Тема «Комплексные числа и действия над ними»

Основные понятия:

1. Определение Определение комплексного числа. Алгебраическая форма комплексного числа.
2. Геометрическое изображение комплексного числа.
3. Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме.
4. Тригонометрическая форма комплексного числа.
5. Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме.
6. Возведение в степень комплексного числа.
7. Извлечение корней из комплексного числа.

Завершить

1. Определение комплексного числа. Алгебраическая форма комплексного числа.

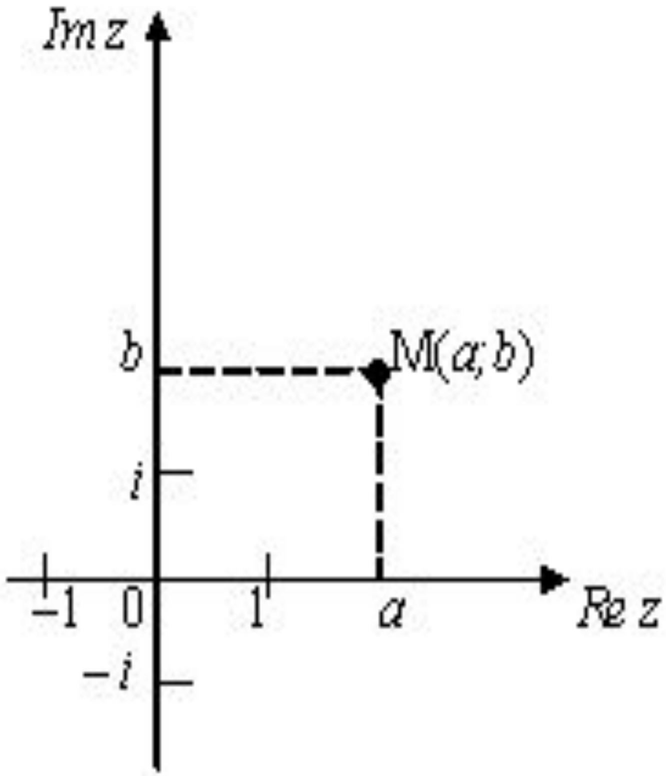
Комплексным числом называют упорядоченную пару $(a;b)$ действительных чисел a и b, ***алгебраической формой*** которого является $z = a + b \cdot i$

a* = *Re z – действительная часть комплексного числа,
b* = *Im z – мнимая часть комплексного числа,
i – мнимая единица ($i = \sqrt{-1}, \quad i^2 = -1$).

Комплексное число $\overline{z} = a - b \cdot i$ называют ***сопряженным*** к комплексному числу $z = a + b \cdot i$

назад

2. ***Геометрическое изображение комплексного числа.***



ДПСК, в которой

юму числу

$$z = a + b \cdot i$$

м точку $M\left(a;b\right)$

Плоскость, точки которой отождествлены с комплексными числами, называют ***комплексной плоскостью***.

Пример 1.

назад

Пример 1. Изобразить на комплексной плоскости следующие комплексные числа

$$z_1 = -2$$

$$z_2 = 3i$$

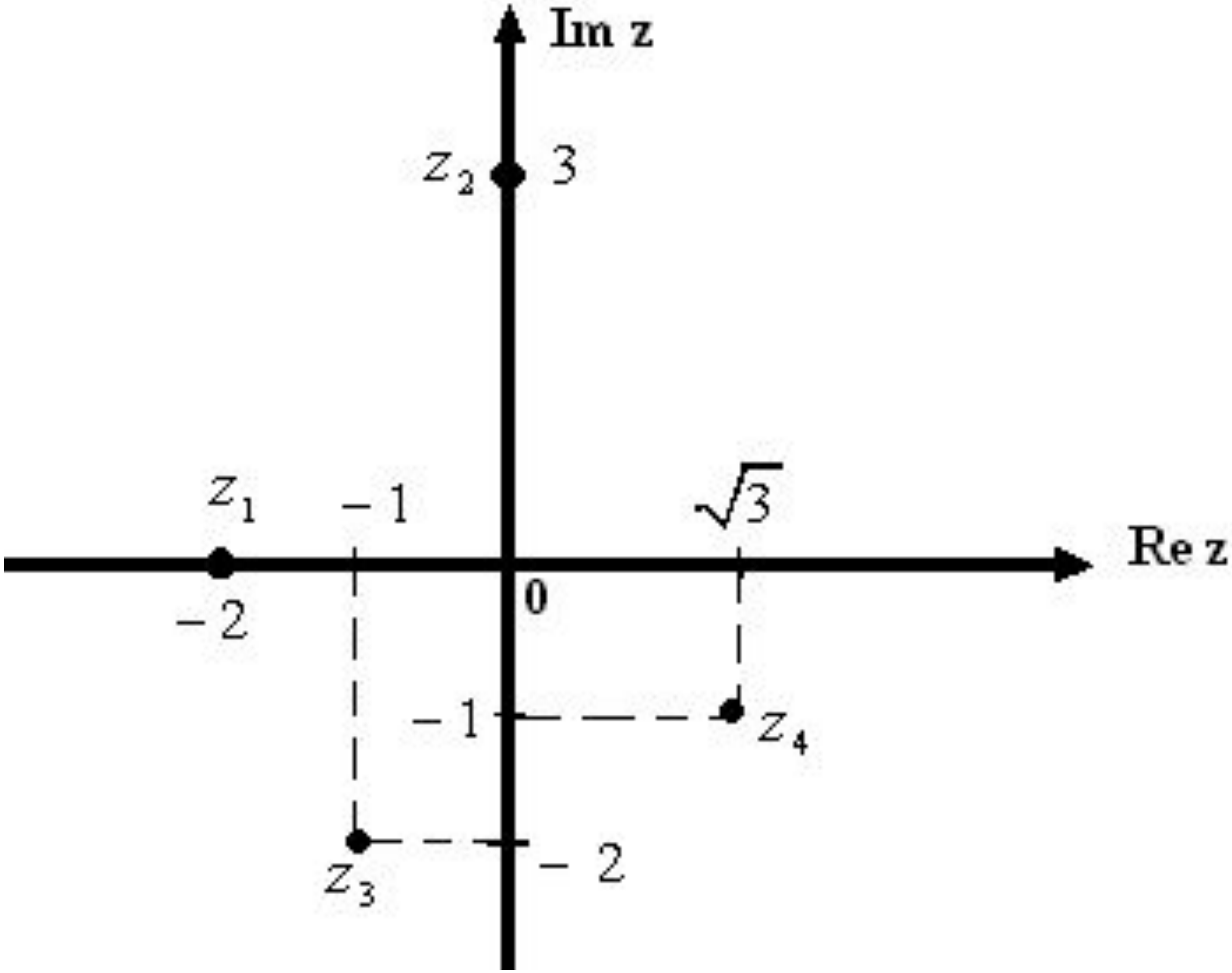
$$z_3 = -1 - 2i$$

$$z_4 = \sqrt{3} - i$$

Решение

назад

<u>Решение</u> (Пример 1).



$$z_1 = -2$$

$$z_2 = 3i$$

$$z_3 = -1 - 2i$$

$$z_4 = -i + \sqrt{3}$$

назад

3. Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме.

- Сложение (вычитание) комплексных чисел
- Умножение комплексных чисел
- Деление комплексных чисел
- Нахождение обратного числа к комплексному числу

Рассмотрим два комплексные числа

и

$$z_1 = a + b \cdot i \qquad z_2 = c + d \cdot i$$

назад

Сложение (вычитание):

$$z_1 + z_2 = (a + b \cdot i) + (c + d \cdot i) = (a + c) + (b + d) \cdot i$$

$$z_1 - z_2 = (a + b \cdot i) - (c + d \cdot i) = (a - c) + (b - d) \cdot i$$

Пример 2. Для $z_1 = 2i - 3,\ \ z_2 = 3 - 4i$ вычислить

$z_1 + z_2,\ \ z_1 - z_2,\ \ z_2 - z_1$

Решение

назад

<u>Решение</u> (Пример 2):

$$z_1 + z_2 = (-3 + 2i) + (3 - 4i) = (-3 + 3) + (2 - 4)i = -2i$$

$$z_1 - z_2 = (-3 + 2i) - (3 - 4i) = -6 + 6i$$

$$z_2 - z_1 = (3 - 4i) - (-3 + 2i) = 6 - 6i$$

назад

Умножение:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + b \cdot i) \cdot (c + d \cdot i) = (ac - bd) + (bc + ad) \cdot i$$

Пример 3. Для $z_1 = 2i - 3, \quad z_2 = 3 - 4i$ вычислить $z_1 \cdot z_2$

Решение

назад

Решение **(Пример 3):**

$$z_1 \cdot z_2 = (-3 + 2i) \cdot (3 - 4i) =$$

$$= (-3) \cdot 3 + (-3) \cdot (-4i) + 2i \cdot 3 + 2i \cdot (-4i) =$$

$$-8i^2 = -8 \cdot (-1) = 8$$

$$= -1 + 18i$$

назад

Деление: $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + b \cdot i}{c + d \cdot i} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i$$

Пример 4. Для $z_1 = 2i - 3, \quad z_2 = 3 - 4i$ вычислить $\dfrac{z_1}{z_2}$

Решение

назад

Решение (Пример 4):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-3+2i}{3-4i} = \frac{-3+2i}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i} =$$

$$= \frac{-9-12i+6i+8i^2}{9-16i^2} = -\frac{17}{25} - \frac{6}{25}i$$

$$16 \cdot (-1) = -16$$

назад

Нахождение обратного числа к комплексному числу :

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{a + b \cdot i} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} \cdot i$$

Пример 5. Для $z_1 = 2i - 3,\ z_2 = 3 - 4i$ вычислить $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}$

Решение

назад

<u>Решение</u> (Пример 5):

$$\frac{1}{z_1}=\frac{1}{-3+2i}=\frac{1}{-3+2i}\cdot\frac{-3-2i}{-3-2i}=$$

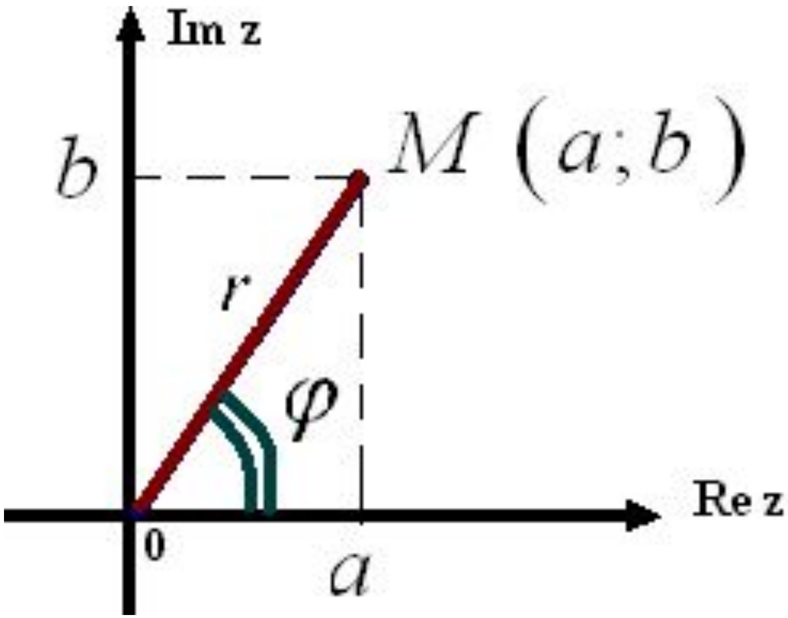
$$=\frac{-3-2i}{9-4i^2}=-\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i$$

$$\frac{1}{z_2}=\frac{1}{3-4i}=\frac{1}{3-4i}\cdot\frac{3+4i}{3+4i}=$$

$$=\frac{3+4i}{9-16i^2}=\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i$$

назад

4. Тригонометрическая форма комплексного числа.



ь (длина отрезка OM):

$$r = |z| = |OM| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

ент:

$$Arg\ z = arg\ z + 2\pi k,\ k \in Z,$$

$$\text{ãäå}\ \ arg\ z = \varphi,\ \ \varphi \in [0; 2\pi)$$

главное значение аргумента.

φ

Тогда

$$a = r \cdot \cos\varphi,\ b = r \cdot \sin\varphi \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a + b \cdot i = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

- ***тригонометрическая форма*** комплексного числа

Пример 6Пример 6.

назад

<u>Пример 6</u>. Представить следующие комплексные числа в тригонометрической форме

$$z_1 = -2$$

$$z_2 = 3i$$

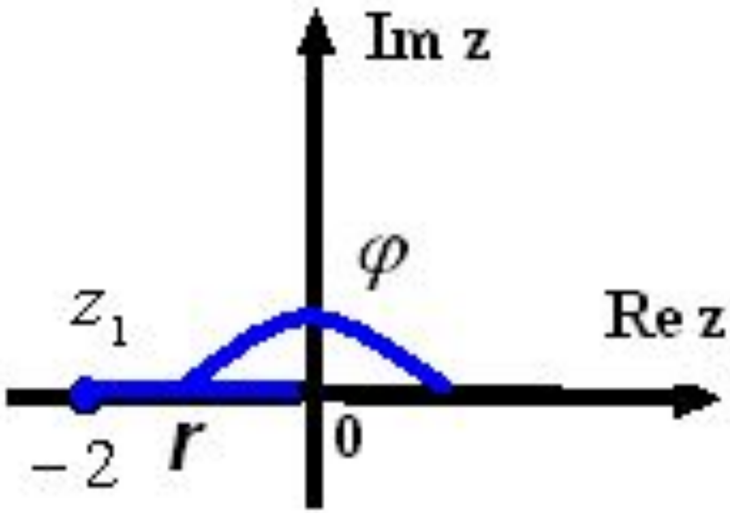
$$z_3 = -1 + i$$

$$z_4 = \sqrt{3} - i$$

<u>Решение</u>

<u>назад</u>

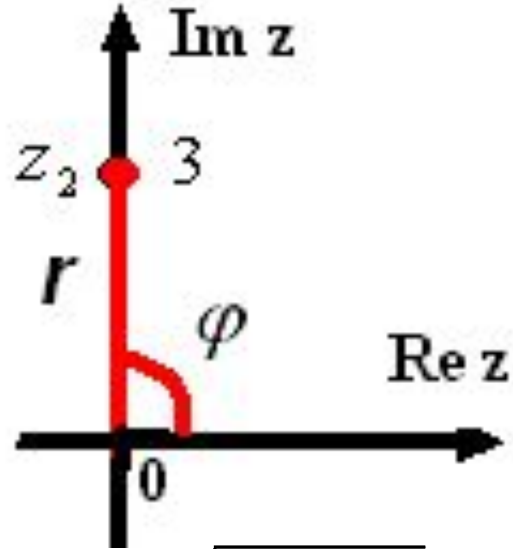
Решение (Пример 6).



$$r = |z_1| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$$

$$\varphi = \pi$$

$$z_1 = 2(\cos\pi + i\cdot\sin\pi)$$



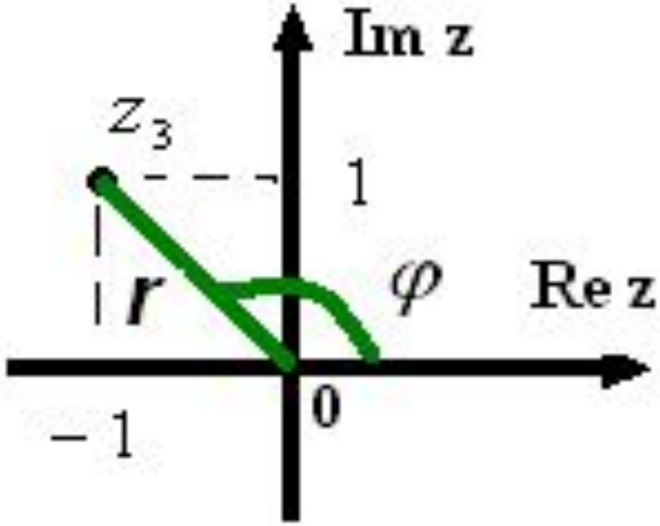
$$r = |z_2| = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\cdot\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

далее

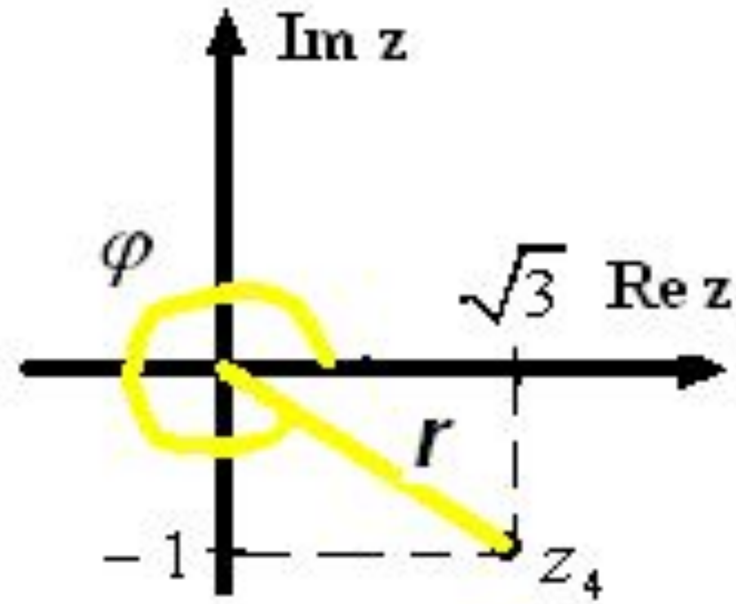
Решение **(Пример 6).**



$$r = |z_3| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\varphi = \frac{3\pi}{4}$$

$$z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$



$$r = |z_4| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2$$

$$\varphi = \frac{11\pi}{6}$$

$$z_4 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\cdot\sin\frac{11\pi}{6}\right)$$

назад

5. *Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме.*

Рассмотрим комплексные числа

$$z_1 = r_1\left(\cos\alpha + i^{\text{и}}\cdot\sin\alpha\right) \qquad z_2 = r_2\left(\cos\beta + i\cdot\sin\beta\right)$$

Сложение:

$$z_1 + z_2 = \left(r_1\cos\alpha + r_2\cos\beta\right) + i\cdot\left(r_1\sin\alpha + r_2\sin\beta\right)$$

Вычитание:

$$z_1 - z_2 = \left(r_1\cos\alpha - r_2\cos\beta\right) + i\cdot\left(r_1\sin\alpha - r_2\sin\beta\right)$$

далеедалее назад

Умножение:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1\left(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha\right)\cdot r_2\left(\cos\beta + i\cdot\sin\beta\right) =$$

$$= r_1 r_2\left(\cos\left(\alpha+\beta\right) + i\cdot\sin\left(\alpha+\beta\right)\right)$$

Деление:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\left(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha\right)}{r_2\left(\cos\beta + i\cdot\sin\beta\right)} =$$

$$= \frac{r_1\left(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha\right)}{r_2\left(\cos\beta + i\cdot\sin\beta\right)}\cdot\frac{\left(\cos\beta - i\cdot\sin\beta\right)}{\left(\cos\beta - i\cdot\sin\beta\right)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\cdot\left(\cos\left(\alpha-\beta\right) + i\cdot\sin\left(\alpha-\beta\right)\right)$$

назад

<u>*6. Возведение в степень комплексного числа.*</u>

Рассмотрим возведение в степень мнимой единицы:

$$i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ i^5 = i \text{ è ò.ä.}$$

$$i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i,\quad k = 0,1\ldots$$

При возведении $(a \pm b \cdot i)^2$ и $(a \pm b \cdot i)^3$ пользуются формулами сокращенного умножения.

<u>Пример 7</u>. Вычислить

$$1)\frac{i^{80} - i^{123}}{i^{73} + i^{68}};\quad 2)(3-5i)^2;\quad 3)(i-2)^3$$

<u>Решение</u>Решение <u>назад</u>

<u>Решение</u> (Пример 7):

$$1)\ \frac{i^{80}-i^{123}}{i^{73}+i^{68}}=\frac{i^{4\cdot 20+0}-i^{4\cdot 30+3}}{i^{4\cdot 18+1}+i^{4\cdot 17+0}}=\frac{i^{0}-i^{3}}{i^{1}+i^{0}}=\frac{1-(-i)}{i+1}=1$$

$$2)\ (3-5i)^2=9-30i+\underbrace{25i^2}_{25\cdot(-1)=-25}=-16-30i$$

$$3)\ (i-2)^3=\underbrace{i^3}_{-i}-\underbrace{3\cdot i^2\cdot 2}_{-6}+\underbrace{3\cdot i\cdot 2^2}_{12i}-\underbrace{2^3}_{8}=-2+11i$$

назад

Замечание. При возведении $\left(a \pm b \cdot i\right)^n$ пользуются формулой бином Ньютона или формулой возведения в степень комплексного числа (формула Муавра), заданного в тригонометрической форме.

Формула Муавра:

$$z^n = \left(r\left(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi\right)\right)^n = r^n\left(\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi\right)$$

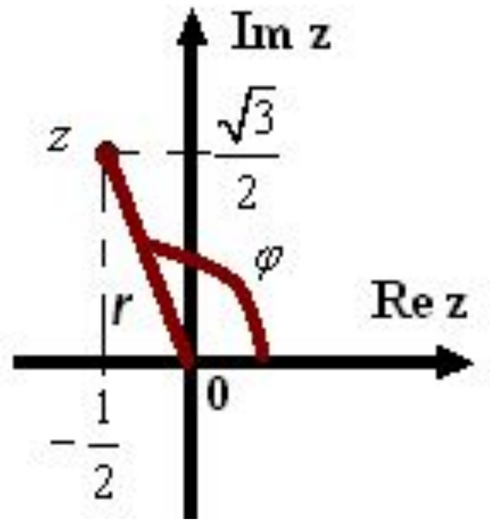
Пример 8. Вычислить $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2}\right)^6$

Решение

назад

Решение (Пример 8):

1) Представим $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ в тригонометрической форме:



$$r = |z| = 1, \quad \varphi = \frac{2\pi}{3}$$

$$z = \cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{3}$$

2) Воспользуемся формулой Муавра:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} i - \frac{1}{2}\right)^6 = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{3}\right)^6 = \cos\left(6 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(6 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$= \cos 4\pi + i \cdot \sin 4\pi = 1$$

назад

<u>*7. Извлечение корней из комплексного числа.*</u>

Извлечение квадратных корней:

$$\sqrt{a+b\cdot i}=u+v\cdot i \quad \Rightarrow \quad (u+v\cdot i)^2=a+b\cdot i$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} u^2-v^2=a \\ 2uv=b \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u^2=\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2} \\ v^2=\dfrac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2} \end{cases}$$

<u>**Пример 9.**</u> Вычислить $\sqrt{5-12i}$

<u>**Решение**</u>

<u>далее</u>далее <u>назад</u>

Решение (Пример 9):

$$\sqrt{5-12\cdot i}=u+v\cdot i \quad\Rightarrow\quad (u+v\cdot i)^2=5-12\cdot i$$

$$\Rightarrow\begin{cases}u^2-v^2=5\\ 2uv=-12\end{cases}\quad\Rightarrow\begin{cases}u^2=\dfrac{5+\sqrt{5^2+(-12)^2}}{2}=9\\ v^2=\dfrac{-5+\sqrt{5^2+(-12)^2}}{2}=4\end{cases}\Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}u=3\overset{uv=-6}{\Rightarrow}v=-2\\ u=-3\overset{uv=-6}{\Rightarrow}v=2\end{array}\right.\Rightarrow\sqrt{5-12\cdot i}=\pm(3-2\cdot i)$$

Извлечение корня n-ой степени:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r\left(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi\right)} =$$

$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \cdot \sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

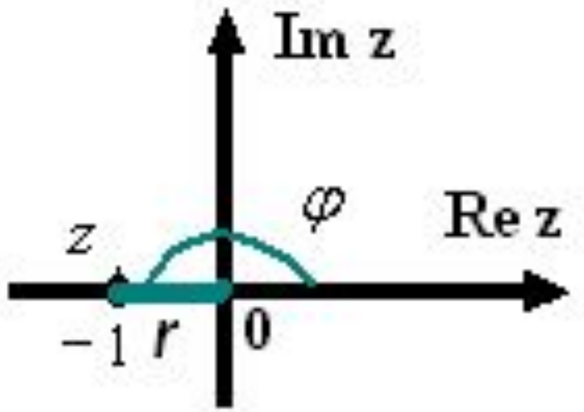
Пример 10. Вычислить $\sqrt[3]{-1}$

Решение

назад

Решение (Пример 10):

1) Представим $z=-1$ в тригонометрической форме



$$r=|z|=1,\quad \varphi=\pi$$

$$z=\cos\pi+i\cdot\sin\pi$$

2) Воспользуемся формулой извлечения корня n-ой степени:

$$\sqrt[3]{-1}=\sqrt[3]{\cos\pi+i\cdot\sin\pi}=$$

$$=\sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{3}+i\cdot\sin\frac{\pi+2\pi k}{3}\right),\quad k=0,1,2.$$

далее

Решение (Пример 10):

3) Рассмотрим случаи для k:

если $k=0 \Rightarrow z_1=\cos\frac{\pi+2\pi\cdot 0}{3}+i\cdot\sin\frac{\pi+2\pi\cdot 0}{3}=$

$$=\cos\frac{\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

если $k=1 \Rightarrow z_2=\cos\frac{\pi+2\pi\cdot 1}{3}+i\cdot\sin\frac{\pi+2\pi\cdot 1}{3}=$

$$=\cos\pi+i\cdot\sin\pi=-1.$$

если $k=2 \Rightarrow z_3=\cos\frac{\pi+2\pi\cdot 2}{3}+i\cdot\sin\frac{\pi+2\pi\cdot 2}{3}=$

$$=\cos\frac{5\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

назад

Спасибо за внимание!

Не забывайте готовиться к лекциям и семинарам!

Удачи!