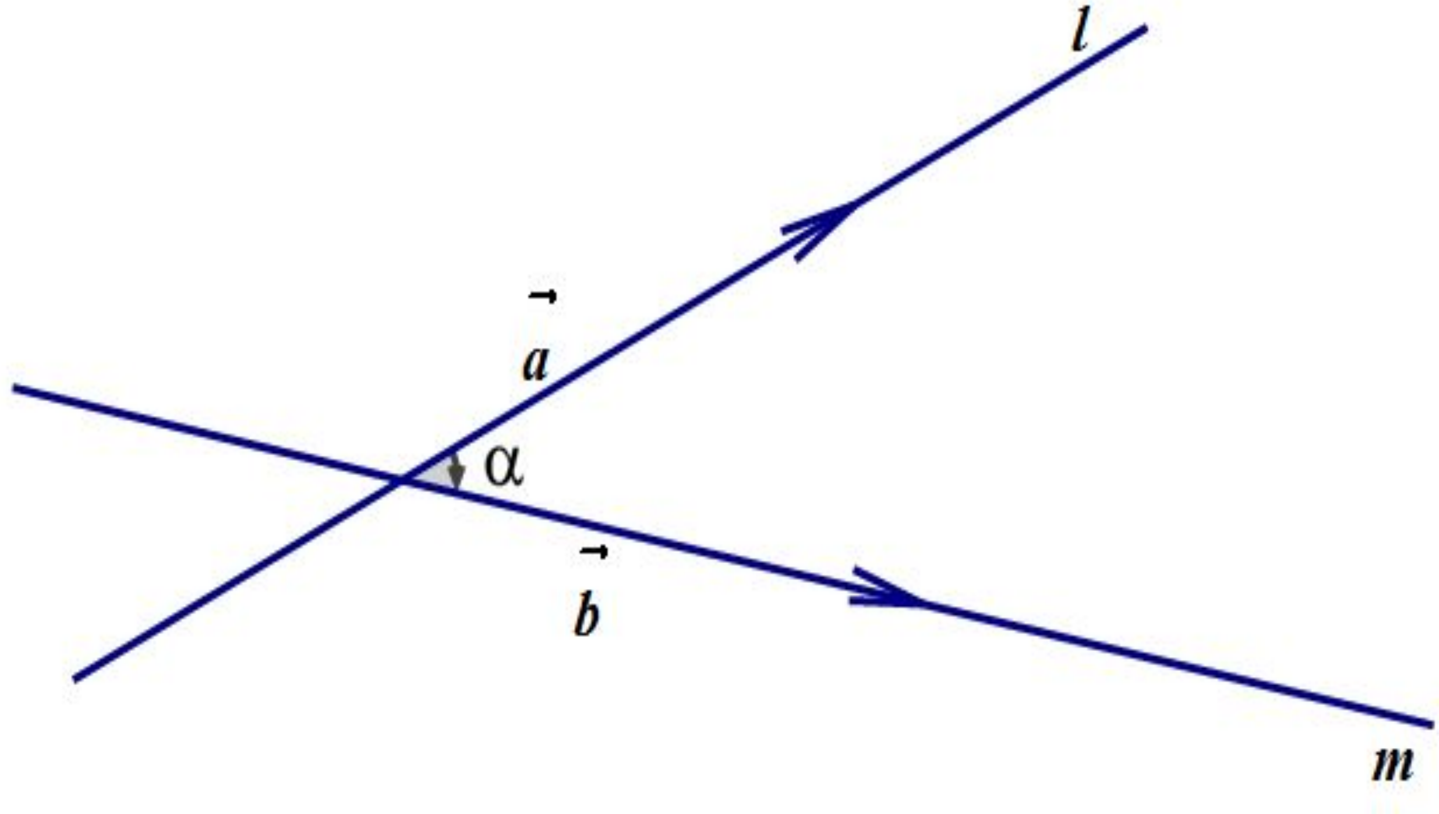
Решение стереометрических задач методом координат. Построение сечений

Угол между прямыми

$\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$

и $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$.



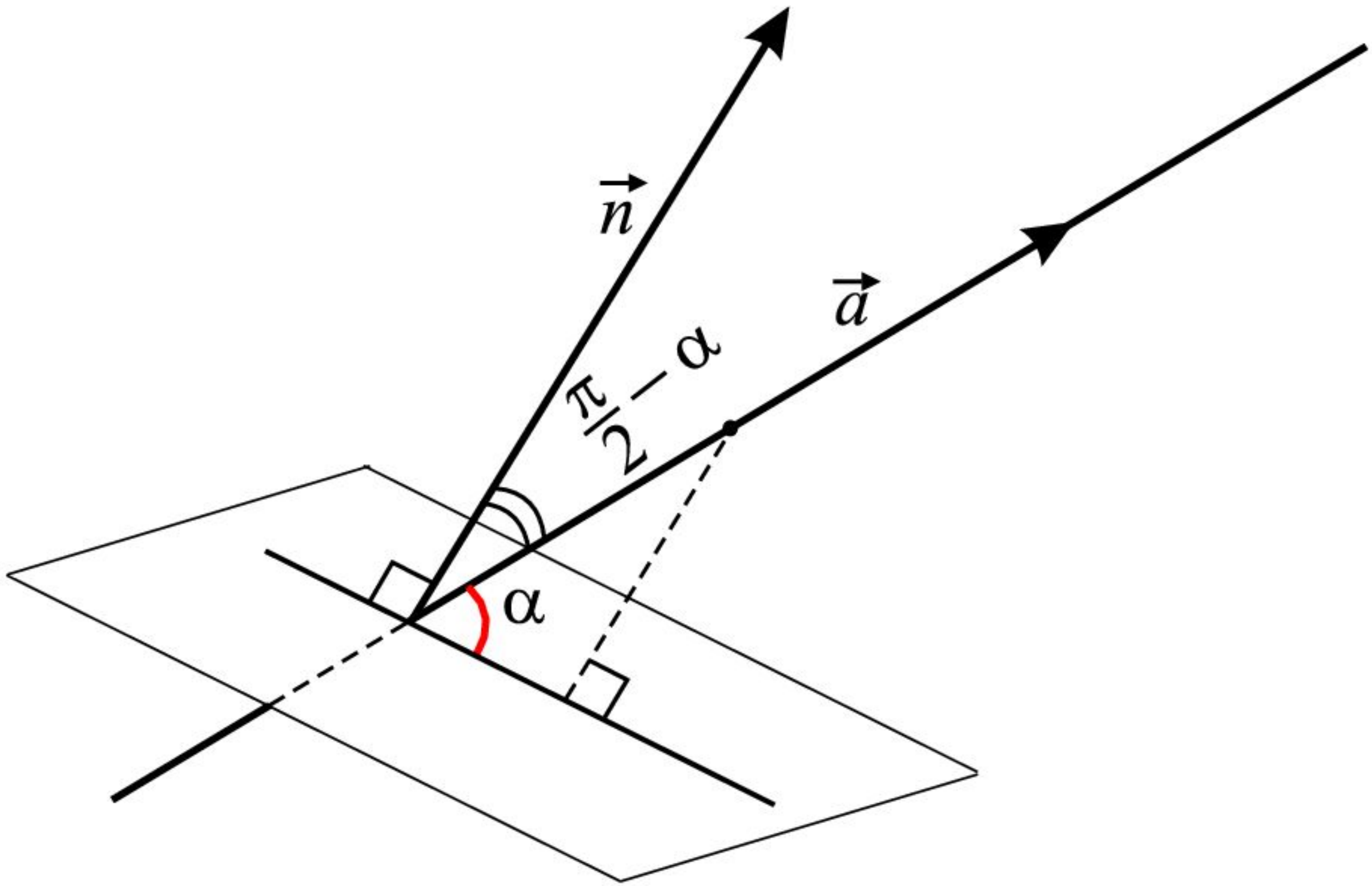
$$\cos\alpha = \frac{\left|\vec{a} \cdot \vec{b}\right|}{a \cdot b} = \frac{\left|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2\right|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Угол между прямой и плоскостью

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha=\frac{\left|\vec{a}\cdot\vec{n}\right|}{a\cdot n}$$

$\vec{a}$ – **направляющий вектор прямой**

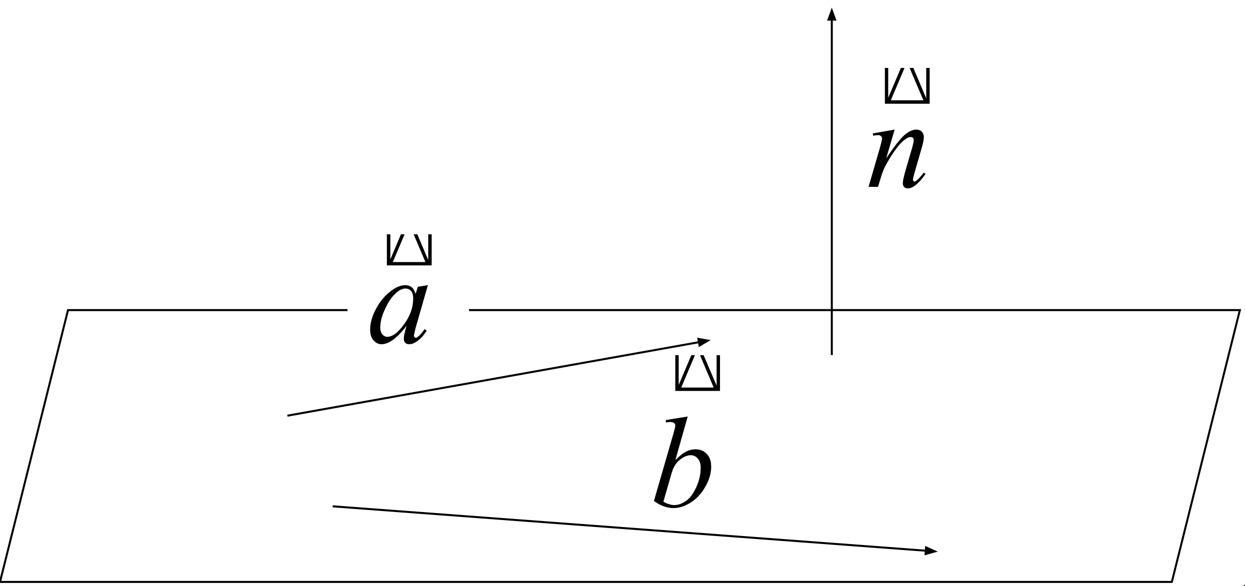
$\vec{n}$ – **вектор нормали к плоскости**



Координаты вектора нормали к плоскости

$$\vec{a}(a_1, a_2, a_3), \ \vec{b}(b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{n}(x, y, z) \text{ - ?}$$

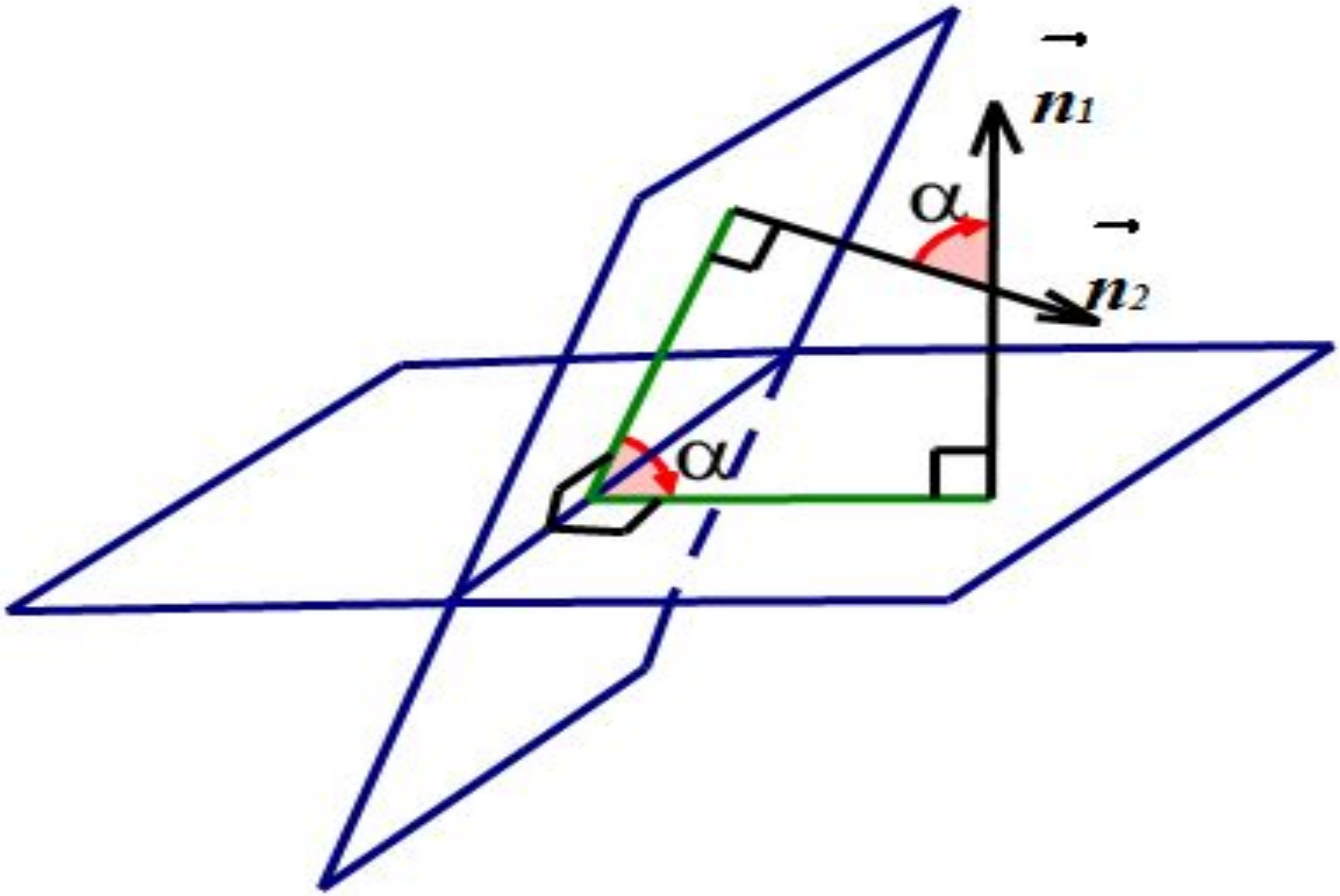


$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{n} = 0 \\ \vec{b} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 x + a_2 y + a_3 z = 0 \\ b_1 x + b_2 y + b_3 z = 0 \end{cases}$$

Угол между плоскостями

$$\cos\alpha = \frac{\left|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2\right|}{n_1 \cdot n_2}$$

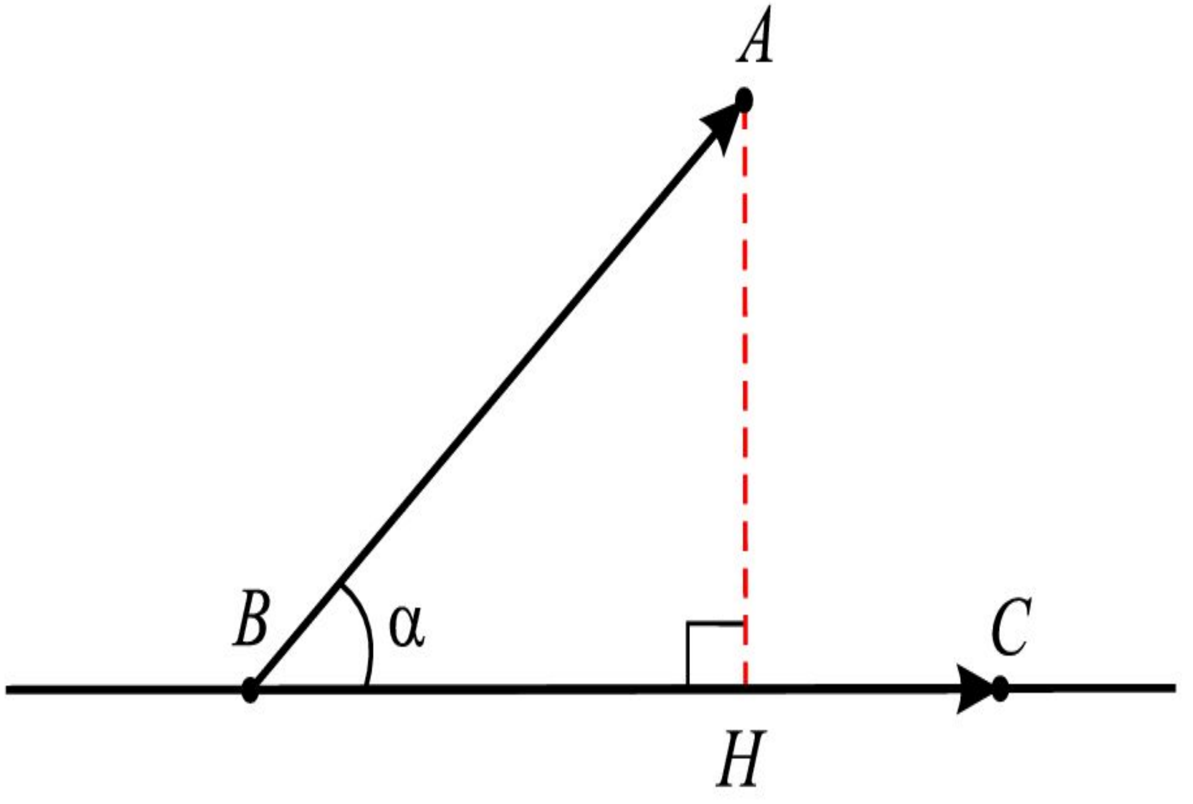


Расстояние от точки до прямой

$$\rho(A,BC)$$

1) $\cos\alpha = \dfrac{\left|\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}\right|}{BA\cdot BC}$

2) $AH = AB\sqrt{1-\cos^2\alpha}$



Расстояние от точки до плоскости

$$\rho = \frac{\left|ax_0 + by_0 + cz_0 + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

где (x_0, y_0, z_0) — координаты точки,

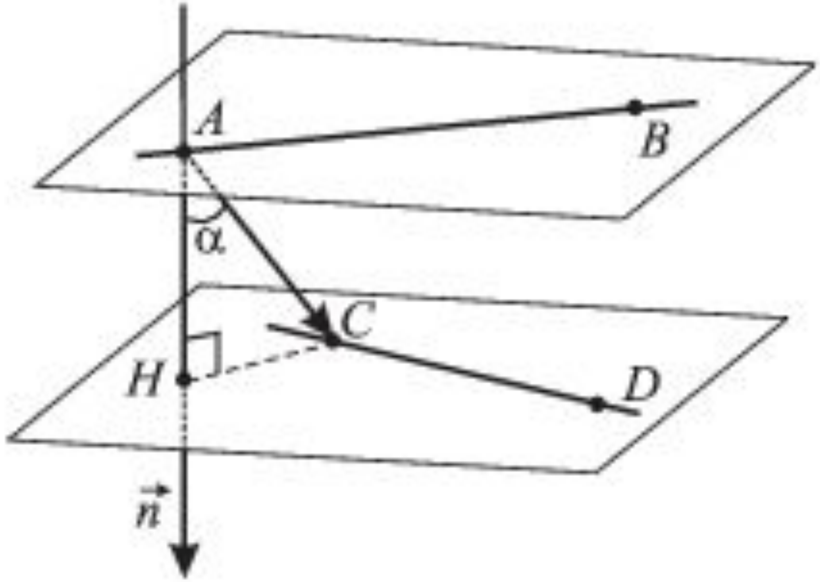
$ax+by+cz+d=0$ - уравнение плоскости.

Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми

(метод координат)

1) Классический метод — построение отрезка общего перпендикуляра и нахождение его длины.
2) Проектирование.
3) Метод координат. Использование вспомогательной плоскости.
4) Метод координат. Проекция на нормаль.
5) Векторный метод.

Найти расстояние между скрещивающимися прямыми AB и CD.



$\overrightarrow{n}$ — произвольный вектор, который перпендикулярен обеим прямым, а следовательно, и обеим этим плоскостям. Видно, что искомое расстояние между прямыми AB и CD равно AH и представляет собой длину проекции вектора AC на вектор $\overrightarrow{n}$. Легко понять, что вместо вектора $\overrightarrow{AC}$ можно взять любой вектор, начало которого лежит на одной прямой, а конец — на другой.

Алгоритм

1) Вводим систему координат и определяем в ней координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

2) Находим координаты какого-нибудь вектора $\overrightarrow{n}(x, y, z)$, перпендикулярного обоим векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$. Это можно сделать уже привычным для читателя способом, используя условия перпендикулярности:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{n} = 0, \\ \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{n} = 0. \end{cases}$$

3) Находим координаты какого-нибудь вектора, начало которого лежит на одной прямой, а конец — на другой. Пусть, например, это будет вектор $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AC}$. Найти проекцию вектора $\overrightarrow{a}$ на вектор $\overrightarrow{n}$ можно из определения скалярного произведения, а именно: скалярному произведению $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{a}$ соответствует умножение длины вектора $\overrightarrow{n}$ на проекцию вектора $\overrightarrow{a}$ на вектор $\overrightarrow{n}$:

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{a} = |\overrightarrow{n}| \cdot |\overrightarrow{a}| \cos \alpha = |\overrightarrow{n}| \cdot \text{Пр}_{\overrightarrow{n}} \overrightarrow{a},$$

где $\text{Пр}_{\overrightarrow{n}} \overrightarrow{a}$ — искомая проекция. Отсюда расстояние между прямыми можно вычислить по формуле

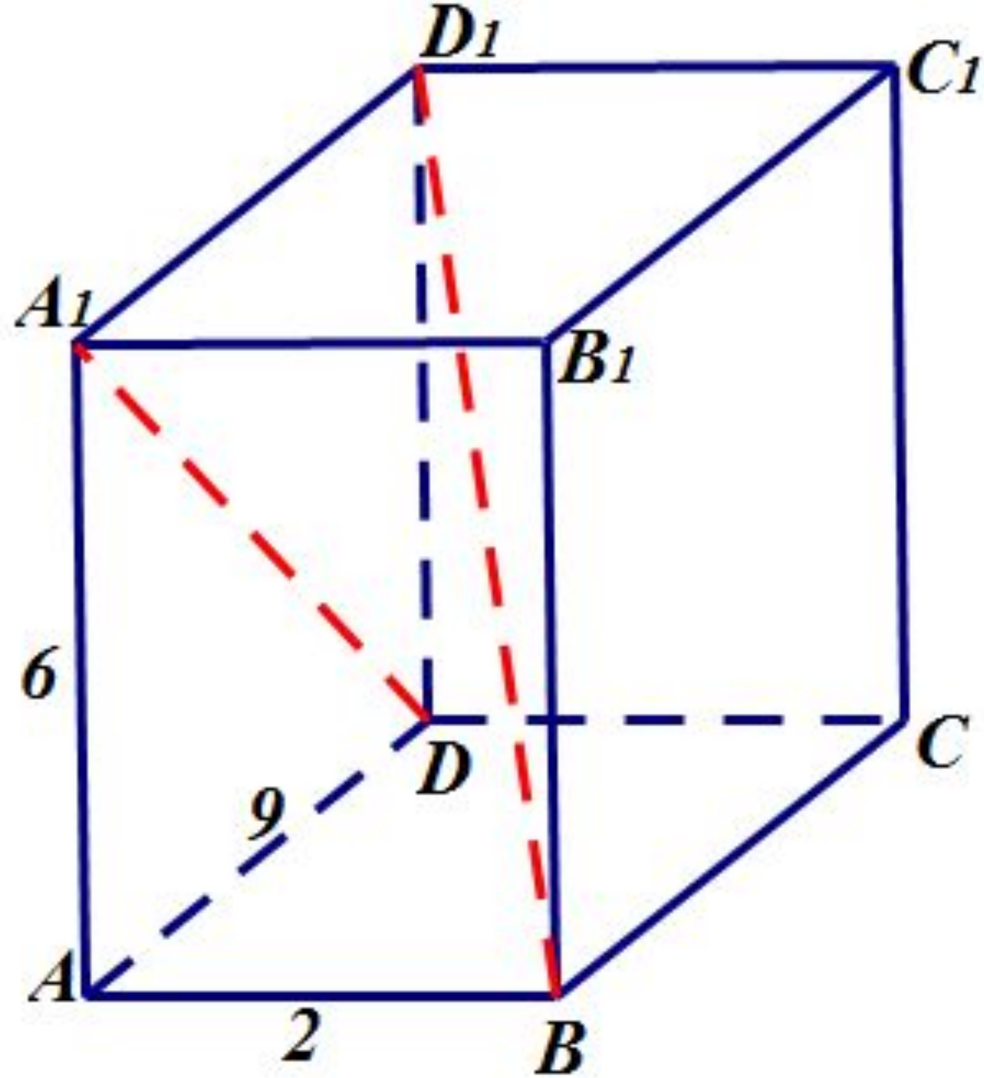
$$\rho = \left|\text{Пр}_{\overrightarrow{n}} \overrightarrow{a}\right| = \frac{|\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{n}|}.$$

Задача

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB=2$, $AD=9$, $AA_1=6$.

Найдите угол между

прямыми A_1D и BD_1.



Решение. ***1 способ (метод координат)***

D(0; 0; 0), B(9; 2; 0);

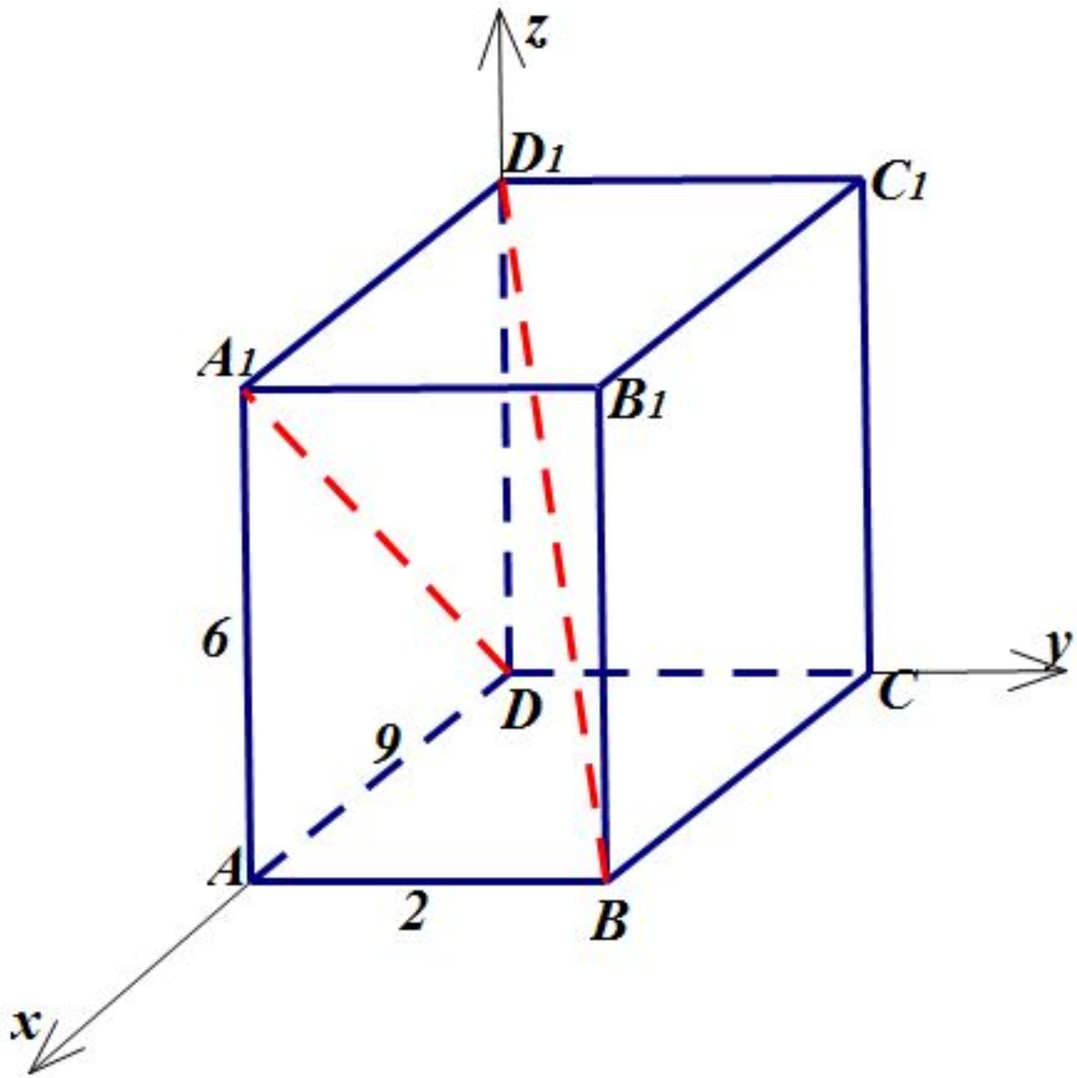
A_1(9; 0; 6); D_1(0; 0; 6)

$\overrightarrow{DA_1}\{9; 0; 6\}$; $DA_1 = 3\sqrt{13}$.

$\overrightarrow{BD_1}\{-9; -2; 6\}$; $BD_1 = 11$.

$\cos\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{DA_1}\cdot\overrightarrow{BD_1}|}{DA_1\cdot BD_1}$.

$\cos\alpha = \dfrac{|-81+36|}{3\sqrt{13}\cdot 11} = \dfrac{15}{11\sqrt{13}}$.



2 способ (геометрический)

D(0; 0; 0), B(9; 2; 0);

A_1(9; 0; 6); D_1(0; 0; 6)

$\overrightarrow{DA_1}\{9; 0; 6\}; DA_1 = 3\sqrt{13}.$

$\overrightarrow{BD_1}\{-9; -2; 6\}; BD_1 = 11.$

$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{DA_1} \cdot \overrightarrow{BD_1}|}{DA_1 \cdot BD_1}.$

$\cos\alpha = \frac{|-81+36|}{3\sqrt{13} \cdot 11} = \frac{15}{11\sqrt{13}}.$