





# ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА



# СОДЕРЖАНИЕ

-  1. Натуральные и целые числа
-  2. Рациональные числа
-  3. Иррациональные числа
-  4. Действительные числа



# НАТУРАЛЬНЫЕ И ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ... –

ряд натуральных чисел  $N$  или  $(Z_+)$

-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10, -11, ... –

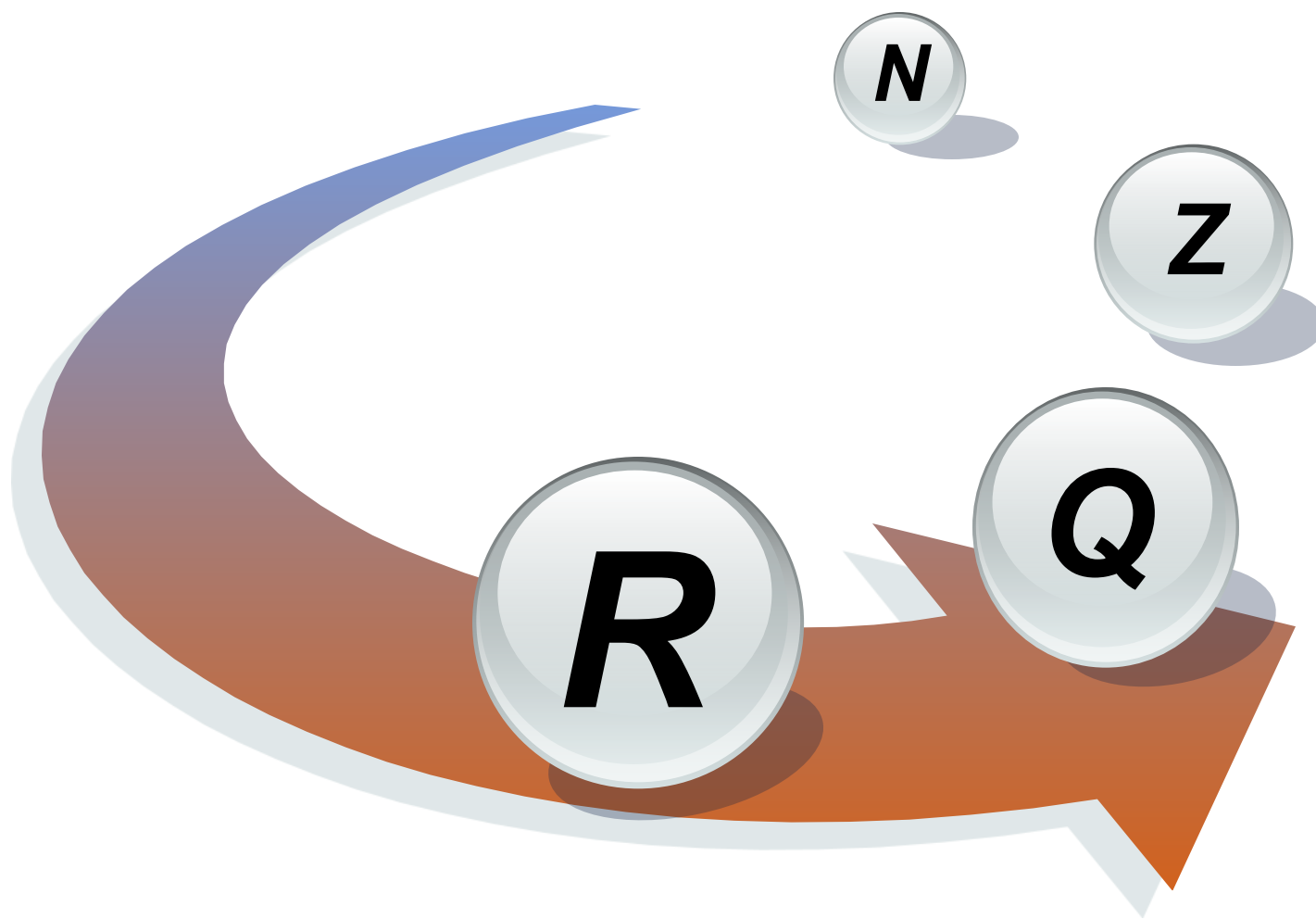
ряд противоположных натуральным чисел  $Z_-$

..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... –

ряд целых чисел  $Z$  ( $Z_+$  и  $Z_-$  и 0)



# МНОЖЕСТВА ЧИСЕЛ



# ДЕЛИМОСТЬ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Для двух натуральных чисел  $a$  и  $b$  если существует натуральное число  $q$  такое, что выполняется равенство  $a = bq$ , то говорят, что число  $a$  делится на число  $b$ .

$$a : b = q$$

$a$  – делимое

$b$  – делитель

$q$  – частное

$a \div b$  –  $a$  делится на  $b$  без остатка



# Свойства делимости

1° Если  $a \div c$  и  $c \div b$ , то  $a \div b$ .

Пример:  $144 \div 12$  и  $12 \div 3$ , то  $144 \div 3$ .

2° Если  $a \div b$  и  $c \div b$ , то  $(a + c) \div b$ .

Пример:  $84 \div 3$  и  $63 \div 3$ , то  $(84 + 63) \div 3$ .

3° Если  $a \div b$  и  $c$  не делится на  $b$ , то  $(a + c)$  не делится на  $b$ .

Пример:  $48 \div 3$  и  $52$  не делится на  $3$ ,  
то  $(48 + 52)$  не делится на  $3$ .



## Свойства делимости

4° Если  $a \div b$  и  $(a + c) \div b$ , то  $c \div b$ .

Пример:  $48 \div 3$  и  $(48 + 57) \div 3$ , то  $57 \div 3$ .

5° Если  $a \div b$  и  $c \div d$ , то  $ac \div bd$ .

Пример:  $81 \div 3$  и  $56 \div 4$ , то  $(81 \cdot 56) \div (3 \cdot 4)$ .

6° Если  $a \div b$  и  $c \in \mathbb{N}$ , то  $ac \div bc$ , и наоборот.

Пример:  $48 \div 12$  и  $11 \in \mathbb{N}$ , то  
 $(48 \cdot 11) \div (12 \cdot 11)$ , и обратно.



## Свойства делимости

7° Если  $a : b$  и  $c \in N$ , то  $ac : b$ .

Пример:  $48 : 3$  и  $13 \in N$ , то  $(48 \cdot 13) : 3$ .

8° Если  $a : b$  и  $c : b$ , то для любых  $n, k \in N$  следует  $(an + ck) : b$ .

Пример:  $81 : 9$  и  $54 : 9$ , то  $(81 \cdot 17 + 54 \cdot 28) :$

9° Среди  $n$  последовательных натуральных чисел **одно и только одно** делится на  $n$ .

Пример: среди трех последовательных натур. чисел 111, 112, 113 только одно делится на 3.  $(111 : 3)$





# Признаки делимости

**Для того, чтобы натуральное число делилось**

**На 2:** необходимо и достаточно, чтобы последняя цифра числа делилась на **2**.

Пример:  $56738 : 2$  т.к.  $8 : 2$ .

**На 5:** необходимо и достаточно, чтобы последняя цифра числа делилась на **5** (0 или 5).

Пример:  $56735 : 5$  т.к.  $5 : 5$ .

**На 10:** необходимо и достаточно, чтобы цифра единиц была **0**.

Пример:  $56730 : 10$ .



# Признаки делимости

**Для того, чтобы натуральное число делилось**

**На 4:** необходимо и достаточно, чтобы делилось на **4** число, образованное двумя последними цифрами.

Пример:  $56736 \div 4$ , т.к.  $36 \div 4$ .

**На 25:** необходимо и достаточно, чтобы делилось на **25** число, образованное двумя последними цифрами.

Пример:  $56775 \div 25$ , т.к.  $75 \div 25$ .

**На 8:** необходимо и достаточно, чтобы делилось на **8** число, образованное тремя последними цифрами.

Пример:  $56552 \div 8$ , т.к.  $552 \div 8$ .



# Признаки делимости

**Для того, чтобы натуральное число делилось**

**На 125:** необходимо и достаточно, чтобы делилось на **125** число, образованное тремя последними цифрами.

Пример:  $56375 \div 125$ , т.к.  $375 \div 125$ .

**На 3:** необходимо и достаточно, чтобы сумма его цифр делилась на **3**.

Пример:  $56742 \div 3$ , т.к.  $(5+6+7+4+2) \div 3$ .

**На 9:** необходимо и достаточно, чтобы сумма его цифр делилась на **9**.

Пример:  $56545 \div 9$ , т.к.  $(5+6+7+4+5) \div 9$ .



# Признаки делимости

**Для того чтобы натуральное число делилось**

**На 11:** необходимо и достаточно, чтобы сумма его цифр, взятых со знаком «+», стоящих на нечетных местах, и сумма цифр, взятых со знаком «-», стоящих на четных местах, делилась на **11**.

Пример:  $8637519 : 11$ , т.к.  $(9-1+5-7+3-6+8) : 11$ .

**На 7 (на 13):** необходимо и достаточно, чтобы сумма чисел, образующих грани, взятых со знаком «+» для нечетных граней и со знаком «-» для четных граней, делилась на **7 (на 13)**.

Пример:  $254\ 390\ 815 : 7$ , т.к.  $(815-390+254) : 7$ .

# Обозначения

$$\overline{abcdef} = 100000a + 10000b + 1000c + 100d + 10e + f$$

Пример:  $\overline{2543} = 2 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 3$

Пример:  $\overline{100410} = 1 \cdot 100000 + 4 \cdot 100 + 1 \cdot 10$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n - 3)(n - 2)(n - 1)n$$

Примеры:  $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$

$$2! = 1 \cdot 2 = 2$$

$$1! = 1$$

$$0! = 1$$



# Деление с остатком

**Теорема 4.** Если натуральное число  $a$  больше натурального числа  $b$  и  $a$  не делится на  $b$ , то существует, и только одна, пара натуральных чисел  $q$  и  $r$ , причем  $r < b$ , такая что выполняется равенство:

$$a = bq + r$$

$a$  – делимое

$q$  – неполное частное

$b$  – делитель

$r$  – остаток

Пример:  $37 : 15 = 2$  (ост. 7)

$a = 37$ ,  $b = 15$ , тогда  $37 = 15 \cdot 2 + 7$ ;

где  $q = 2$ ,  $r = 7$ .

**Замечание.** Если  $a \div b$ , то можно считать, что  $r = 0$ .



# Простые числа


Если натуральное число имеет только два делителя – само себя и 1, то его называют **простым числом**.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, ... – простые числа.

**Теорема 1.** Любое, натуральное число  $a > 1$  имеет хотя бы один простой делитель.

**Теорема 2.** Множество простых чисел бесконечно.

**Теорема 3.** Расстояние между двумя соседними простыми числами может быть больше любого наперед заданного натурального числа.



# Составные числа

Если натуральное число имеет более двух делителей, то его называют **составным числом**.

4, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 39, 40, 42, 44, 45, 46, 48, 49, 50, 51, 52, 54, 55, 56, 57, 58, 60, 62, 63, ... – составные числа

**1** не является ни простым, ни составным числом.

**Основная теорема арифметики.** Любое натуральное число (кроме 1) либо является простым, либо его можно разложить на простые множители.

Примеры:  $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ ;  $56 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$ .





# Наибольший общий делитель (НОД)

Найти НОД чисел: 72 и 96.

Делители числа 72: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72

Делители числа 96: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96

Среди них есть **одинаковые**: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 24

Их называют **общими делителями** чисел 72 и 96, а наибольшее из них называют **наибольшим общим делителем (НОД)** чисел 72 и 96.

$$\text{НОД}(72; 96) = 24$$



# Наибольший общий делитель (НОД)

Два натуральных числа  $a$  и  $b$  называют **взаимно простыми** числами, если у них нет общих делителей, отличных от  $1$ , т.е.  $\text{НОД}(a, b) = 1$ .

Пример:  $35$  и  $36$  взаимно простые числа, т.к.  $\text{НОД}(35; 36) = 1$ .



# Наименьшее общее кратное (НОК)

Найти НОК чисел: 12 и 18.

Кратные числа 12: 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, ...

Кратные числа 18: 18, 36, 54, 72, 90, 108, 126, 144, ...

Среди них есть одинаковые: 36, 72, 108, 144, ...

Их называют общими кратными чисел 12 и 18, а наименьшее из них называют наименьшим общим кратным (НОК) чисел 12 и 18.

$$\text{НОК}(12; 18) = 36$$



# Разложение на простые множители

$$\begin{array}{r|l} 3780 & 2 \\ 1890 & 2 \\ 945 & 3 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 7056 & 2 \\ 3528 & 2 \\ 1764 & 2 \\ 882 & 2 \\ 441 & 3 \\ 147 & 3 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{НОД } (3780; 7056) &= \\ &= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 252 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{НОК } (3780; 7056) &= \\ &= 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 = \\ &= 105840 \end{aligned}$$

$$3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$$

$$7056 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2$$



## РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Рациональные числа – это числа вида  $\frac{m}{n}$ ,  
где  $m$  – целое число, а  $n$  – натуральное.

$Q$  - множество рациональных чисел.

Любое рациональное число можно записать в виде конечной десятичной дроби или в виде бесконечной десятичной периодической дроби.

Примеры:  $\frac{5}{28} = 0,17(857142); \quad \frac{2}{7} = 0,(285714);$

$6 = 6,000... = 6,(0); \quad 7,432 = 7,432000... = 7,432(0).$



## РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

*Верно и обратное утверждение:*

*Любую бесконечную десятичную периодическую дробь можно представить в виде обыкновенной дроби.*

Примеры:  $0,3333\dots = 0,(3) = \frac{1}{3};$

$$0,3181818\dots = 0,3(18) = \frac{7}{22}.$$



## РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Записать в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную периодическую дробь :

Пример (1 способ):

Пусть  $x = 1,(23) = 1,232323\dots$

Умножим  $x$  на 100, чтобы запятая переместилась вправо на один период:

$$\begin{array}{r} \underline{100x = 123,232323\dots} \\ x = 1,232323\dots \\ \hline 100x - x = 122,000000\dots \end{array}$$

Т.е.  $99x = 122$ , откуда  $x = \frac{122}{99}$



## РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Записать в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную периодическую дробь :

Пример (2 способ):

Пусть  $1,(23) = 1,232323... = 1 + 0,23 + 0,0023 + 0,000023 + ...$

Рассмотрим эту сумму  $1$  и суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:  $S = 1 + S_1$ , где  $S_1 = b_1 / (1 - q)$  — формула суммы бесконечно убывающей прогрессии со знаменателем  $q = 0,01$ , и первым членом  $b_1 = 0,23$ :

$$S_1 = \frac{0,23}{1 - 0,01} = \frac{23}{99}$$
$$S = 1 + \frac{23}{99} = \frac{122}{99}$$





# ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Иррациональным числом называют бесконечную десятичную непериодическую дробь.

Термины «рациональное число», «иррациональное число» происходят от латинского слова *ratio* – разум (буквальный перевод: «рациональное число – разумное число», «иррациональное число – неразумное число»).

Примеры:

$0,1234567891011121314\dots$

$\pi \approx 3,1415926535897932\dots$

$e \approx 2,7182818284590452\dots$

$\sqrt{11} \approx 3,31662479035539\dots$

