\circ}$$

$$\frac{3\pi}{2} = 270^{\circ} \quad \frac{4\pi}{9} = 80^{\circ}$$

2)

2 бали

$$270^{\circ} = \frac{3\pi}{2} \quad 36^{\circ} = \frac{\pi}{5}$$

$$180^{\circ} = \pi \quad 40^{\circ} = \frac{2\pi}{9}$$

3)

1 бал

$$\frac{7\pi}{4}$$

IV чверть

$$\frac{11\pi}{6}$$

IV чверть



Математичний диктант

Тригонометричні функції числового аргументу. Означення синуса, косинуса, тангенса і котангенса кутів повороту.

Взаємоперевірка

I варіант

II варіант

4) а) $\cos 320^\circ$; б) $\sin \frac{7\pi}{6}$

+

-

1

бал

5)

$$\sin \pi$$

$$= 0$$

1

бал

6)

$$\cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{11\pi}{6}$$

1

бал

$$= 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

а) $\cos 210^\circ$; б) $\sin \frac{4\pi}{3}$

-

-

$$\cos \pi$$

$$= -1$$

$$\sin 2\pi + \cos \frac{4\pi}{3}$$

$$= 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

Математичний диктант

Тригонометричні функції числового аргументу. Означення синуса, косинуса, тангенса і котангенса кутів повороту.

I варіант

Взаємоперевірка

II варіант

7) $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$

1

бал
8) $\sin \alpha > 0$ і $\cos \alpha < 0$

II чверть

1

бал

9) а) $\cos 70^\circ > \sin 340^\circ$

2 бали

б) $\cos \frac{5\pi}{6} > \sin \frac{3\pi}{2}$

$\sin \frac{3\pi}{2} = -1$



$\cos \alpha > 0$ і $\sin \alpha < 0$

IV чверть

а) $\cos 340^\circ > \sin 189^\circ$

б) $\cos \frac{3\pi}{2} > \sin \frac{5\pi}{4}$