Аксиомы стереометрии. Параллельность в пространстве

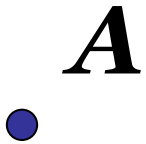
- Аксиомы стереометрии и их следствия
- Взаимное расположение прямых в пространстве
- Взаимное расположение прямой и плоскости. Параллельность плоскостей

10.2.1	знать аксиомы стереометрии, их следствия; иллюстрировать и записывать их с помощью математических символов;
10.2.2	знать определение параллельных и скрещивающихся прямых в пространстве, определять и изображать их
10.2.3	знать свойства параллельных прямых в пространстве и применять их при решении задач
10.2.4	знать признак и свойства параллельности прямой и плоскости, применять их при решении задач;
10.2.5	знать признак и свойства параллельности плоскостей, применять их при решении задач;

Стереометрия

- раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур в пространстве

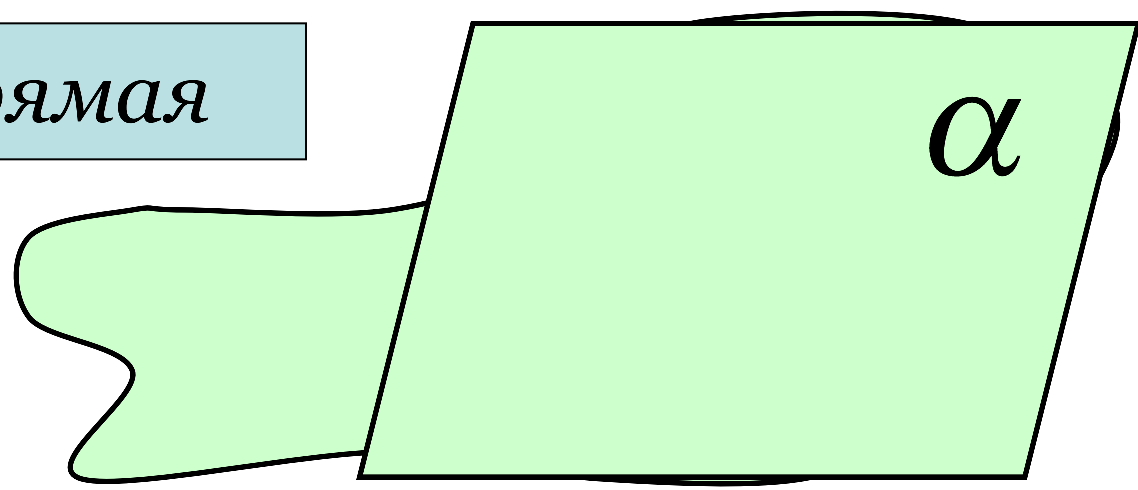
Основные фигуры в пространстве:



Точка

Прямая

Плоскость



СТЕРЕОМЕТРИЯ

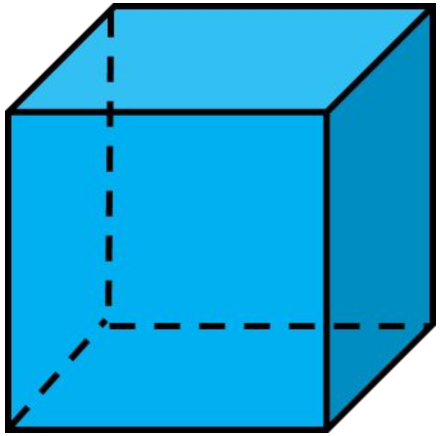
точка $A, B, C, \ldots$

прямая $a, b, c, \ldots$

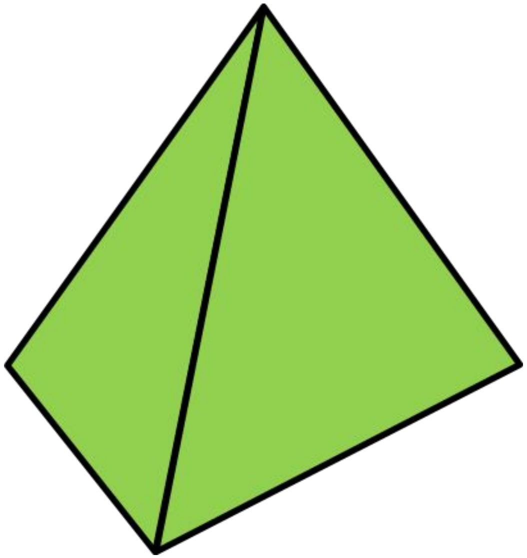
или $AB, BC, CD, \ldots$

плоскость $\alpha, \beta, \gamma,$

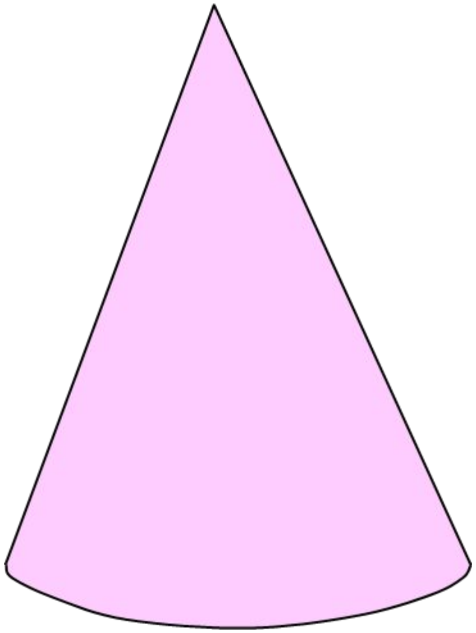
Геометрические тела:



Куб



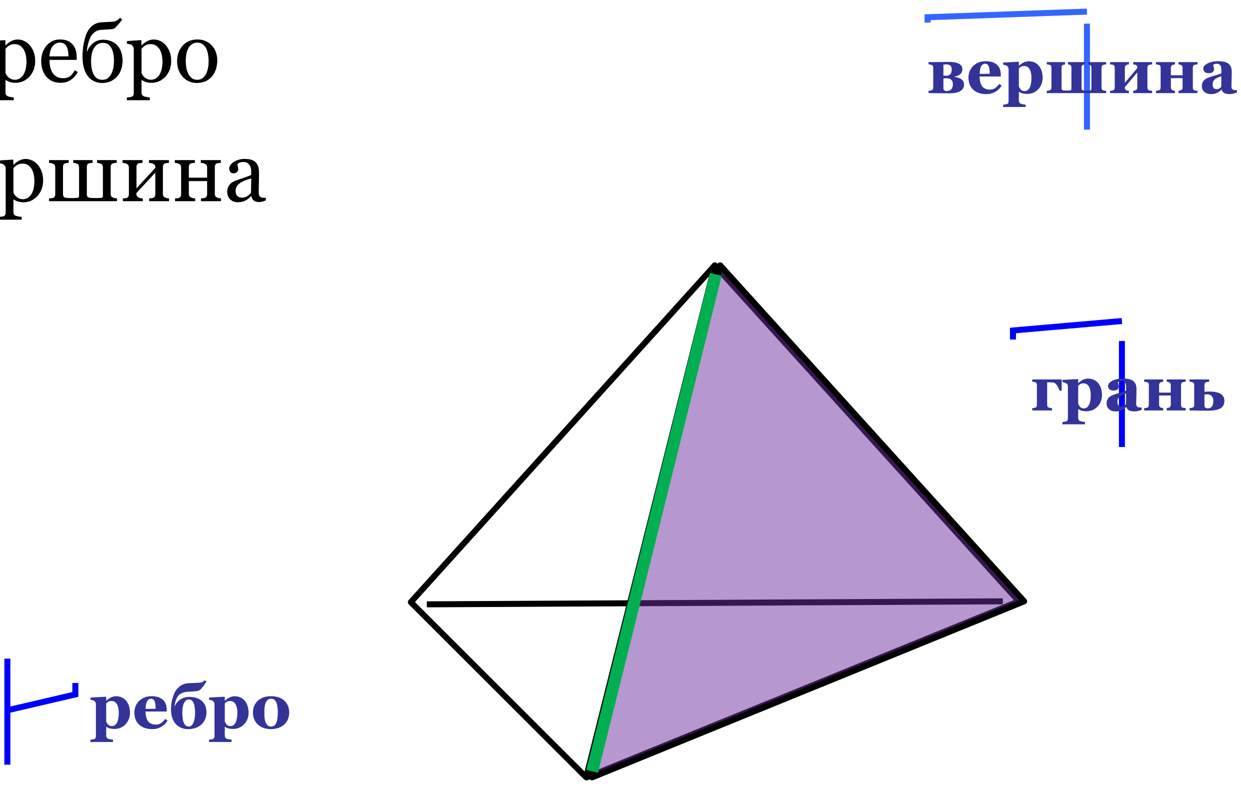
Пирамида



Конус

Геометрические понятия

- Плоскость – грань
- Прямая – ребро
- Точка – вершина



Аксиомы стереометрии и их следствия

Стереометрия **широко используется в строительном деле, архитектуре, машиностроении, геодезии, во многих других областях науки и техники**

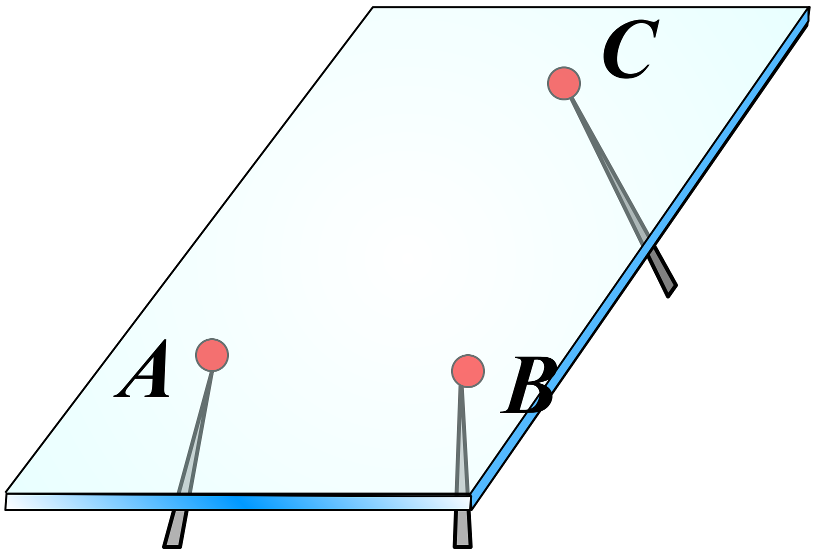
Аксиома

(от греч. axíõma – принятие положения)

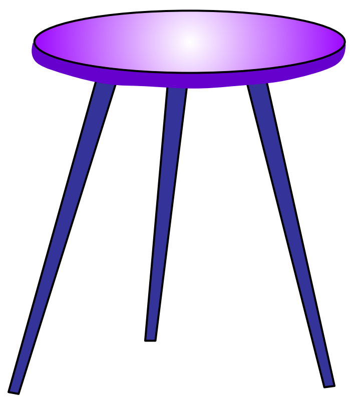
- это утверждение, принимаемое без доказательства

Аксиома 1

A_1. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна



Самый простой пример к аксиоме A_1 из повседневной жизни:

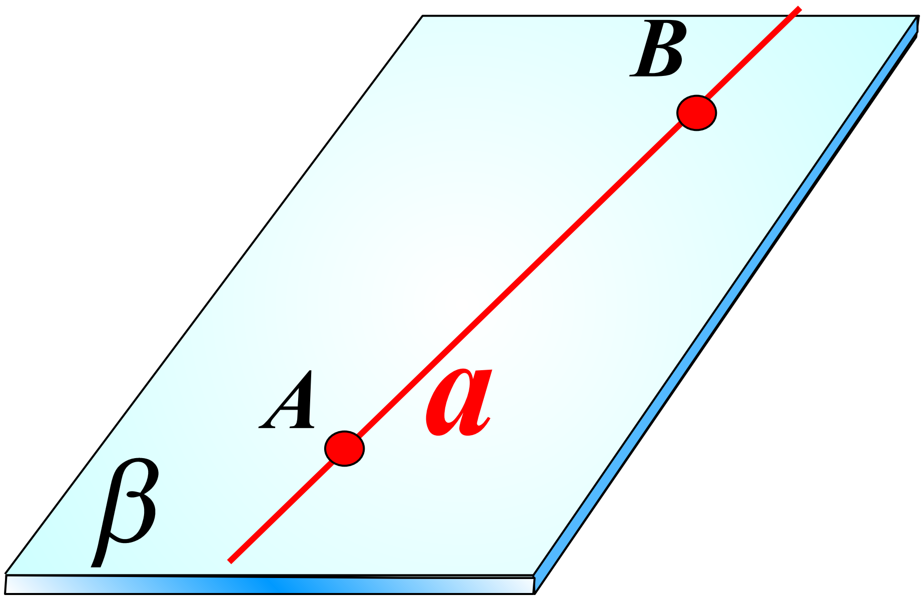


Табурет с тремя ножками всегда идеально встанет на пол и не будет качаться. У табурета с четырьмя ножками бывают проблемы с устойчивостью, если ножки стула не одинаковые по длине.

Табурет качается, т. е. опирается на три ножки, а четвертая ножка (четвертая «точка») не лежит в плоскости пола, а висит в воздухе.

Аксиома 2

A_2. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости



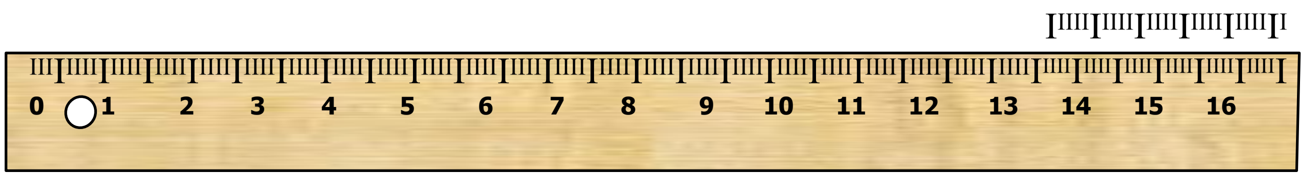
$$A \in \beta$$

$$B \in \beta$$

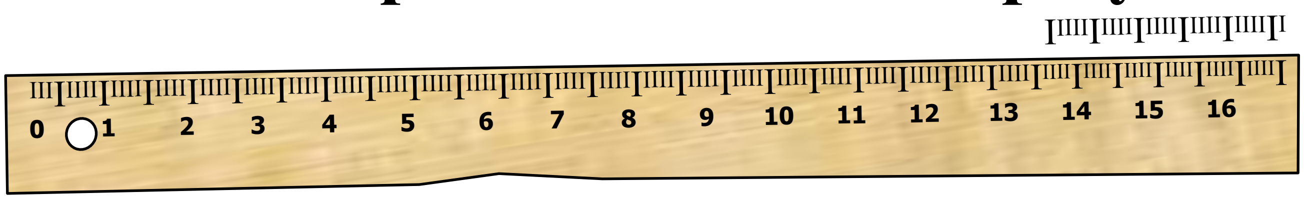
$$a \subset \beta$$

Свойство, выраженное в аксиоме A_2, используется для проверки «ровности» чертежной линейки

Линейку прикладывают краем к плоской поверхности стола. Если край линейки ровный, то он всеми своими точками прилегает к поверхности стола

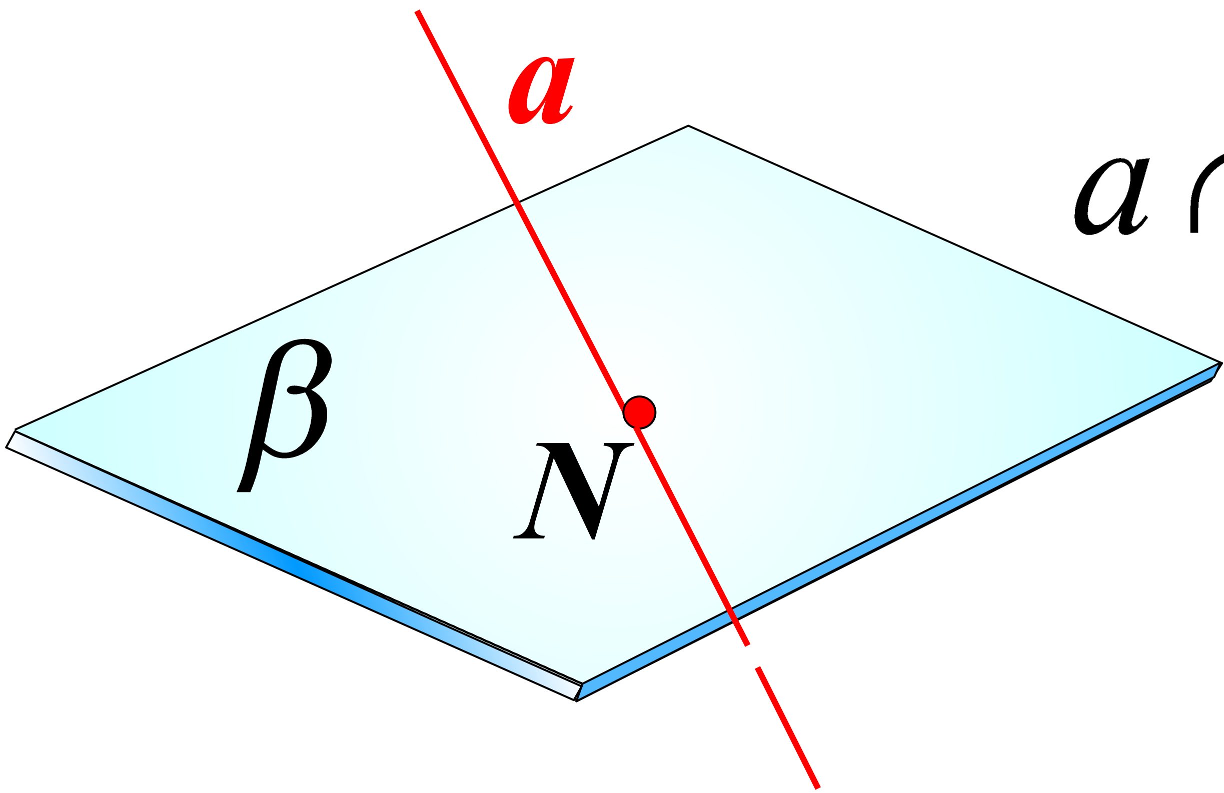


Если край неровный, то в каких-то местах между ним и поверхностью стола образуется просвет



Следствия из аксиомы A_2:

1. Если прямая не лежит в данной плоскости, то она имеет с ней не более одной общей точки
2. Если прямая и плоскость имеют только одну общую точку, то говорят, что они пересекаются



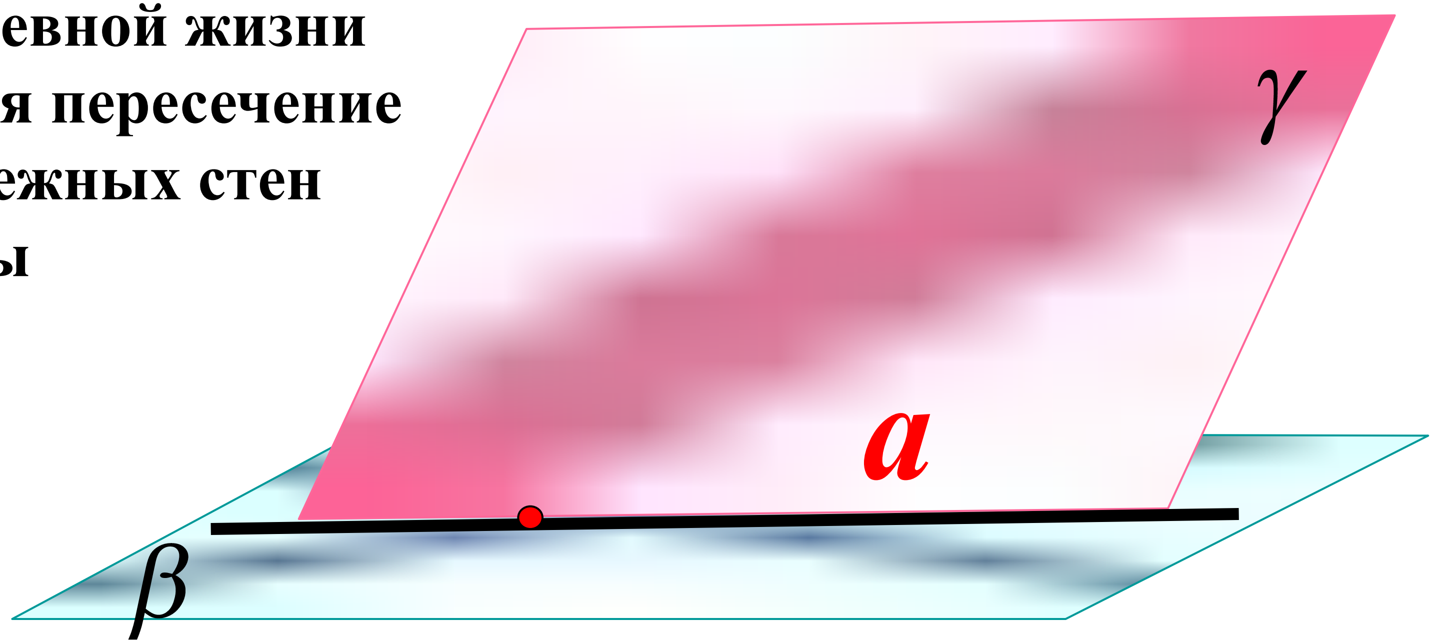
$$a \cap \beta = N$$

Аксиома 3

A_3. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей

$$\beta \cap \gamma = a$$

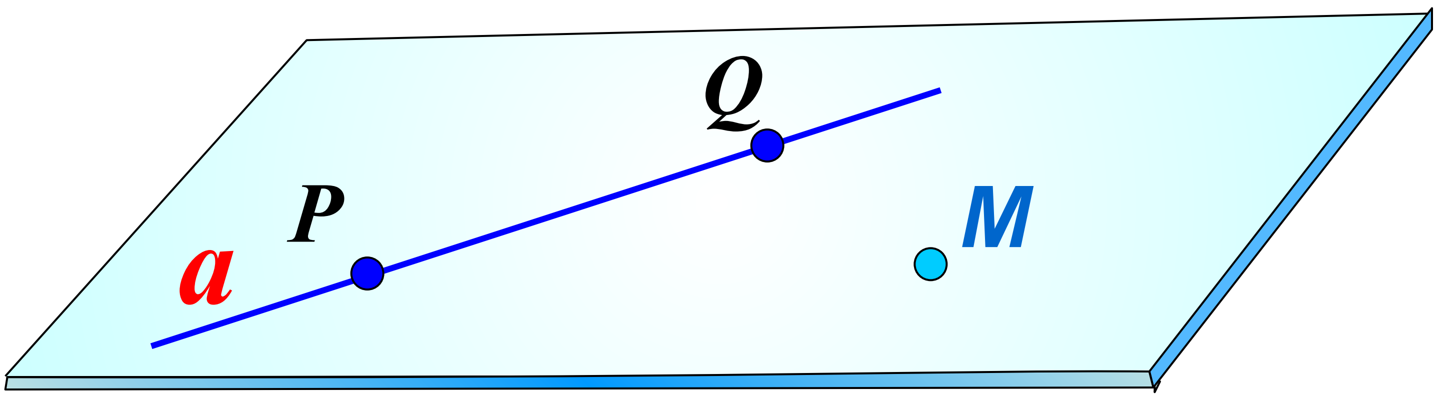
Самый простой пример к аксиоме A_3 из повседневной жизни является пересечение двух смежных стен комнаты



Следствия из аксиом

Теорема 1

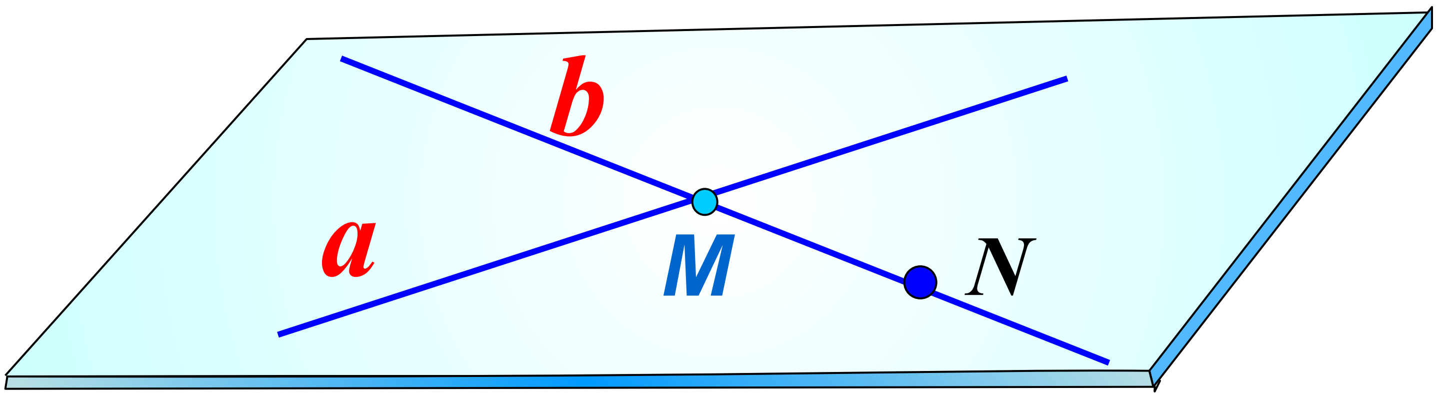
Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна



Доказательство: **По аксиоме планиметрии на прямой *a* возьмем две точки *P* и *Q*. Имеем три точки не принадлежащие одной прямой. По аксиоме A_1 через точки *P*, *Q* и *M* проходит единственная плоскость.**

Теорема 2

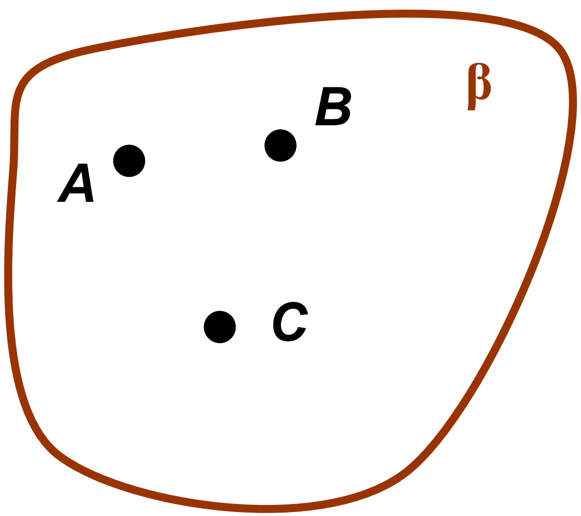
Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна



Аксиомы стереометрии описывают:

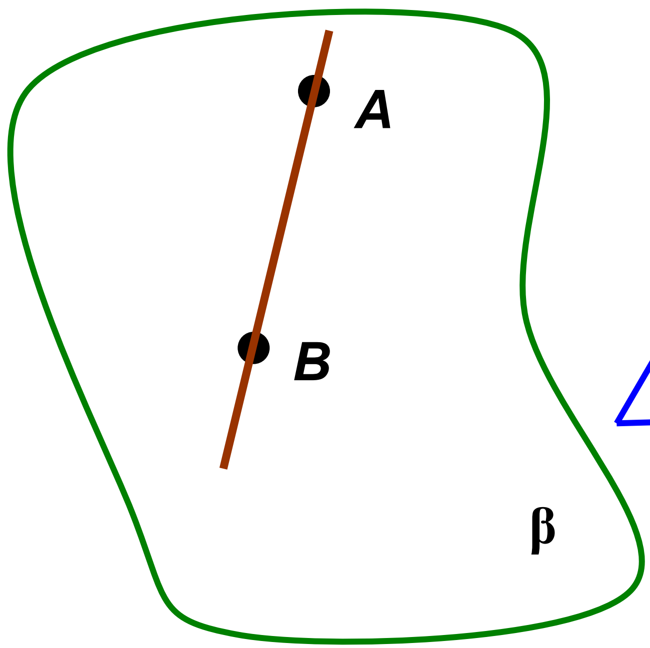
A1

Способ задания плоскости



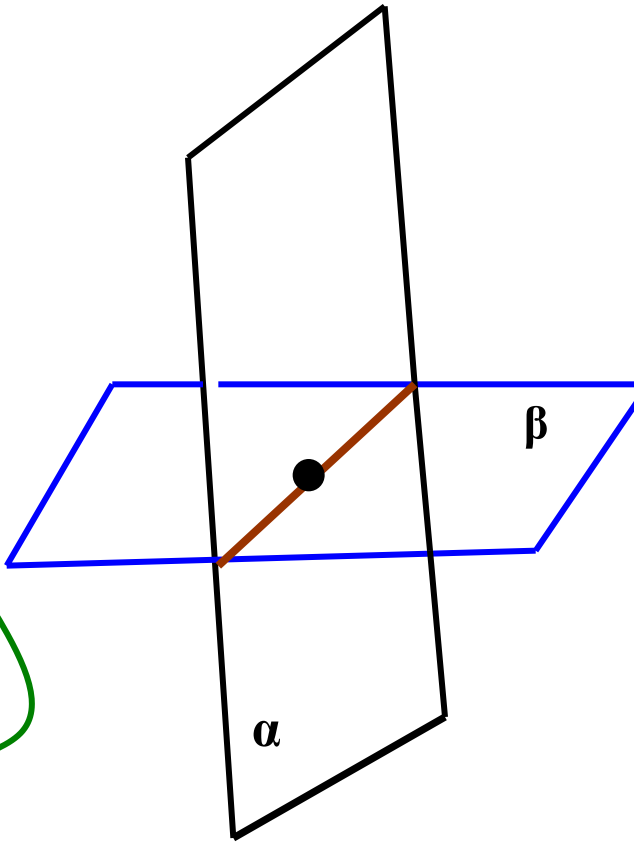
A2

Взаимное расположение прямой и плоскости



A3

Взаимное расположение плоскостей

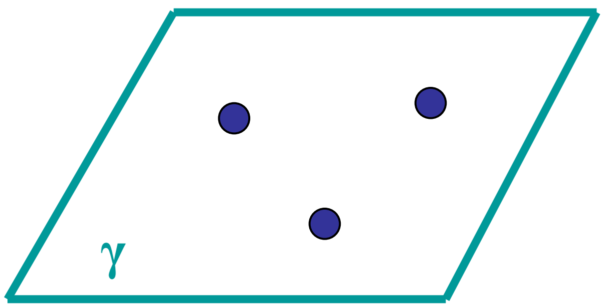


Способы задания плоскости

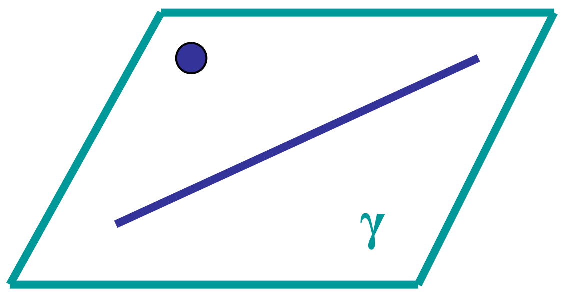
1. Плоскость можно провести через три точки

2. Можно провести через прямую и не лежащую на ней точку

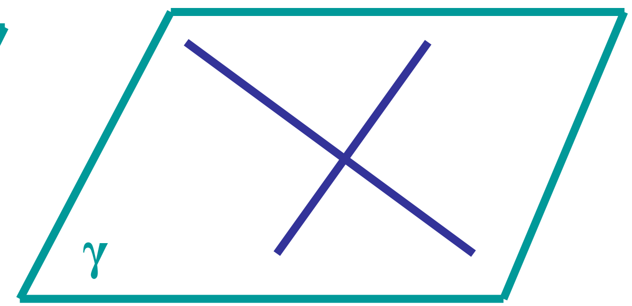
3. Можно провести через две пересекающиеся прямые



Аксиома 1

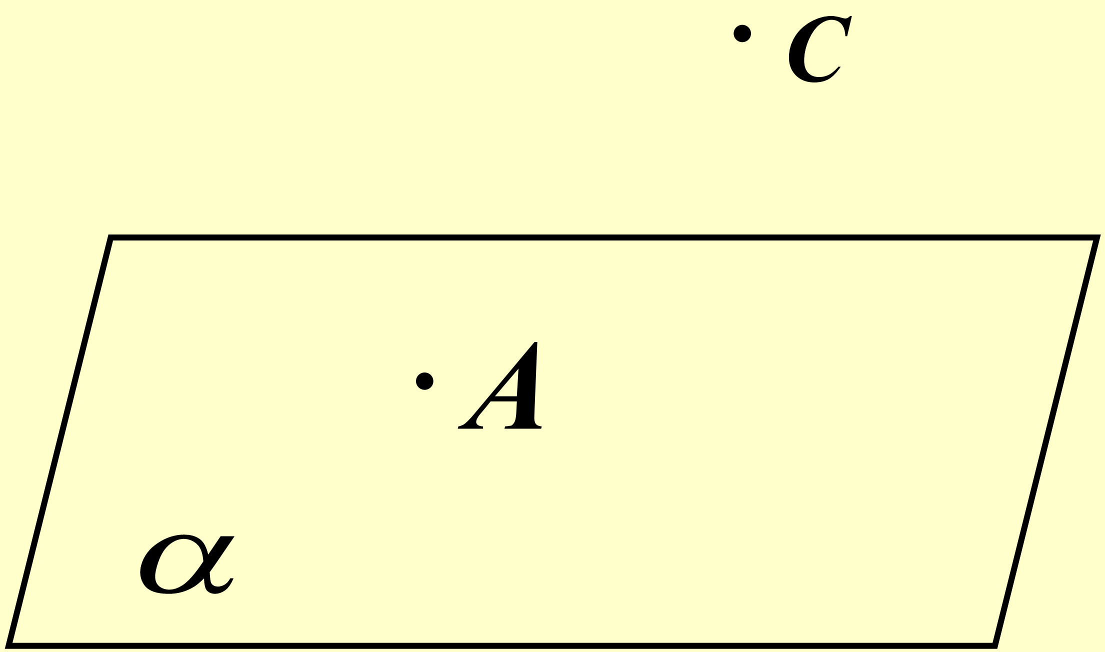


Теорема 1



Теорема 2

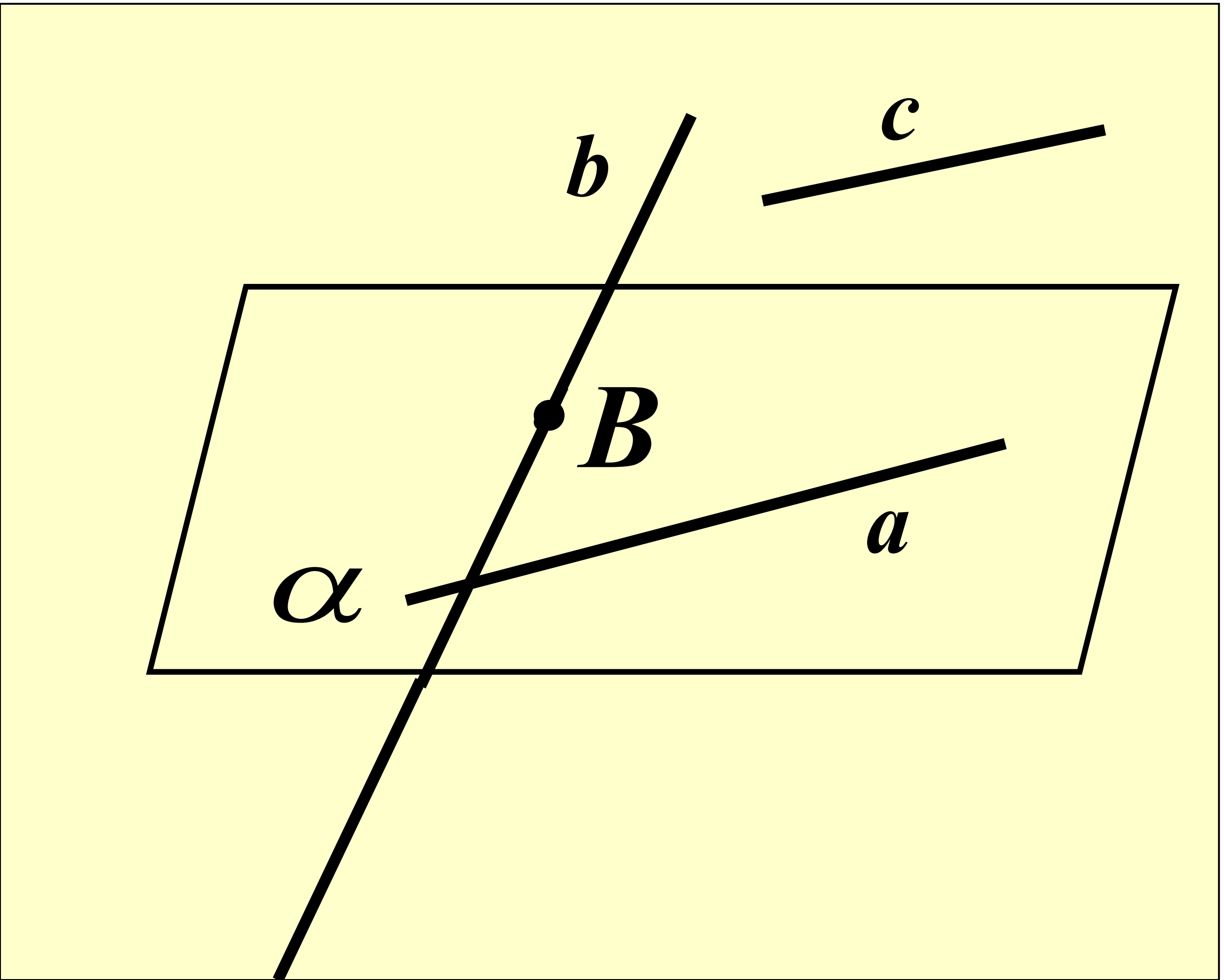
Прочти чертеж
№1



$$A \in \alpha$$

$$C \notin \alpha$$

Прочти чертеж №2

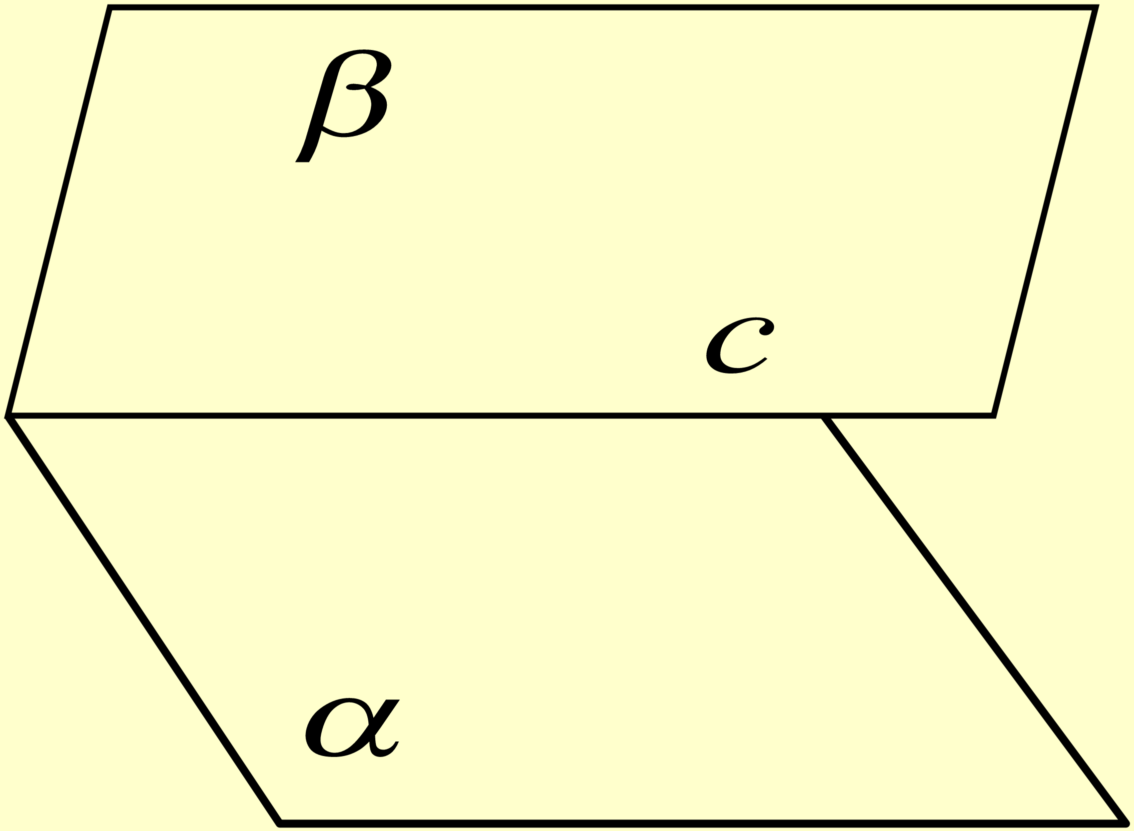


$$a \in \alpha$$

$$b \cap \alpha = B$$

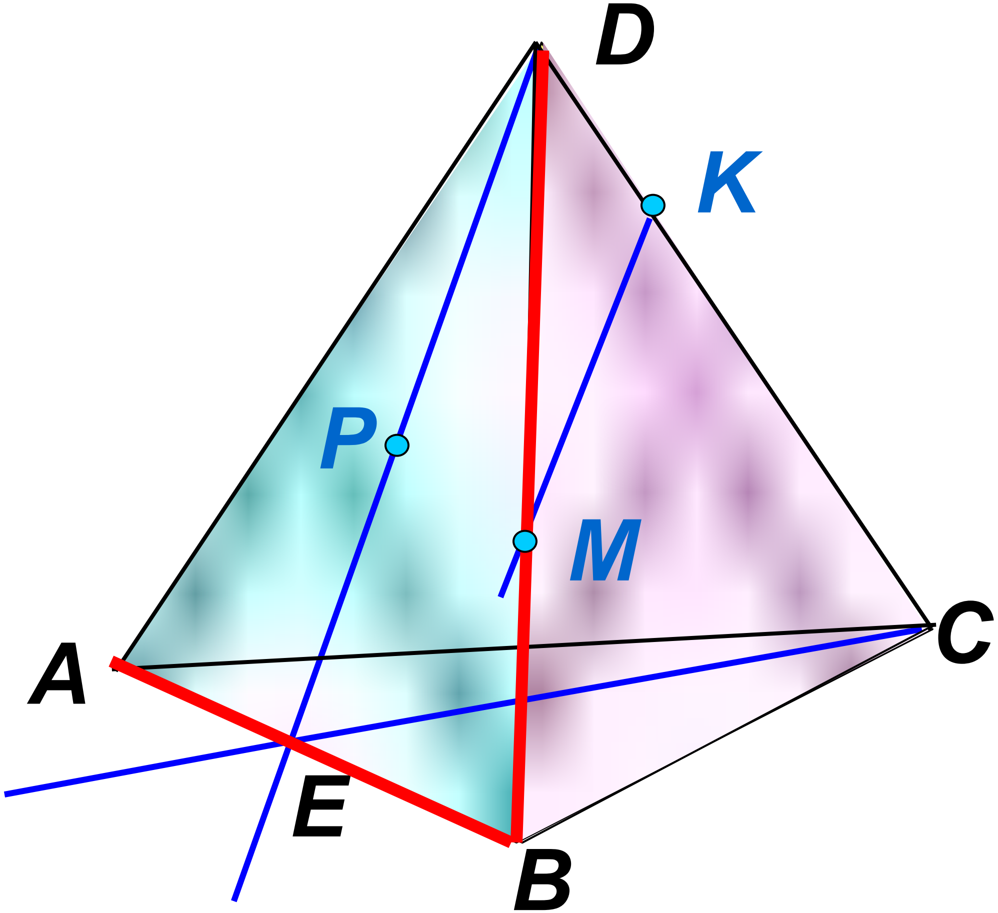
$$c \notin \alpha$$

Прочти чертеж
№3



$$\alpha \cap \beta = c$$

№4

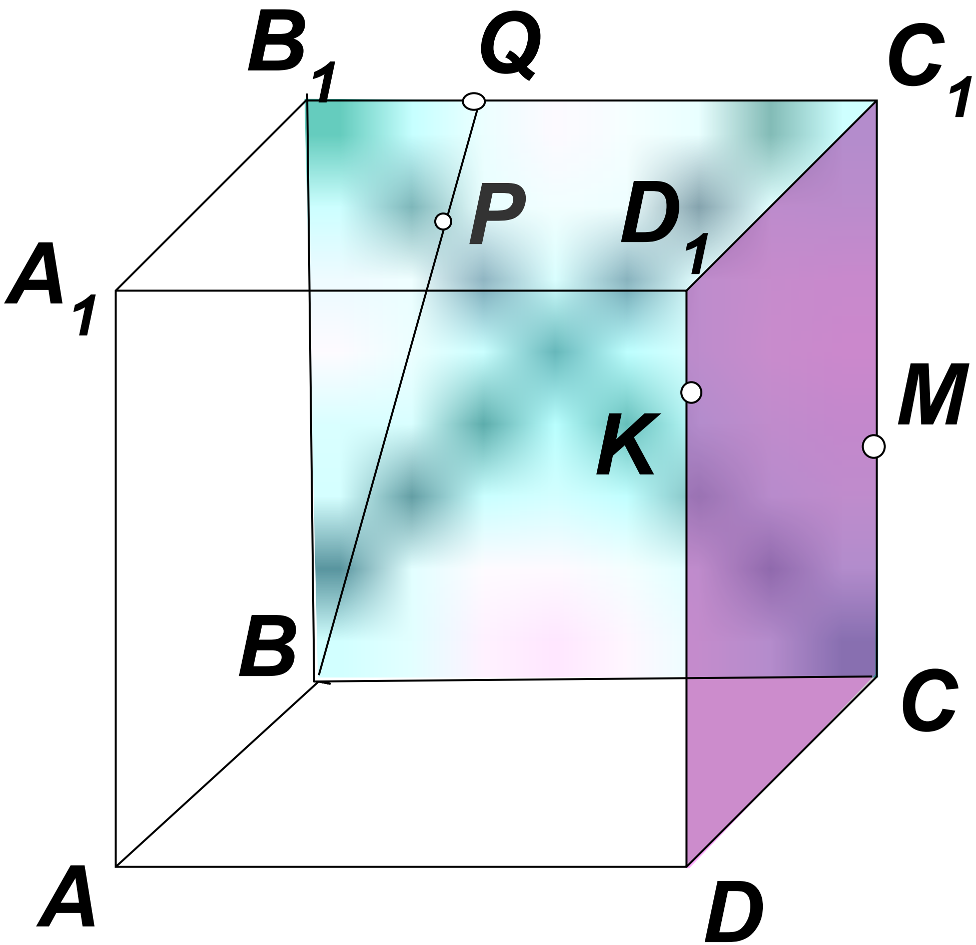


a) **Назовите плоскости, в которых лежат прямые *PE*, *MK*, *DB*, *AB*, *EC***

b) **Назовите точки пересечения прямой *DK* с плоскостью *ABC***

c) **Назовите точки, лежащие в плоскостях *ADB* и *DBC***

№5



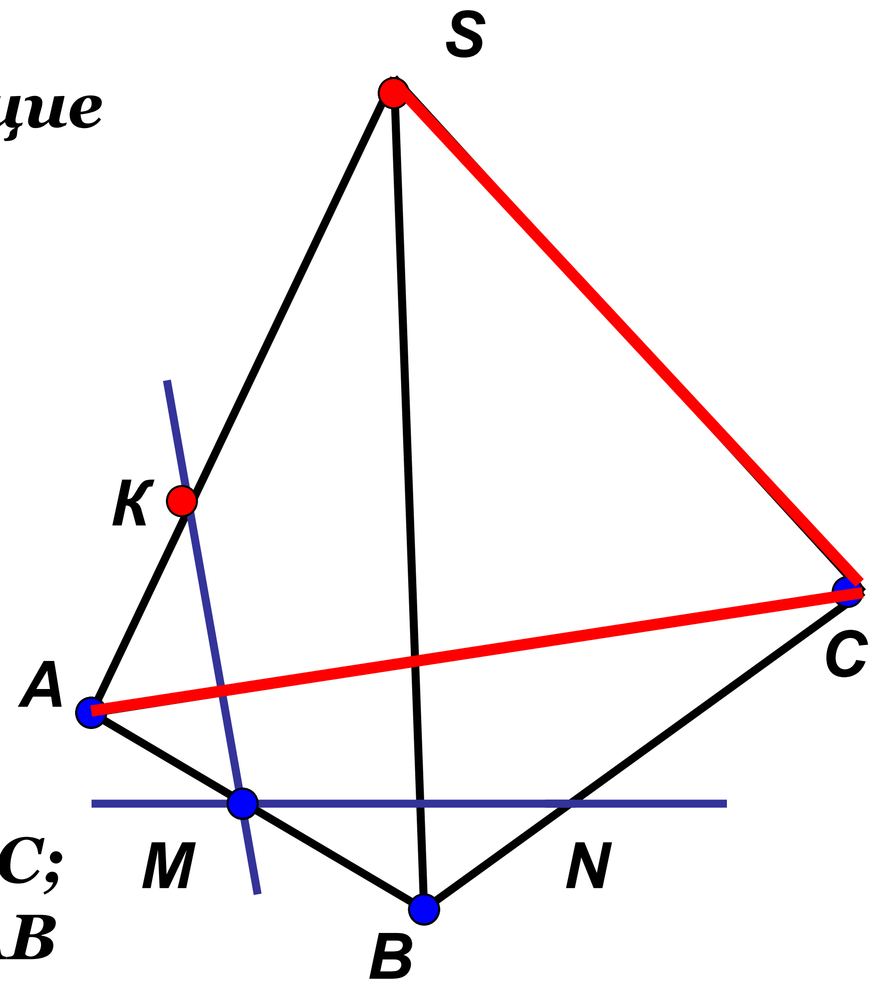
a) Назовите точки, лежащие в плоскостях DCC_1 и BQC

b) Назовите плоскости, в которых лежит прямая AA_1

Задача 1

Пользуясь данным рисунком, назовите:

- *a) четыре точки, лежащие (1вар) в плоскости SAB;*
(2вар) в плоскости ABC
- *b) плоскость, в которой лежит*
(1вар) прямая MN;
(2вар) прямая КМ
- *c) прямую, по которой пересекаются*
(1вар) плоскости ASC и SBC;
(2вар) плоскости SAC и CAB



Пользуясь данным рисунком, назовите:

Задача 2

- *a) две плоскости, содержащие*

(1вар) прямую DE;

(2вар) прямую EF

- *b) прямую, по которой пересекаются*

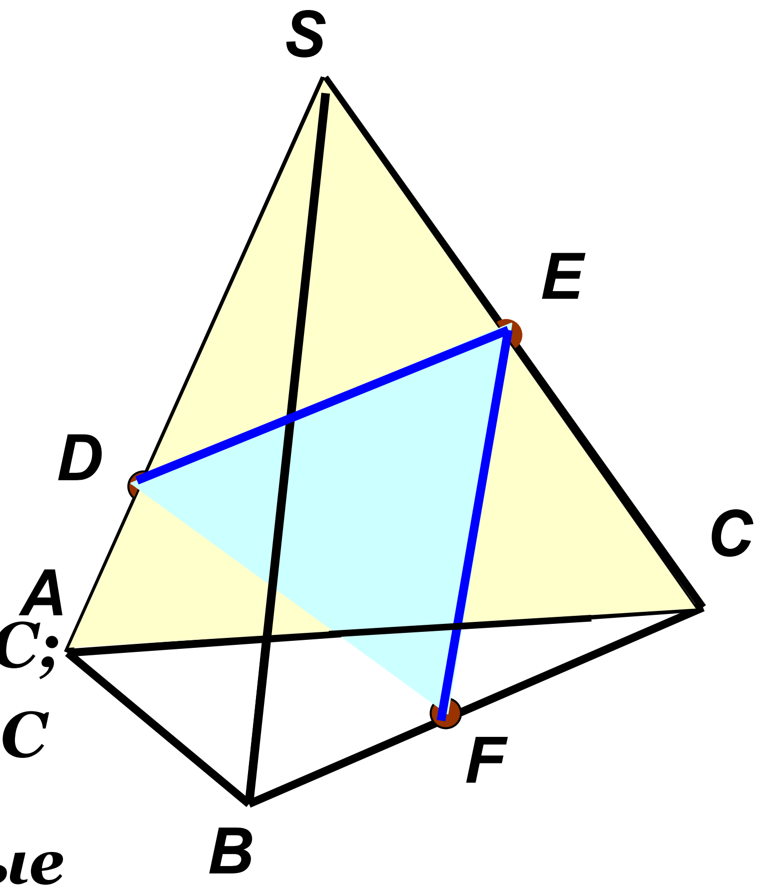
(1вар) плоскости DEF и SBC;

(2вар) плоскости FDE и SAC

- *c) две плоскости, которые пересекает*

(1вар) прямая SB;

(2вар) прямая AC



Задача 3

Пользуясь данным рисунком, назовите:

- ***a) три плоскости, содержащие***

(1вар) прямую B_1C;

(2вар) прямую AB_1

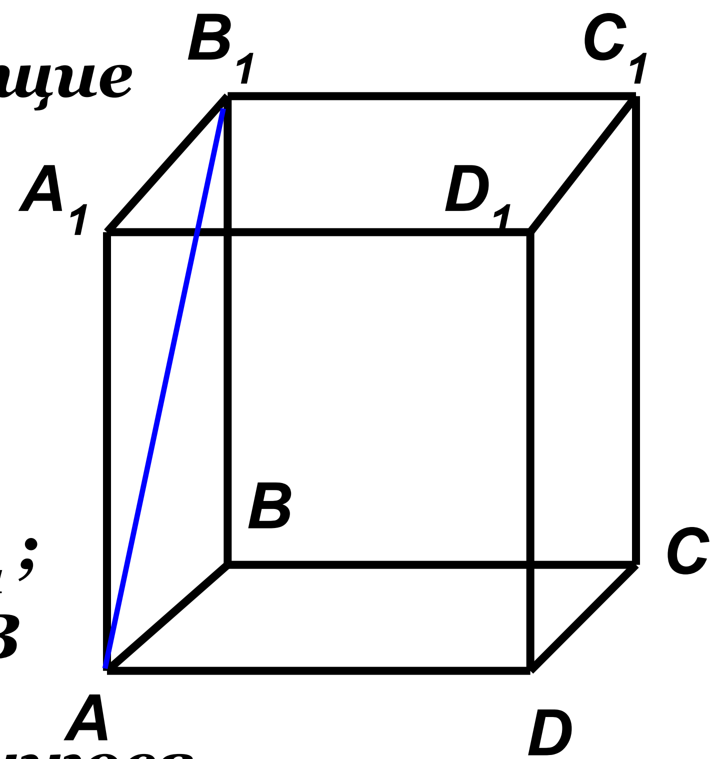
- ***b) прямую, по которой пересекаются***

(1вар) плоскости B_1CD и AA_1D_1;

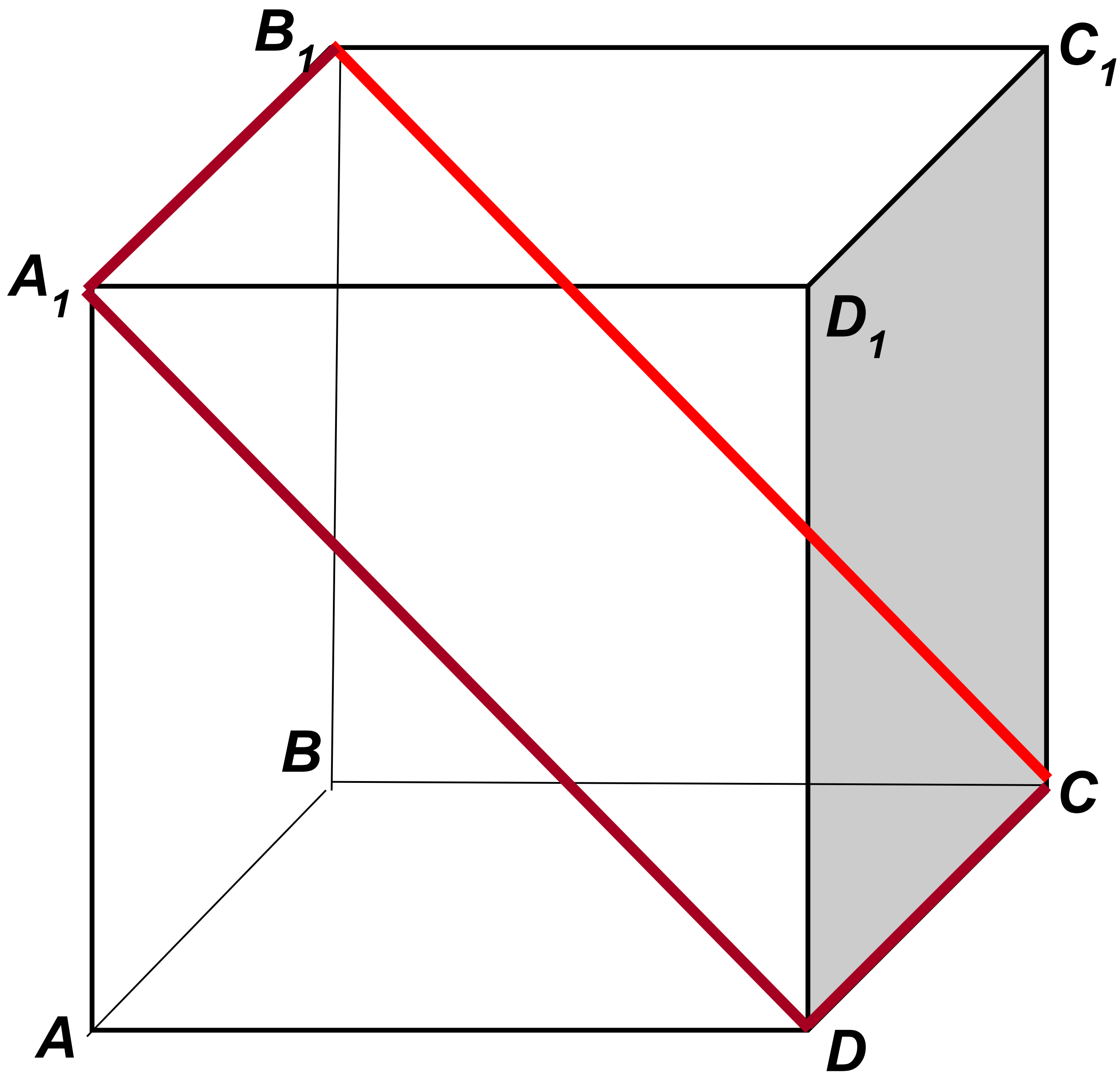
(2вар) плоскости ADC_1 и A_1B_1B

- ***c) плоскость, не пересекающуюся (1вар) с прямой CD_1;***

(2вар) с прямой BC_1



a)



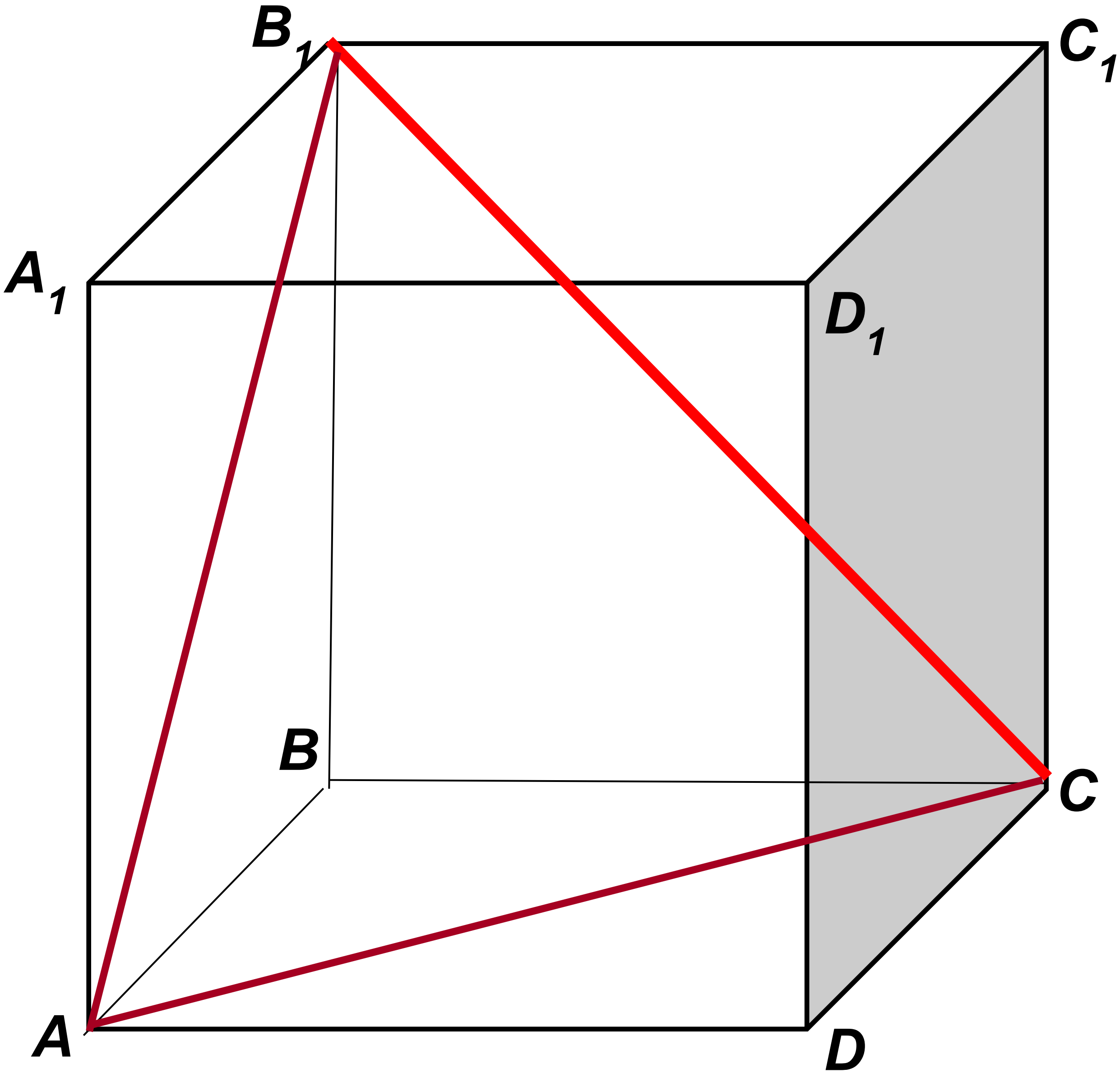
B_1C

?

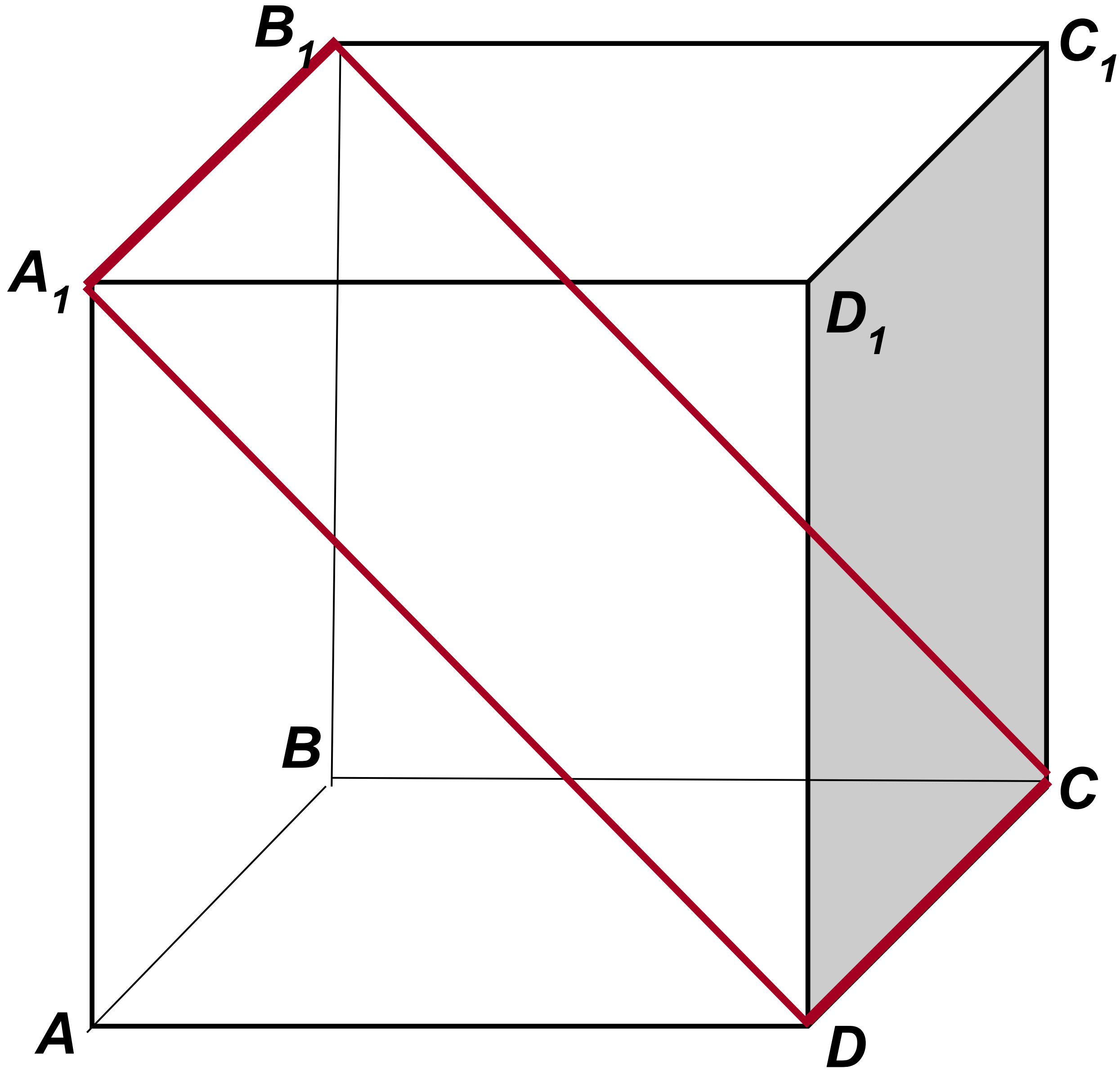
а)

B_1C

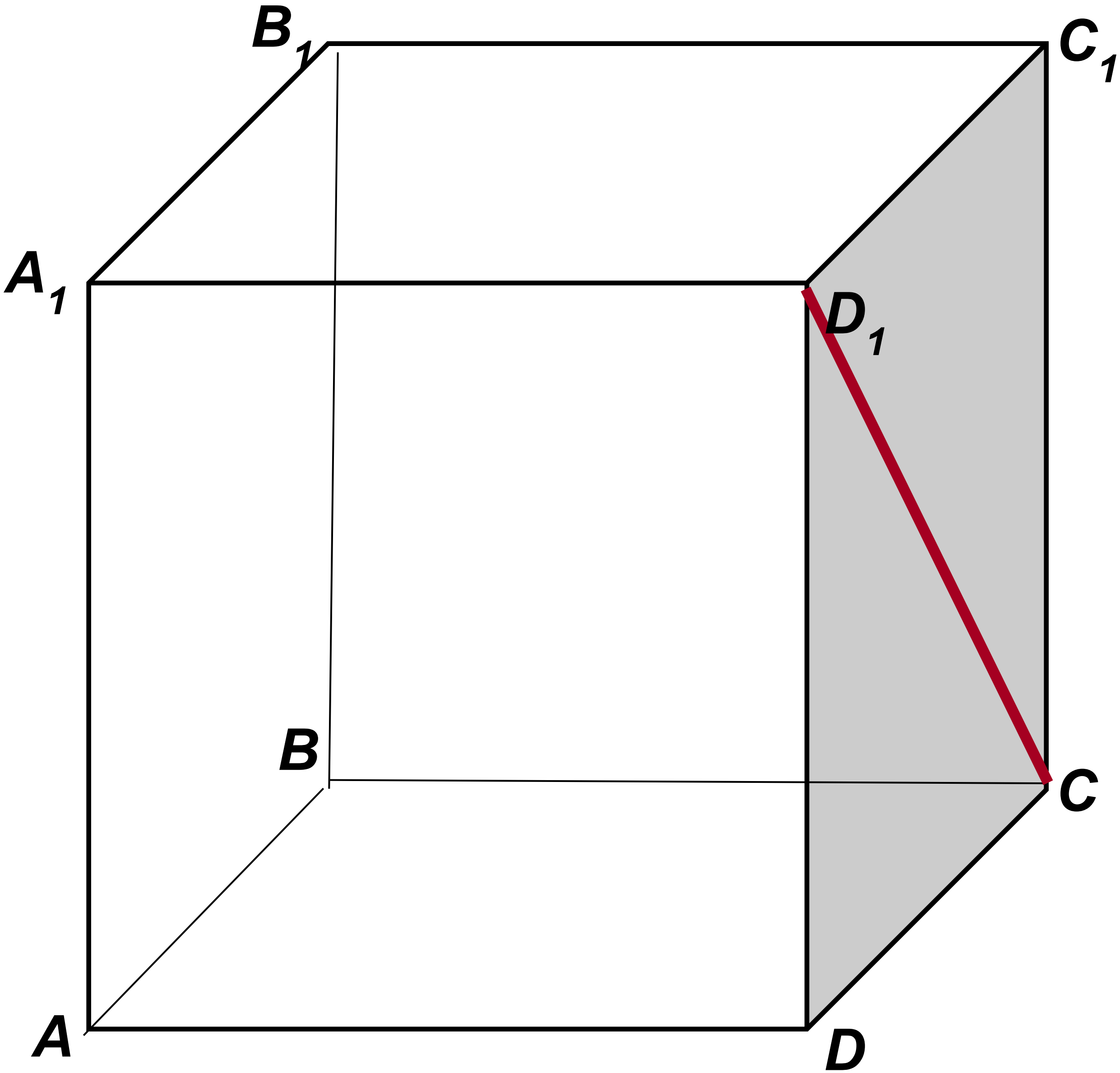
?



b)



c)

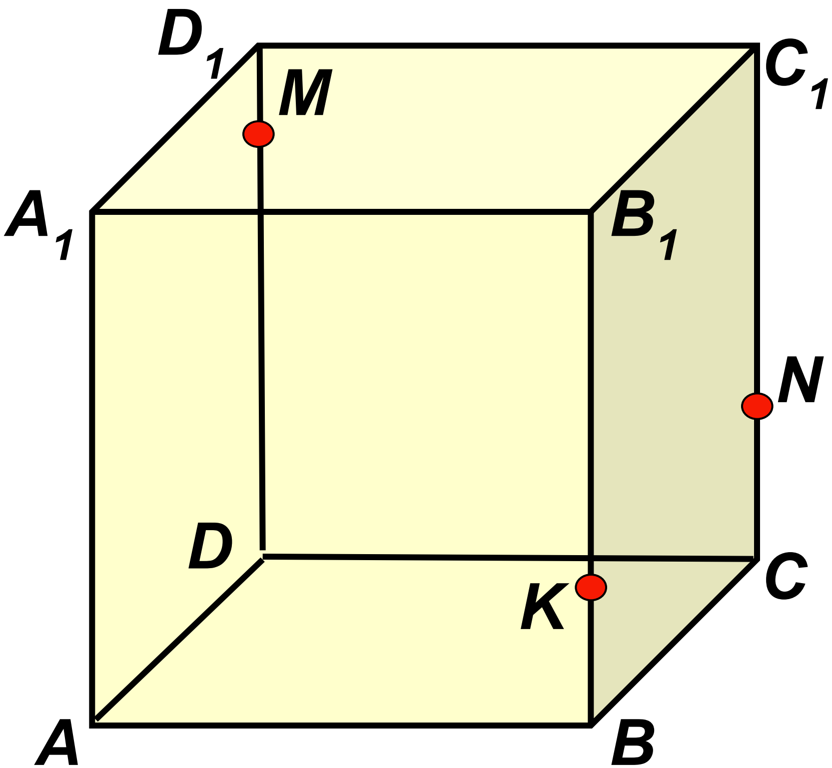


Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Точка M лежит на ребре DD_1

Точка N лежит на ребре CC_1

Точка K лежит на ребре BB_1



1) Н

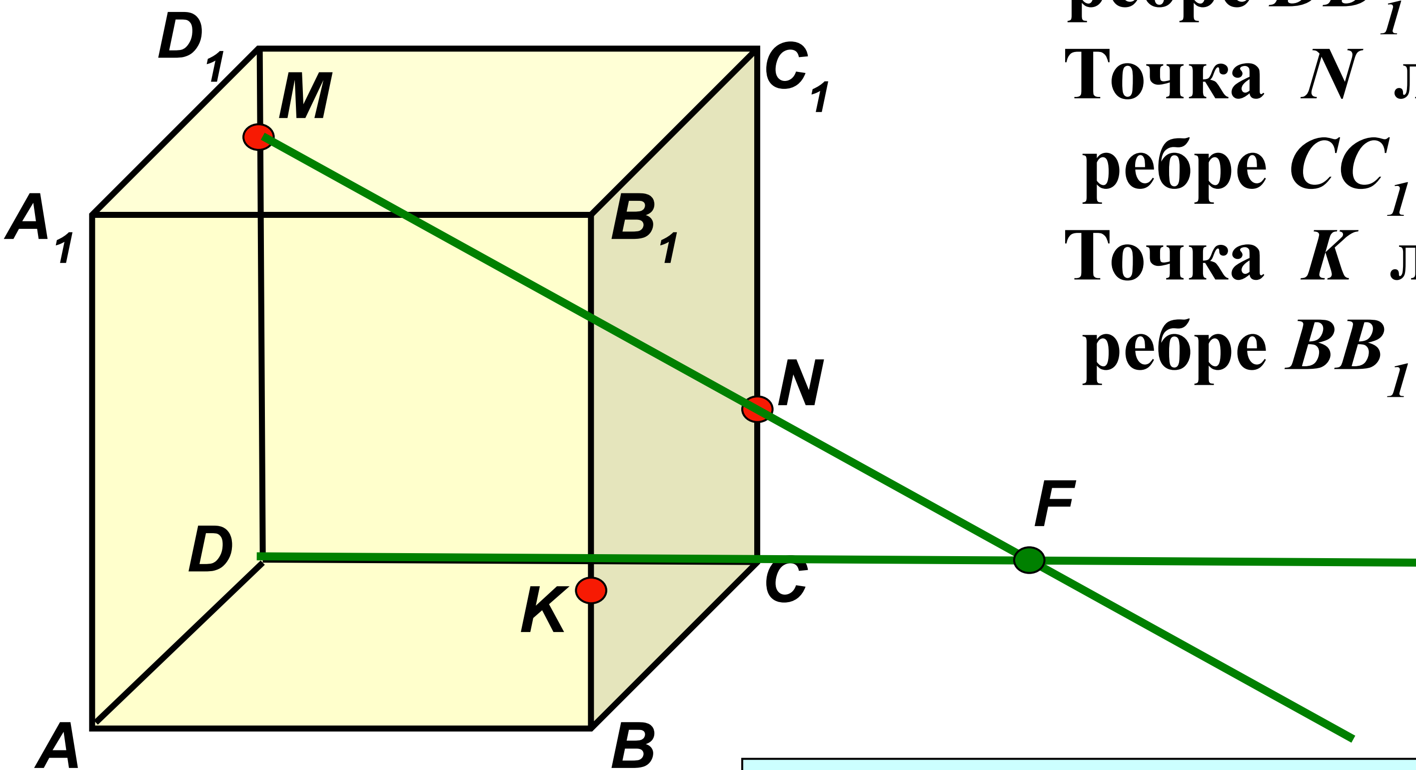
M: ADD_1 и D_1DC; N: CC_1D_1 и BB_1C_1

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Точка M лежит на ребре DD_1

Точка N лежит на ребре CC_1

Точка K лежит на ребре BB_1



$$MN \cap BC = F$$

$$F \in MN,\ F \in DC \rightarrow F \in DD_1C \text{ и } F \in ABC$$

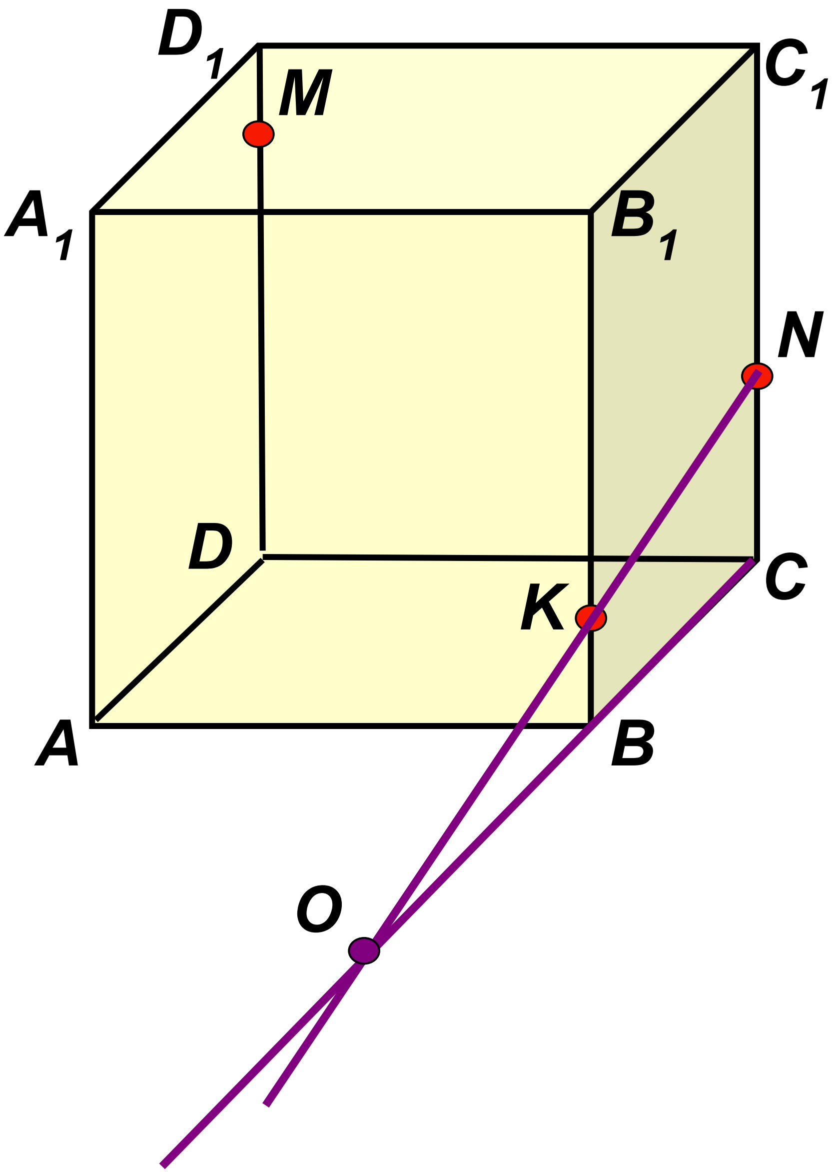
прямых MN и DC.

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Точка M лежит на ребре DD_1

Точка N лежит на ребре CC_1

Точка K лежит на ребре BB_1



3) $KN \cap ABC = O$ чку

пересечения прямой KN и плоскости ABC.

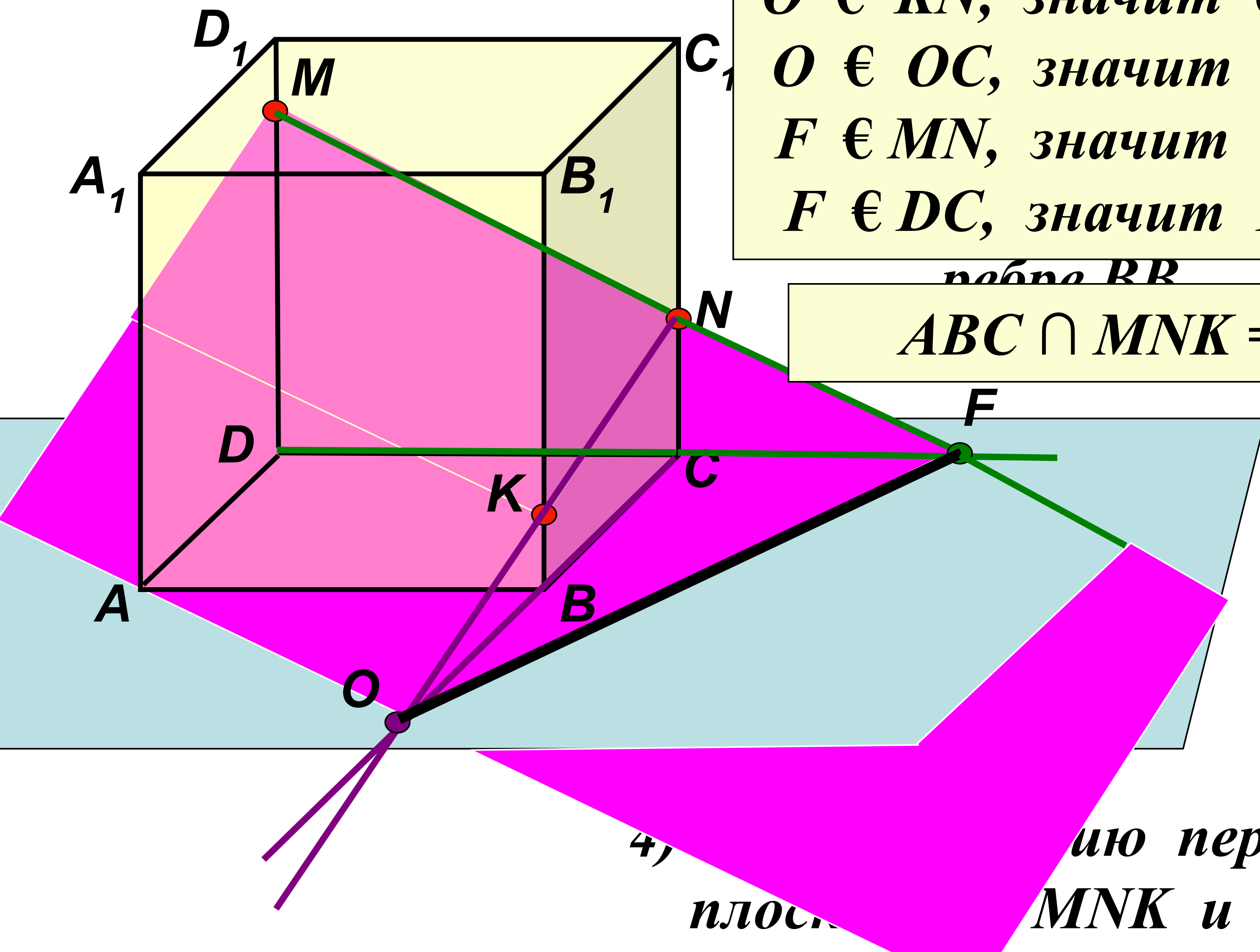
Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Точка M лежит на

$O \in KN$, значит $O \in MNK$
$O \in OC$, значит $O \in ABC$
$F \in MN$, значит $F \in MNK$
$F \in DC$, значит $F \in ABC$

ребре BB

$ABC \cap MNK = OF$

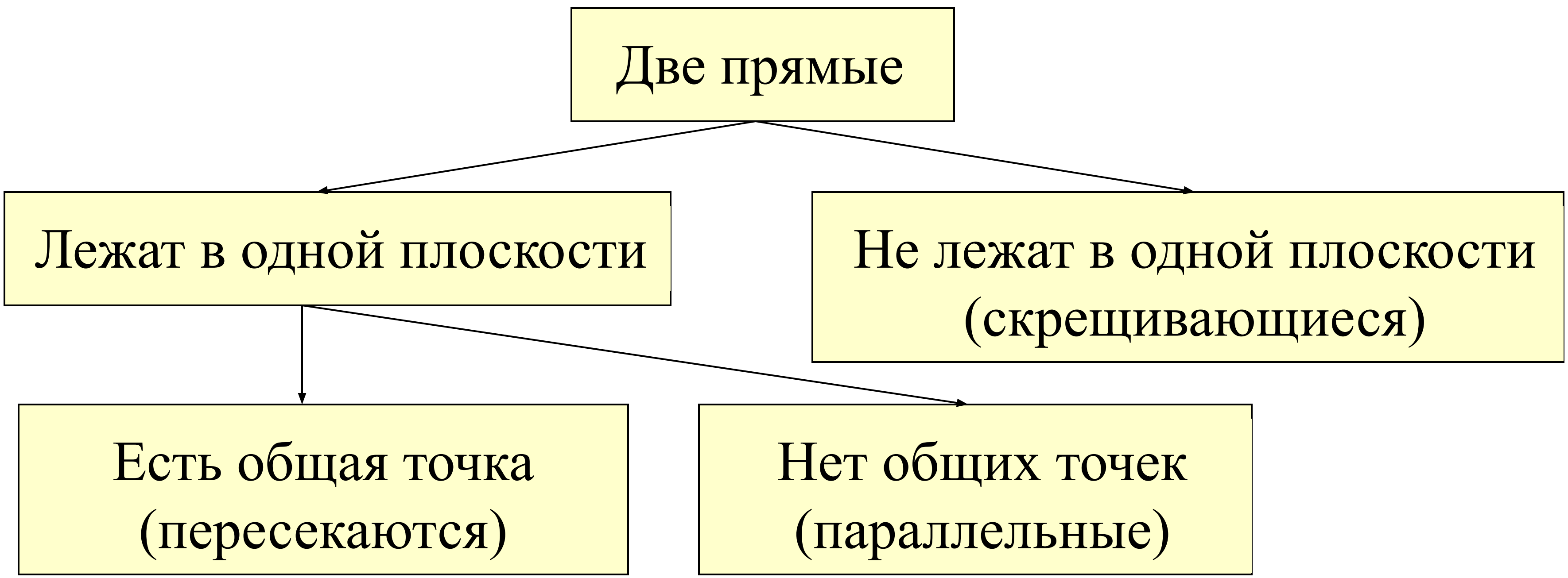


4) ... ию пересечения

плоск... MNK и ABC.

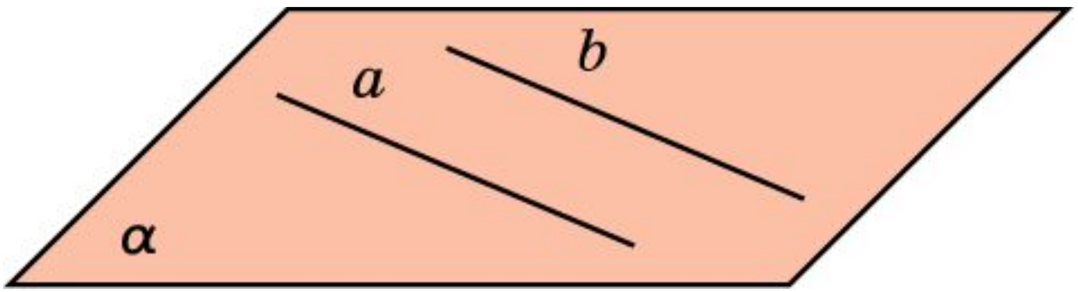
Взаимное расположение прямых в пространстве

Расположение прямых в пространстве



Параллельность прямых

Определение. Две прямые, лежащие в одной плоскости и непересекающиеся называются параллельными.



Для параллельных прямых выполняется свойство транзитивности:

Если каждая из двух прямых параллельны третьей, то они параллельны друг другу.

Упражнение 1

Всегда ли в пространстве две непересекающиеся прямые параллельны?

Ответ: нет.

Упражнение 2

Сколько можно провести плоскостей через две параллельные прямые?

Ответ: 1.

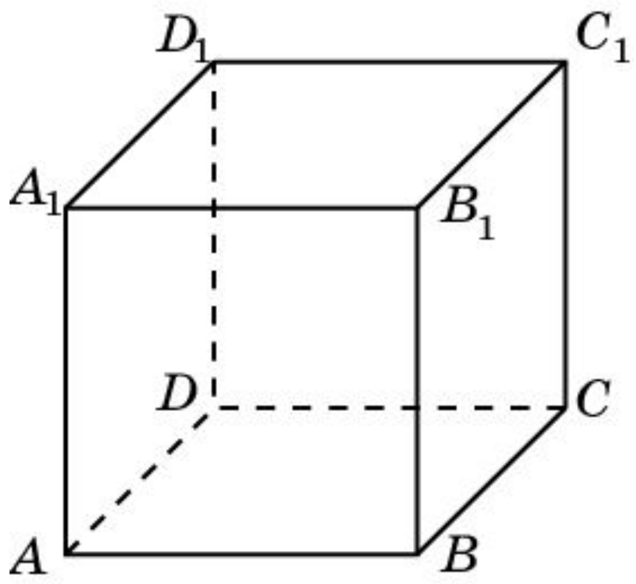
Упражнение 3

На плоскости если прямая пересекает одну из параллельных прямых, то она обязательно пересекает и вторую. Справедливо ли это утверждение для

Ответ: нет.

Упражнение 4

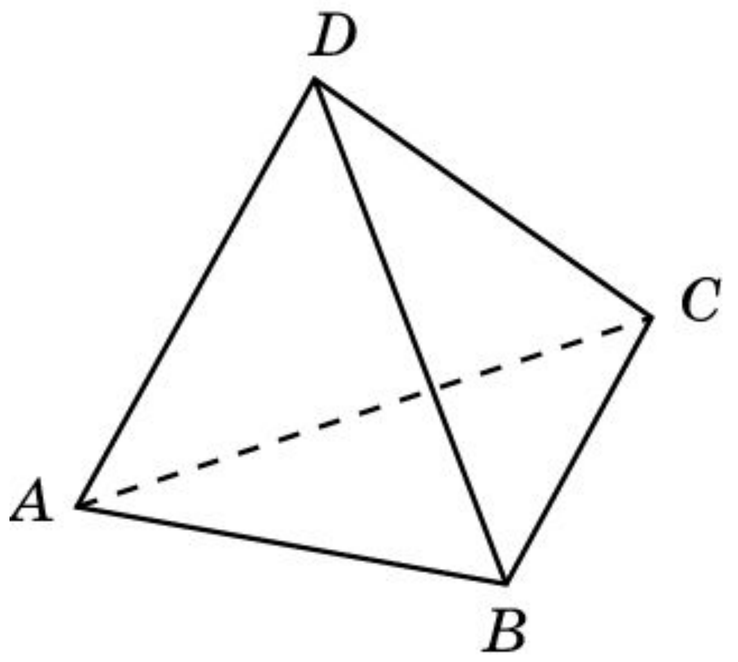
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб. Назовите прямые, параллельные прямой AB



Ответ: A_1B_1; CD; C_1D_1.

Упражнение 5

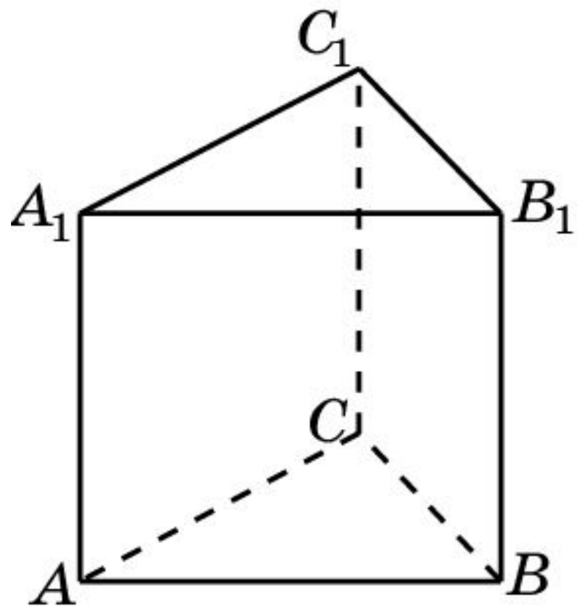
$ABCD$ тетраэдр. Параллельны ли прямые AB и CD ?



Ответ: нет.

Упражнение 6

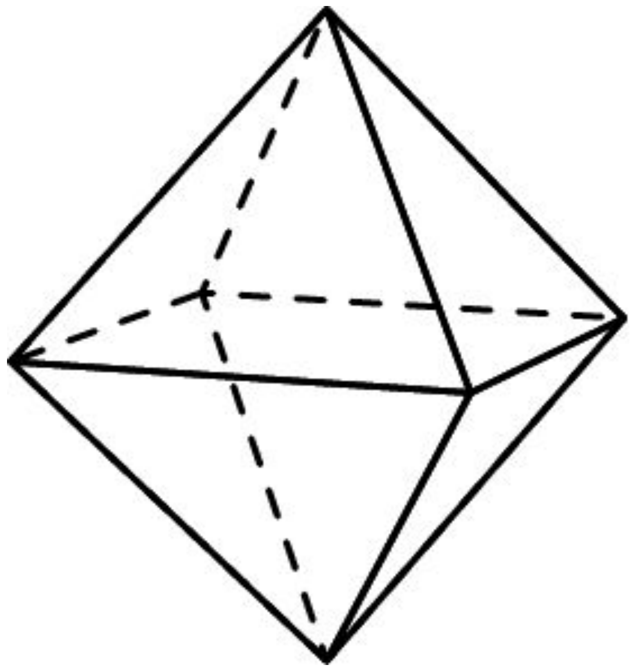
$ABCA_1B_1C_1$ треугольная призма. Назовите прямые, параллельные AA_1.



Ответ: BB_1, CC_1.

Упражнение 7

Сколько пар параллельных рёбер в октаэдре?

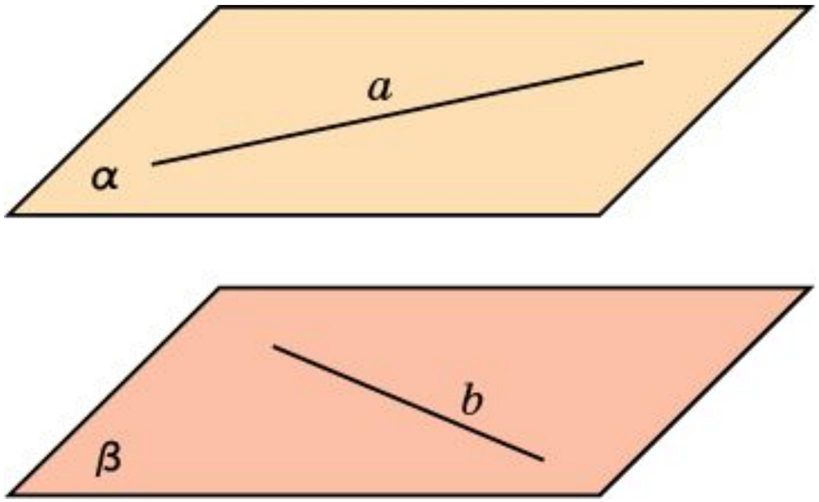


Решение: В октаэдре 12 рёбер. Поэтому, количество пар параллельных будет равно:

$$\frac{12}{2} = 6.$$

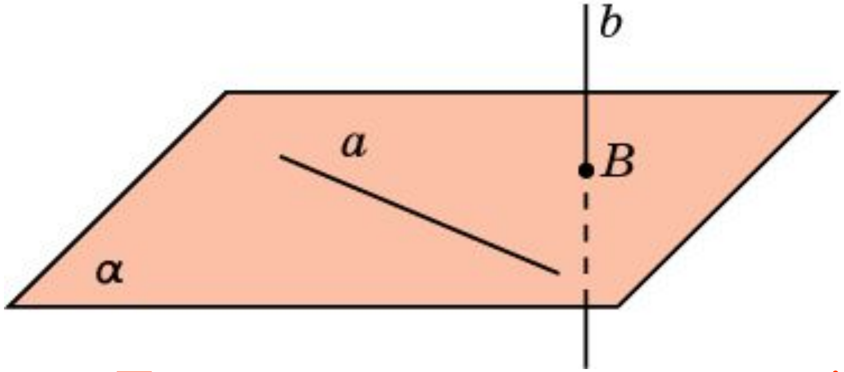
Скрещивающиеся прямые

Определение. В пространстве две прямые называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости.



Признак скрещивающихся прямых

Теорема. Если одна из данных прямых лежит в плоскости, а вторая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то прямые скрещивающиеся.

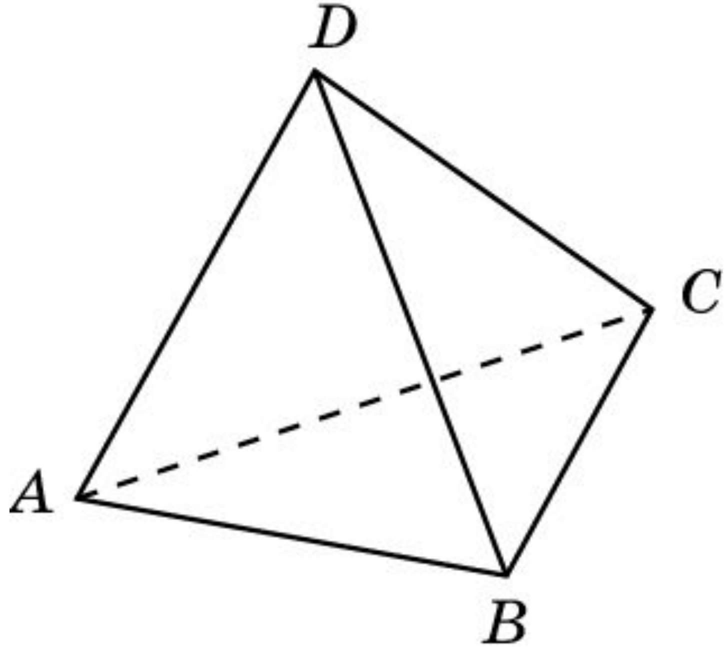


Докажите самостоятельно!!!

α

Упражнение1

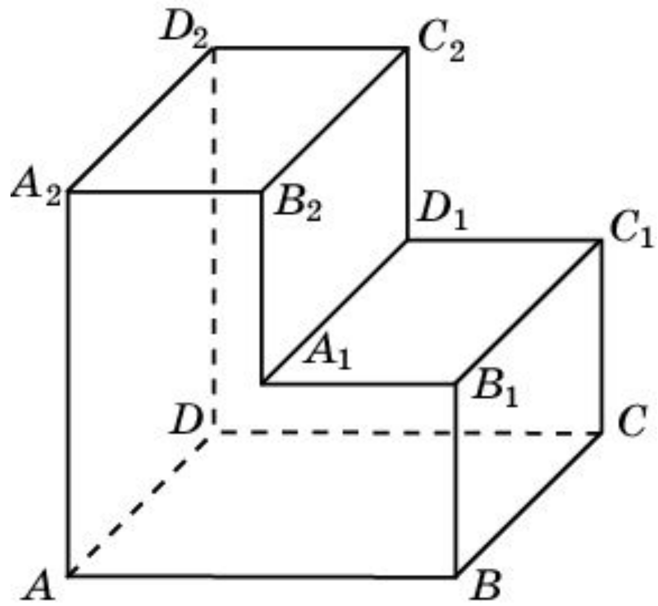
Назовите скрещивающиеся ребра тетраэдра $ABCD$



Ответ: AB *и* CD; BC *и* AD; AC *и* BD.

Упражнение 2

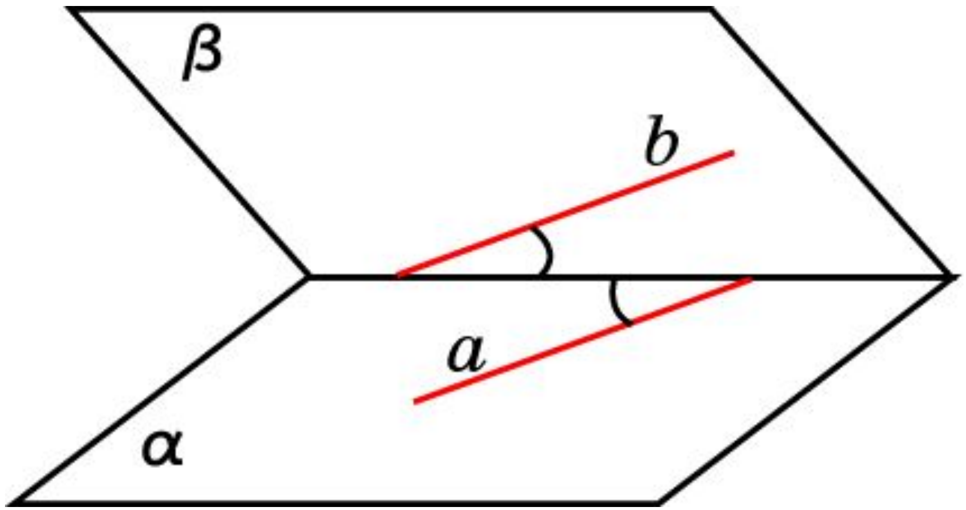
Назовите ребра многоугольника, скрещивающиеся с ребром $AA_{2.}$



Жауабы. BC, CD, B_1C_1, A_1D_1, B_2C_2, C_1D_1, C_2D_2.

Упражнение 3

Как расположены прямые в пространстве относительно друг друга?



Ответ: Скрещивающиеся.

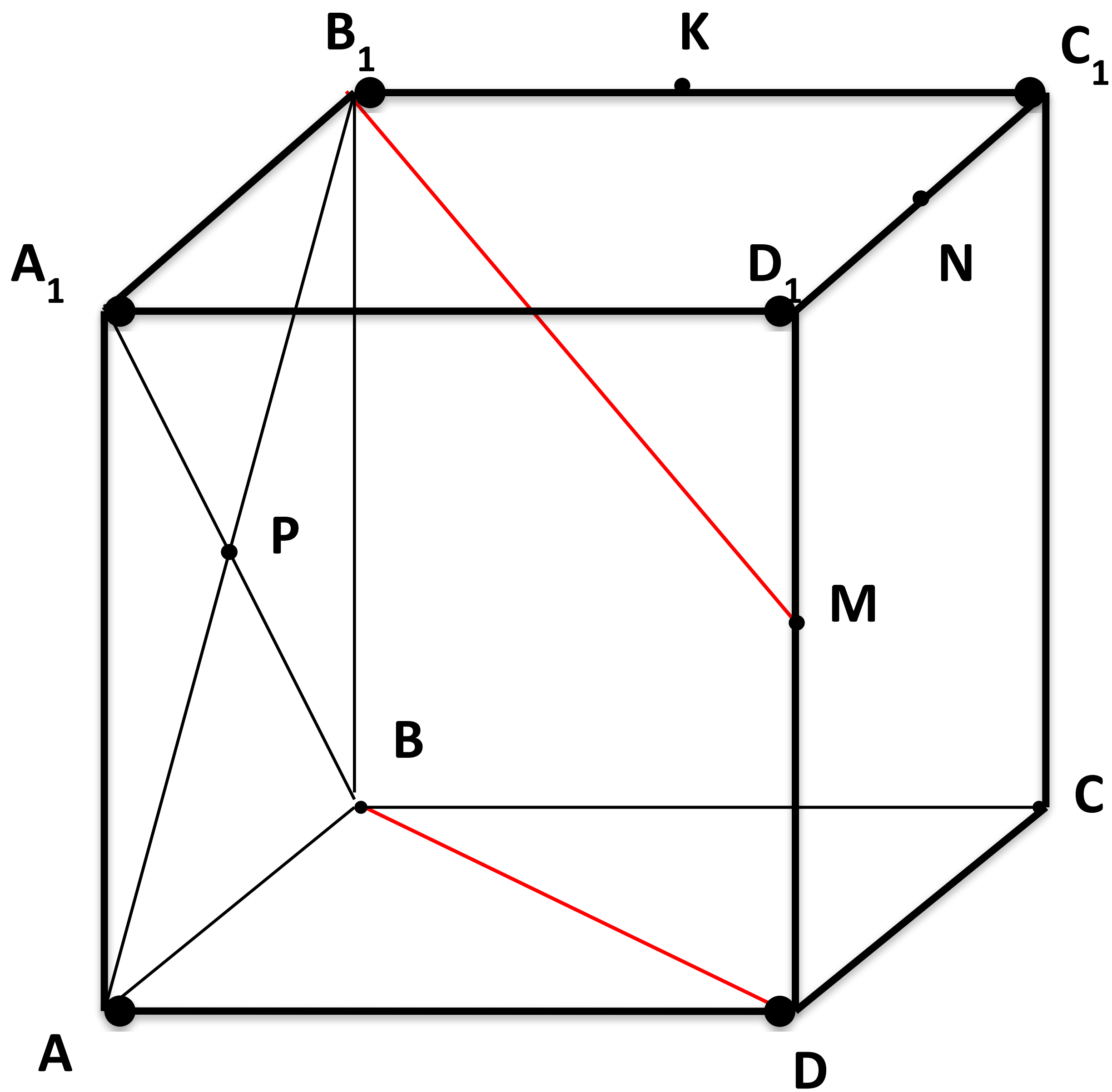
Дано:

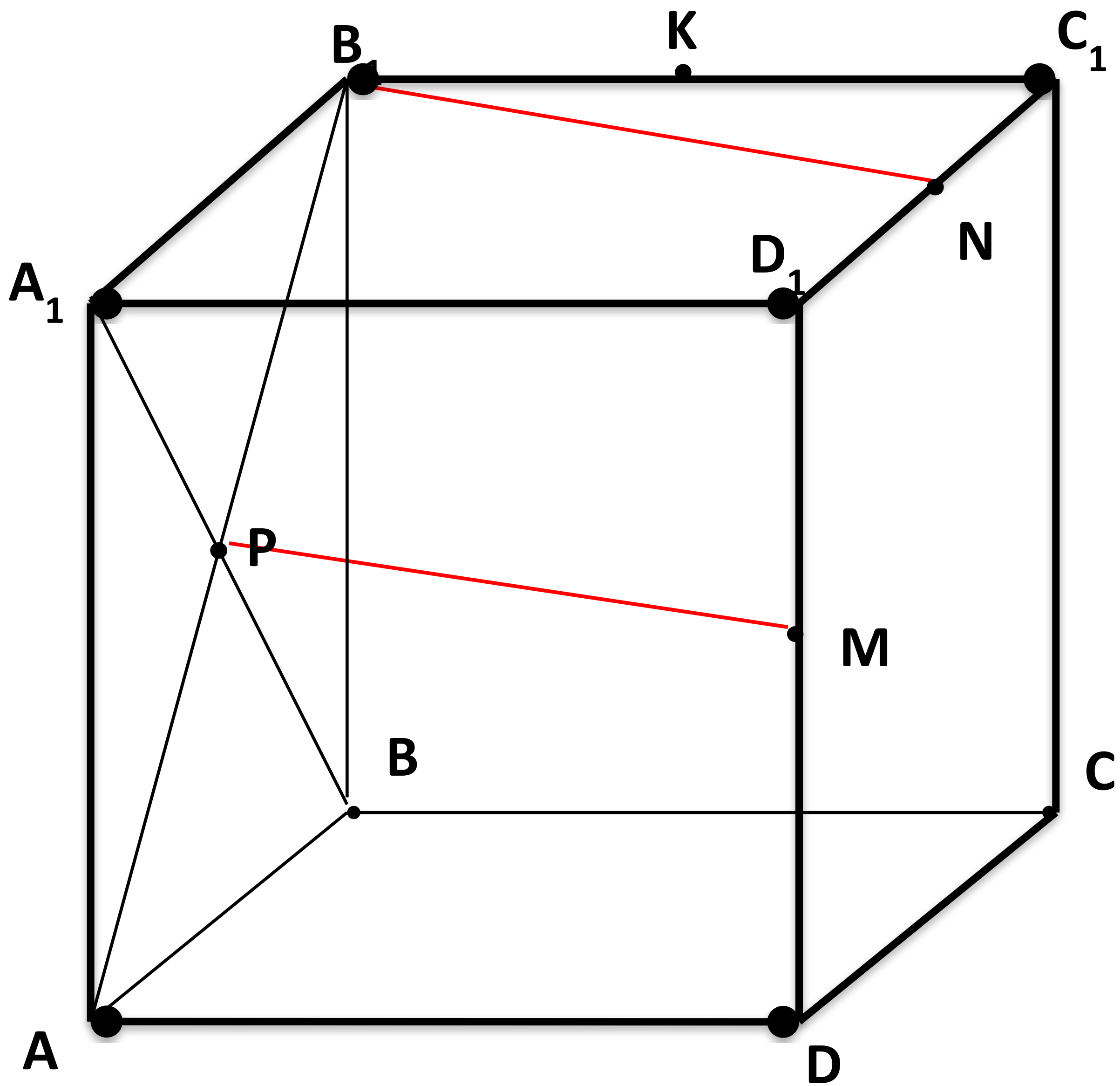
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – КУБ.

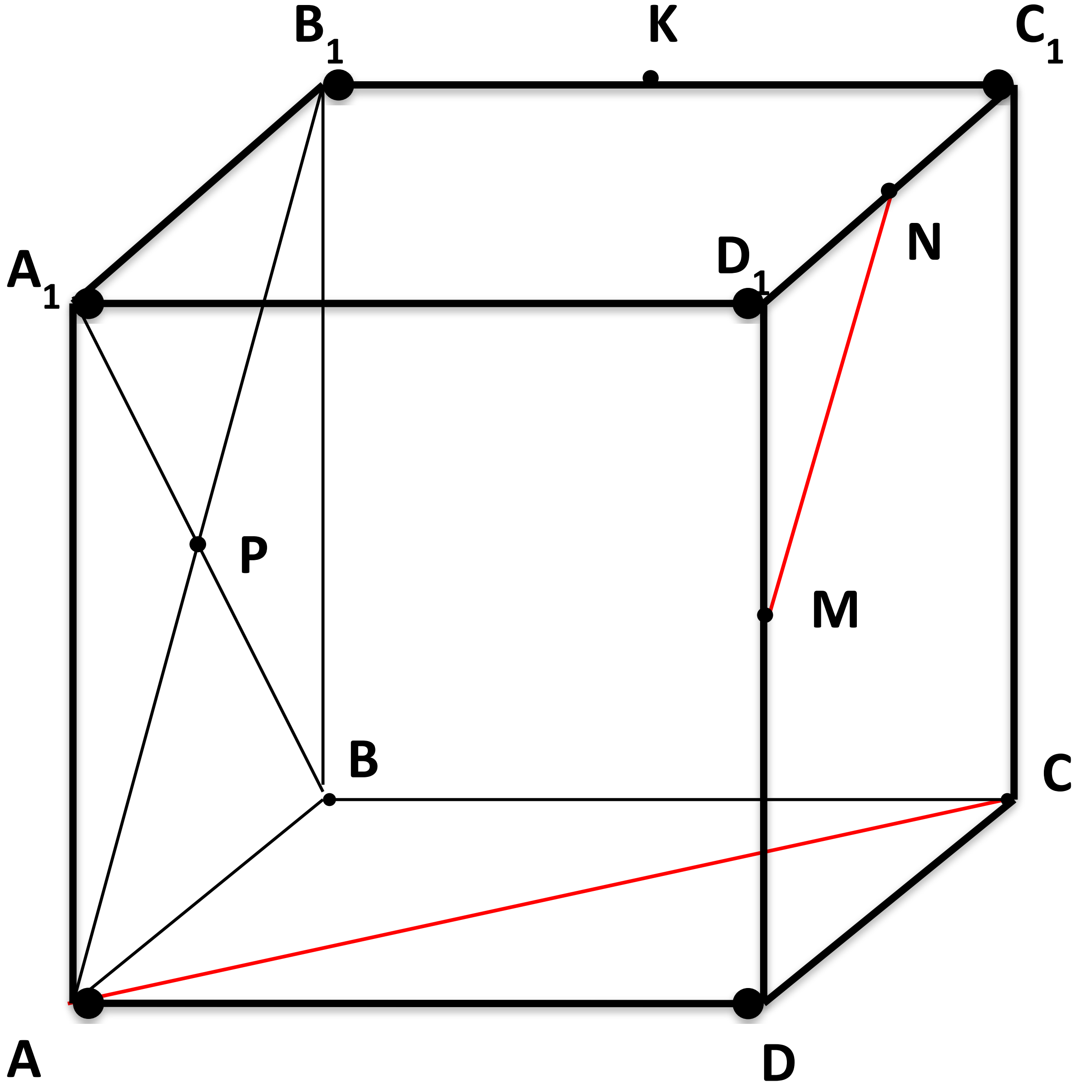
K, M, N – СЕРЕДИНЫ РЕБЕР B_1C_1, D_1D, D_1C_1 СООТВЕТСТВЕННО,

P – ТОЧКА ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ДИАГОНАЛЕЙ ГРАНИ AA_1B_1B.

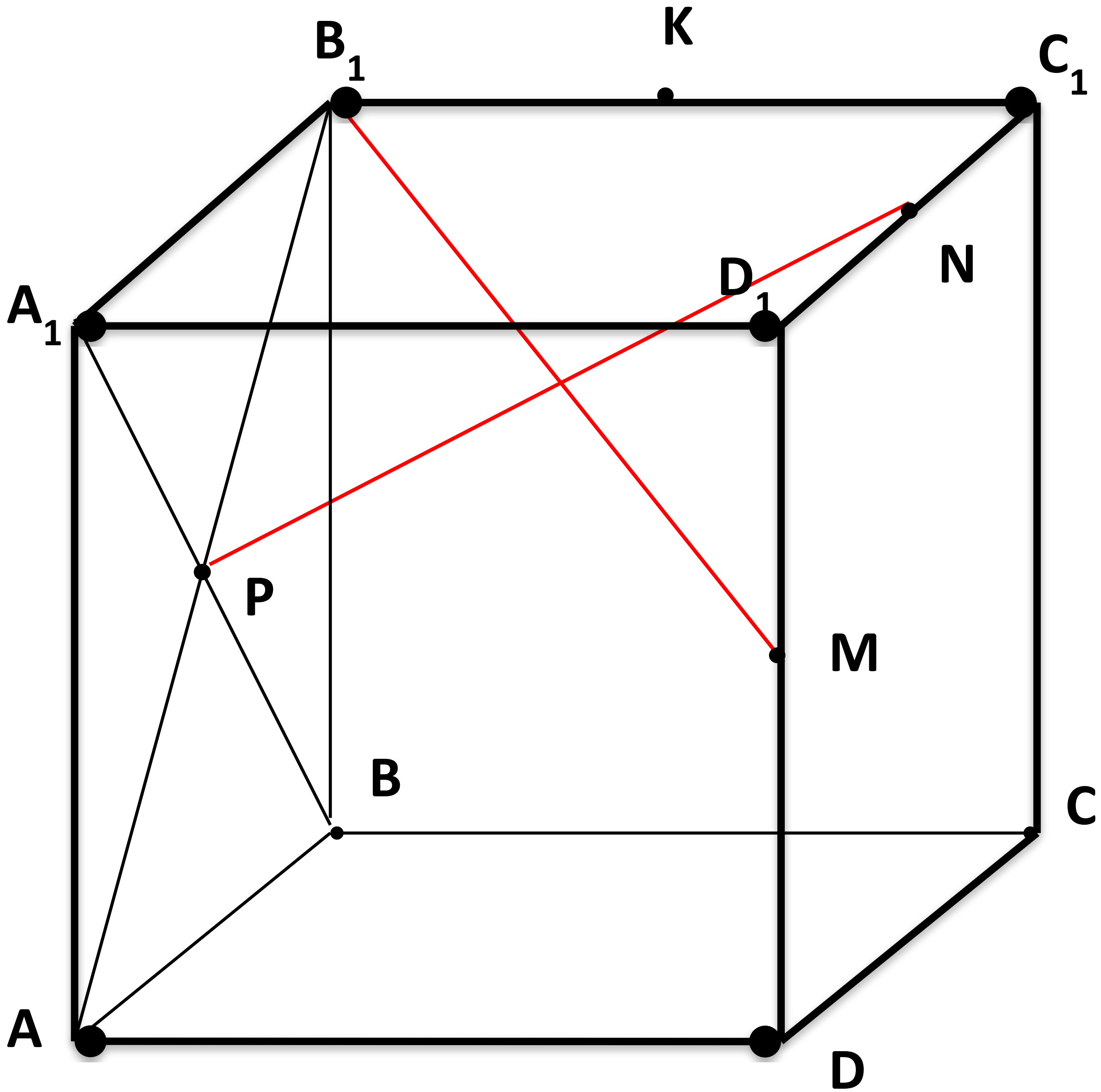
Определите взаимное расположение прямых.


B1
K
C1
A1
D1
N
P
M
B
C
A
D


B
K
C
1
N
A
1
D
1
P
M
B
C
A
D



B1
K
C1
A1
D1
N
P
M
B
C
A
D



B1
K
C1
N
A1
D1
P
M
B
C
A
D

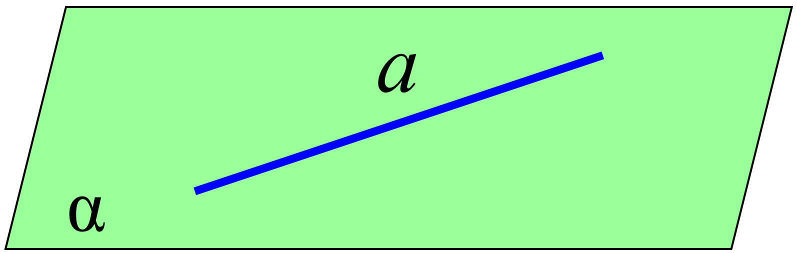
Проверь себя

1. Скрещиваются
2. Пересекаются
3. Параллельны
4. Скрещиваются
5. Пересекаются

Взаимное расположение прямой и плоскости

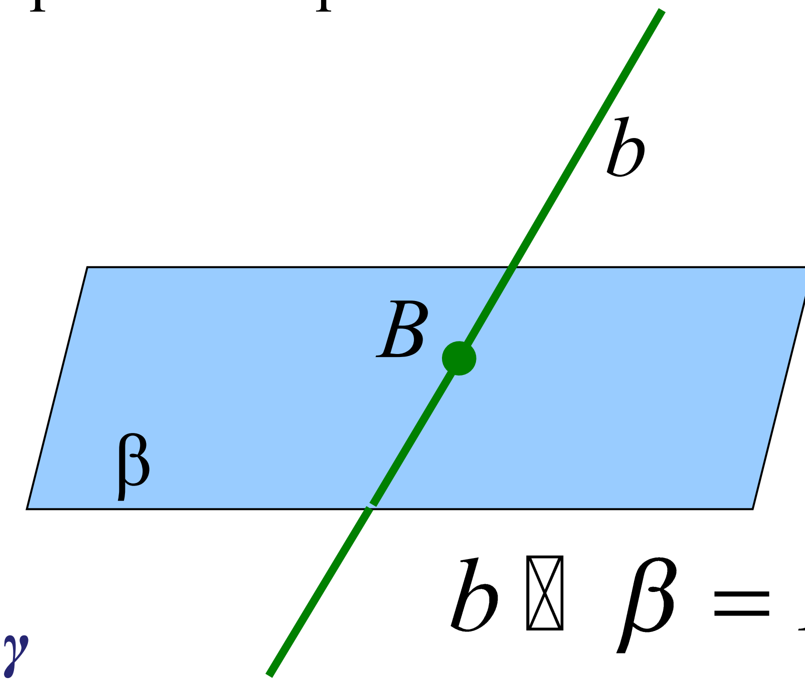
Как вы думаете, как может располагаться прямая относительно плоскости?

Прямая ***a*** лежит в плоскости ***α***



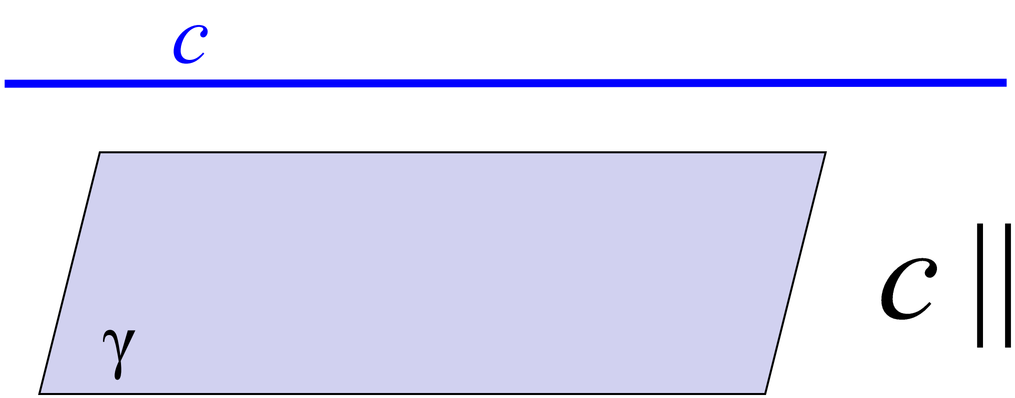
$$a \subset \alpha$$

Прямая ***b*** пересекает плоскость ***β***



$$b \cap \beta = B$$

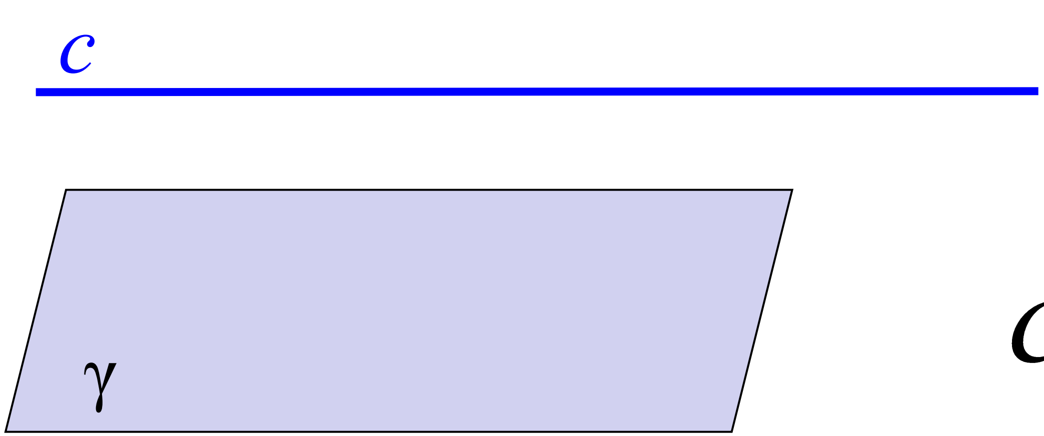
Прямая ***c*** параллельна плоскости ***γ***



$$c \parallel \lambda$$

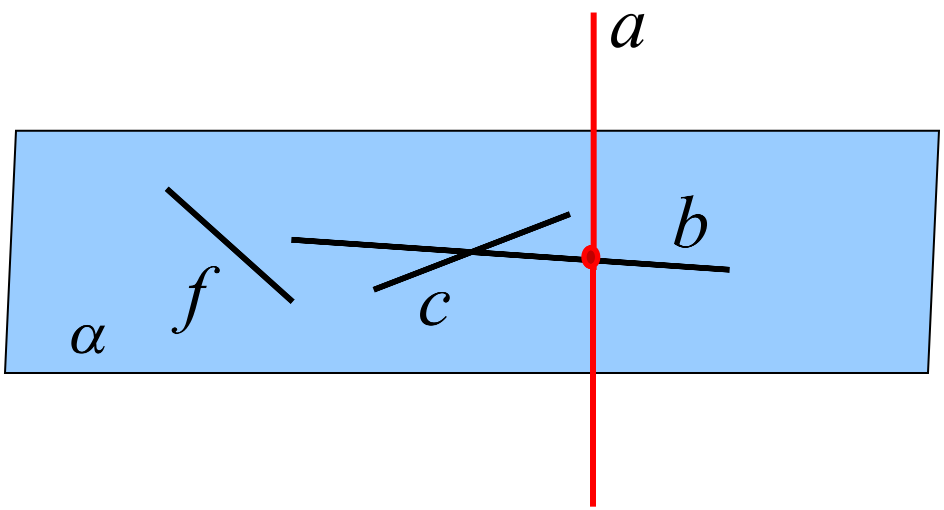
Прямая и плоскость называются **параллельными**, если они не пересекаются.

Прямая ***c*** параллельна плоскости ***γ***



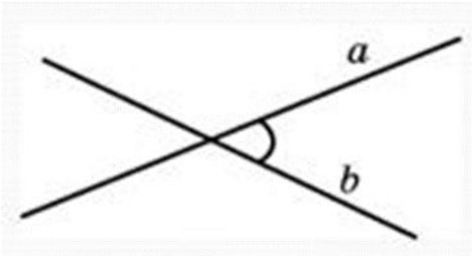
$$c \parallel \lambda$$

Прямая называется **перпендикулярной плоскости**, если она перпендикулярна ***<u>любой</u>*** прямой, лежащей в этой плоскости.

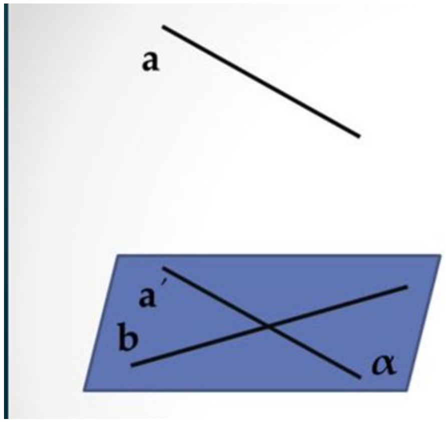


$$a \perp \alpha$$

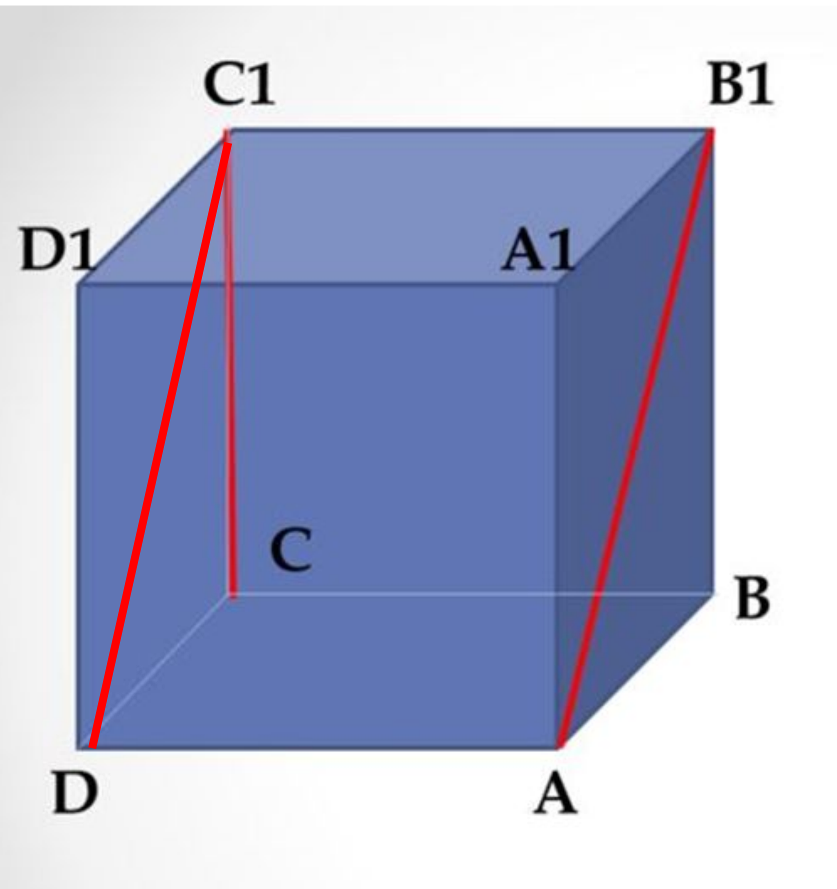
Определение. Углом между двумя прямыми в пространстве называется наименьший из углов, образованных при пересечении этих прямых.



Определение. Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным.



Угол между двумя параллельными прямыми-нулевой.



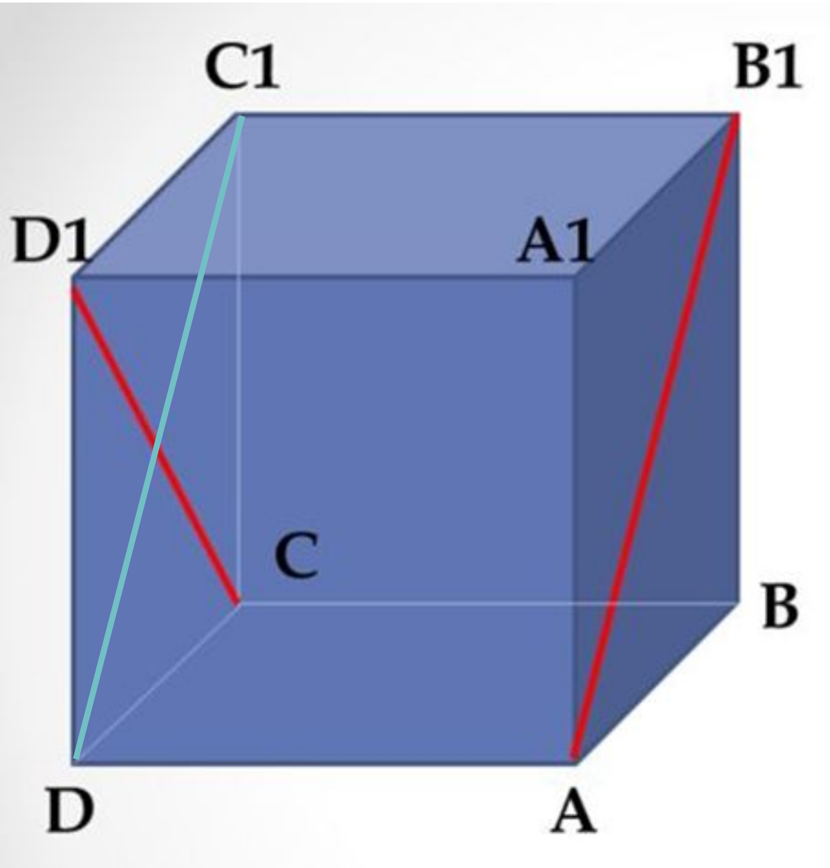
Ребро куба а.

Найти: <(AB1,CC1)

Решение:

CC1 ∥ BB1
<(AB1,CC1)=<AB1B
<AB1B=45°

Ответ: <(AB1,CC1)=45°



Ребро куба а.

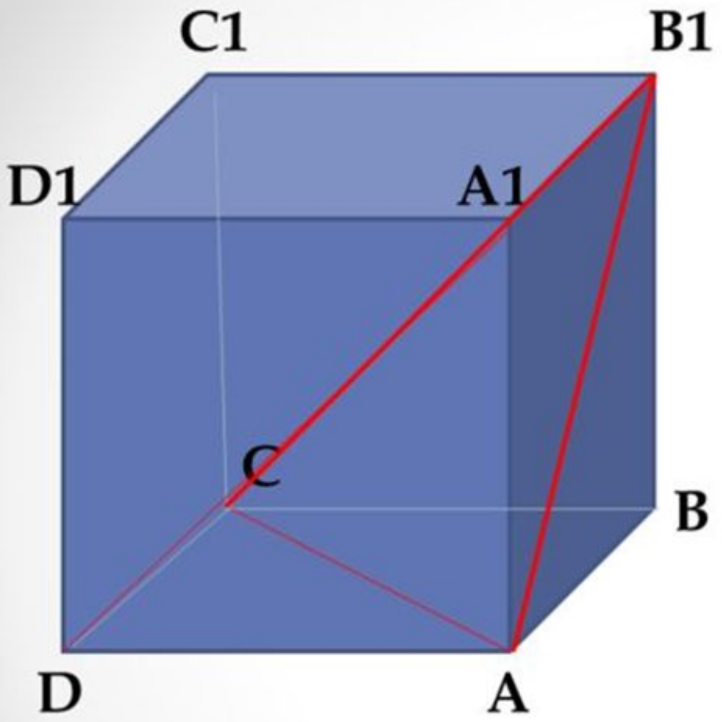
Найти: <(AB1,CD1)

Решение:

CD1∥BA1

<(AB1, CD1)=<(AB1, BA1)

Ответ: <(AB1, CD1)=90°



Ребро куба a.

Найти : <(AB1,DA1)

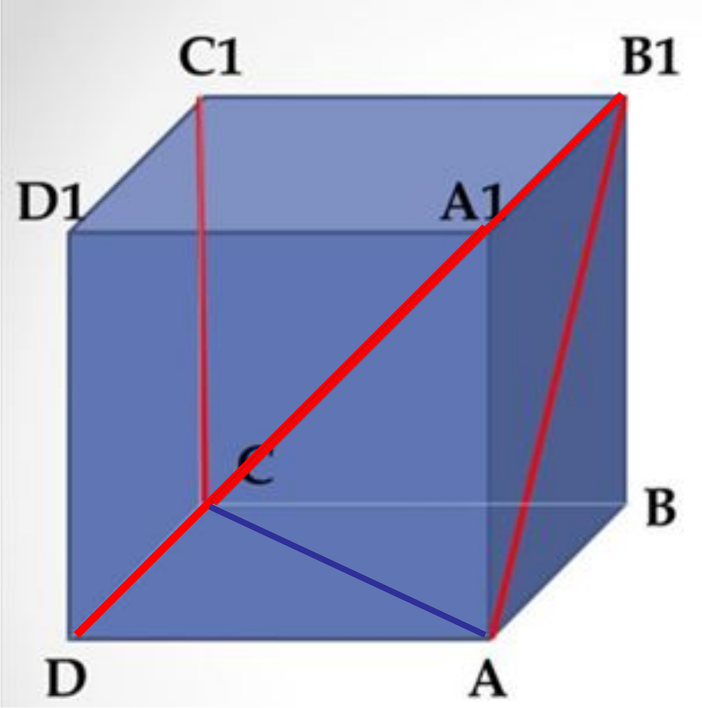
Решение:

DA1 ∥ CB1

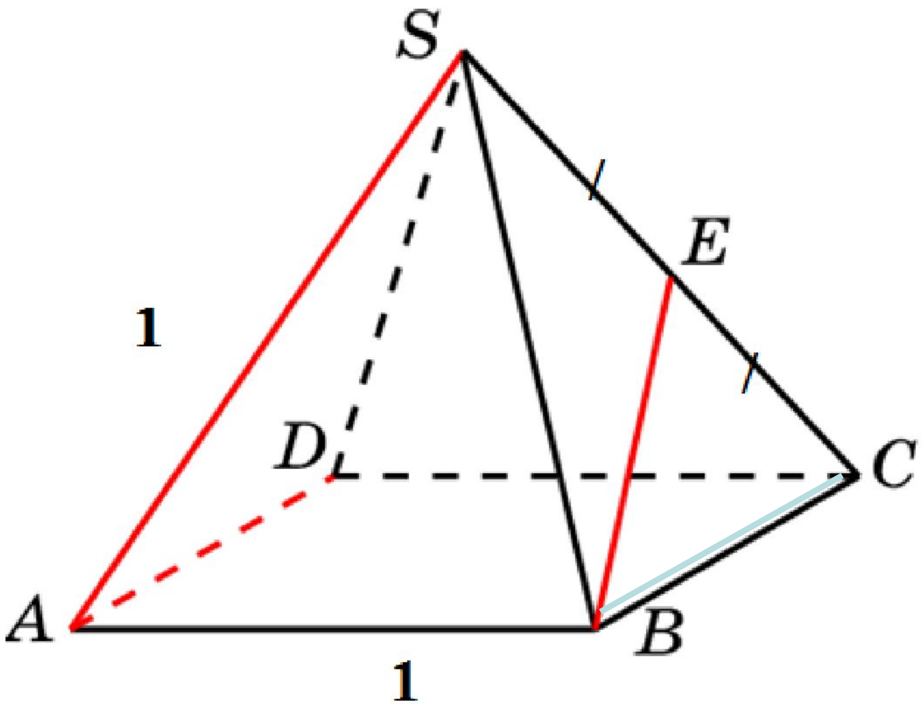
<(AB1, DA1)=<CB1A

ΔCAB1 –

Ответ : <(AB1, DA1)=60°

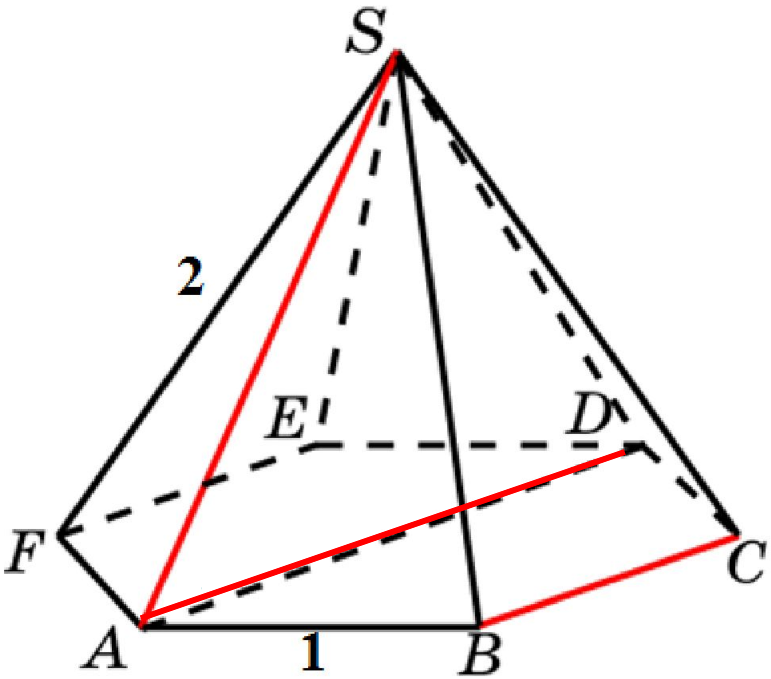


C1
B1
D1
A1
C
B
D
A



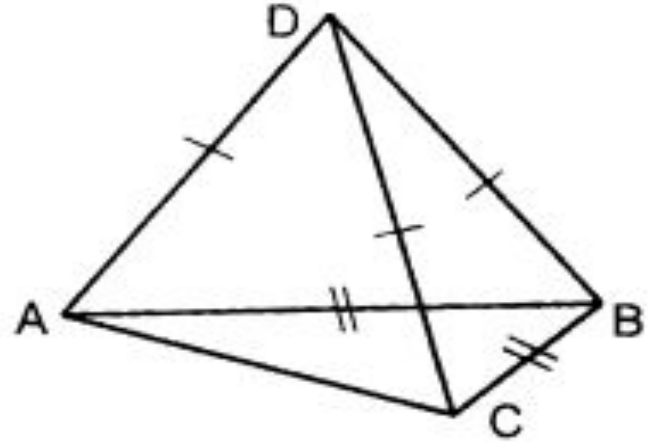
(AD,BE)-?

Ответ: 30°

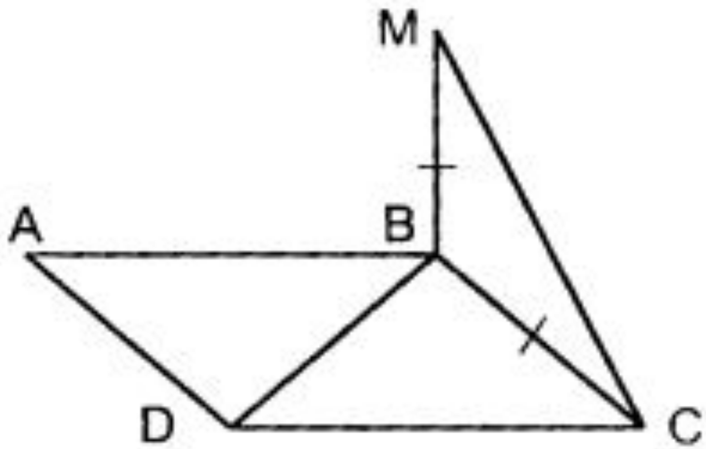


Правильная пирамида

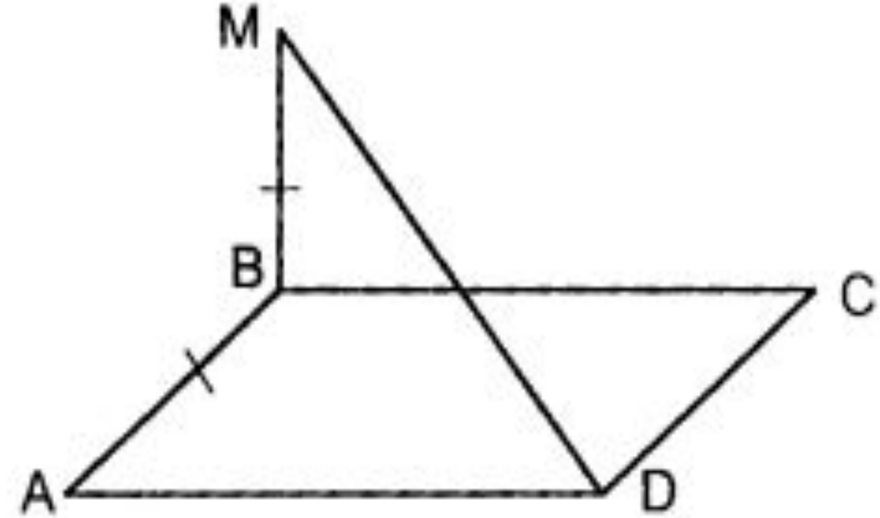
Ответ: 30°



Дано: точка D лежит вне плоскости ABC. Найти угол между прямыми AC и BD.



Дано: $ABCD$ – квадрат. Найти угол между прямыми CM и BD.



Дано: $ABCD$ – квадрат. Найти угол между прямыми MD и BC.

1 – задание

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми:

a) AB и BB_1

b) BD и BB_1

c) AB_1 и CC_1

d) AB_1 и CD_1

2 – задание

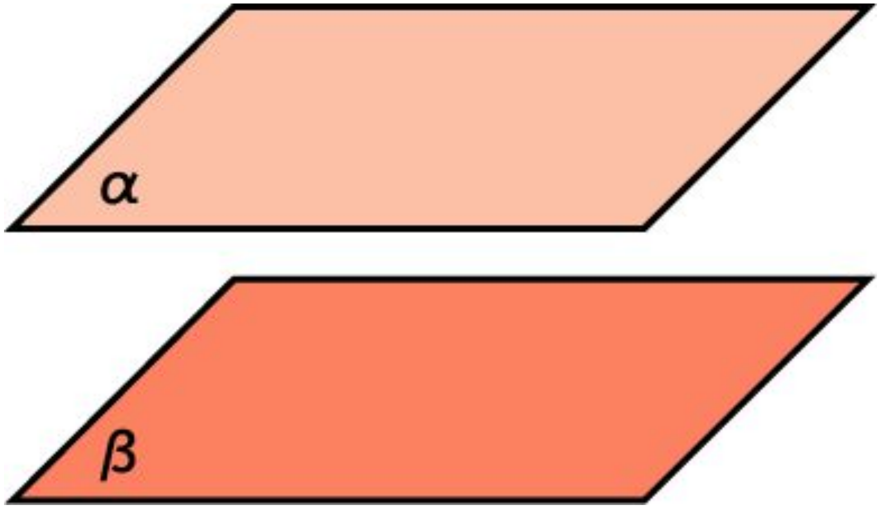
В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ отрезок CD перпендикулярен ребру AB. Найдите угол между прямыми:

a) CD и AA_1

b) CD и AB_1 .

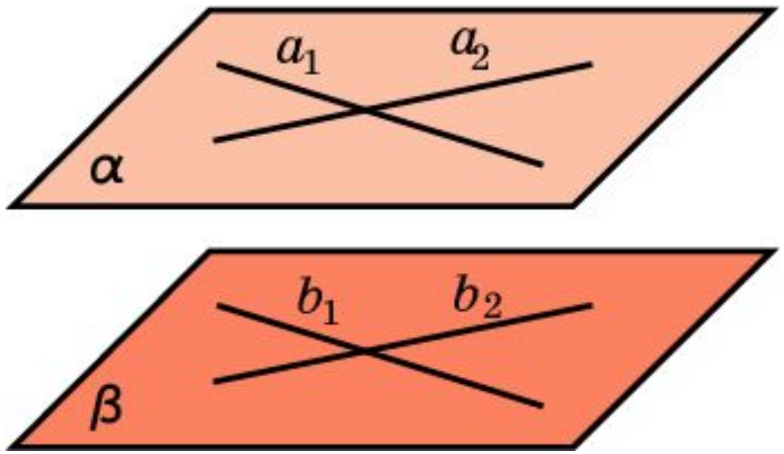
ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

Определение. Две плоскости в пространстве называются параллельными, если они не имеют общих точек.



Признак параллельности двух плоскостей

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

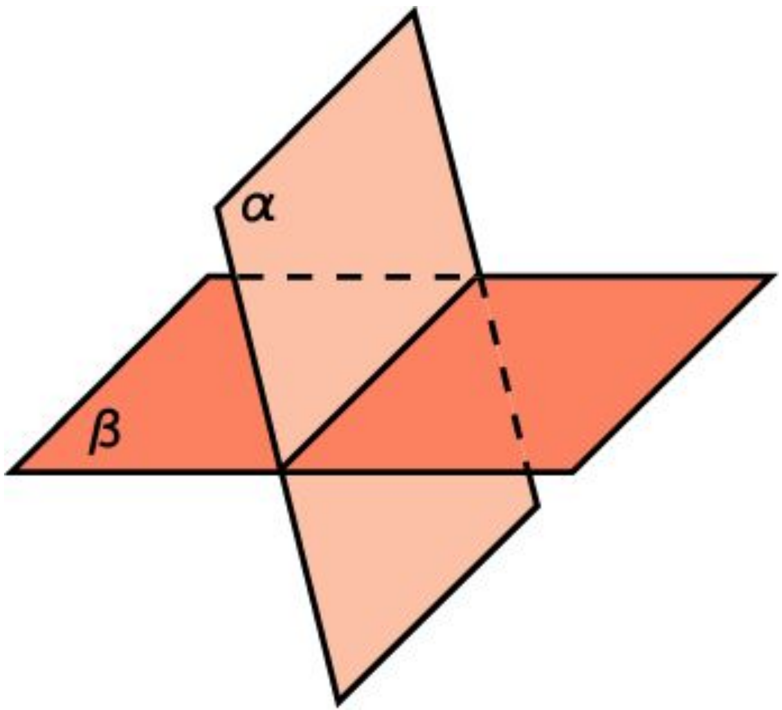


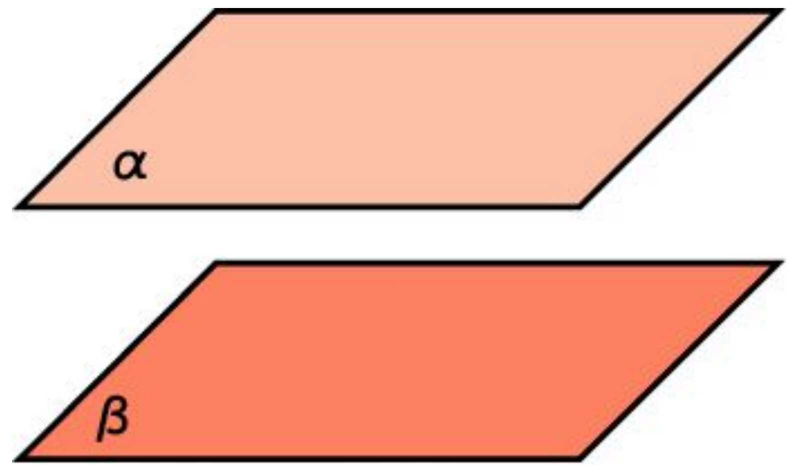
Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве

Две плоскости

Имеют общие точки (пересекаются по прямой)

Не имеют общих точек (параллельны)





Упражнение 1

Верно ли утверждение: "Если прямая, лежащая в одной плоскости, параллельна прямой, лежащей в другой плоскости, то эти плоскости параллельны"?

Ответ: Нет.

Упражнение 2

Верно ли, что две плоскости, перпендикулярные третьей, параллельны?

Ответ: Нет.

Упражнение 3

Верно ли утверждение: "Если две прямые, лежащие в одной плоскости, параллельны двум прямым, лежащим в другой плоскости, то эти плоскости параллельны”?

Ответ: Нет.

Упражнение 4

Сколько плоскостей, перпендикулярных данной плоскости, можно провести через данную прямую?

Ответ: Бесконечно много, если прямая перпендикулярна плоскости, и одну в противном случае.

Упражнение 5

Могут ли быть параллельными две плоскости, проходящие через непараллельные прямые?

Ответ: Да.

Упражнение 6

Плоскость α перпендикулярна плоскости β. Будет ли всякая прямая плоскости α перпендикулярна плоскости β?

Ответ: Нет.

Упражнение 7

Могут ли пересекаться плоскости, параллельные одной и той же прямой?

Ответ: Да.

Упражнение 8

Плоскость и прямая параллельны. Верно ли утверждение о том, что плоскость, перпендикулярная данной плоскости, перпендикулярна и данной прямой?

Ответ: Нет.

Упражнение 9

Через каждую из двух параллельных прямых проведена плоскость. Можно ли утверждать, что эти плоскости параллельны?

Ответ: Нет.

Упражнение 10

Плоскость и прямая параллельны. Будет ли верно утверждение о том, что плоскость, перпендикулярная прямой, перпендикулярна и данной плоскости?

Ответ: Да.

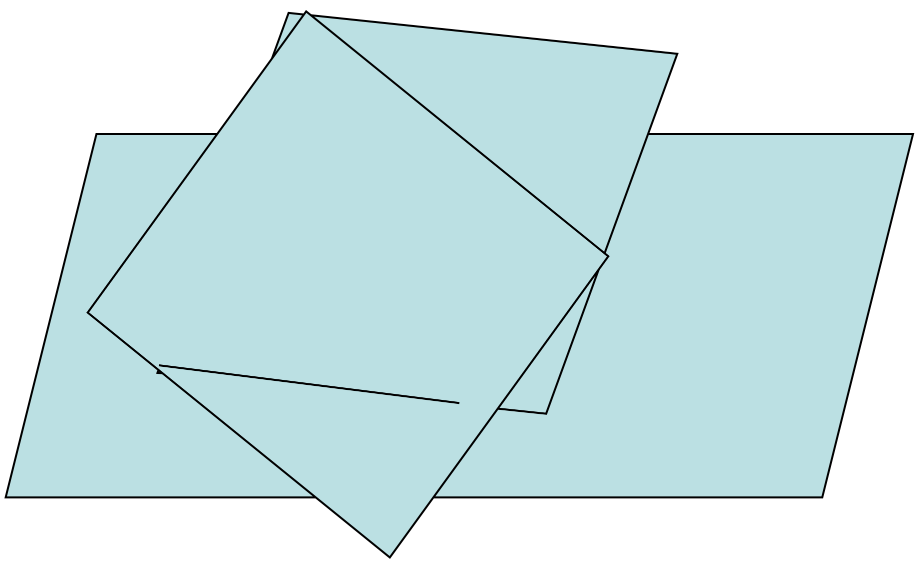
ДВУГРАННЫЙ УГОЛ

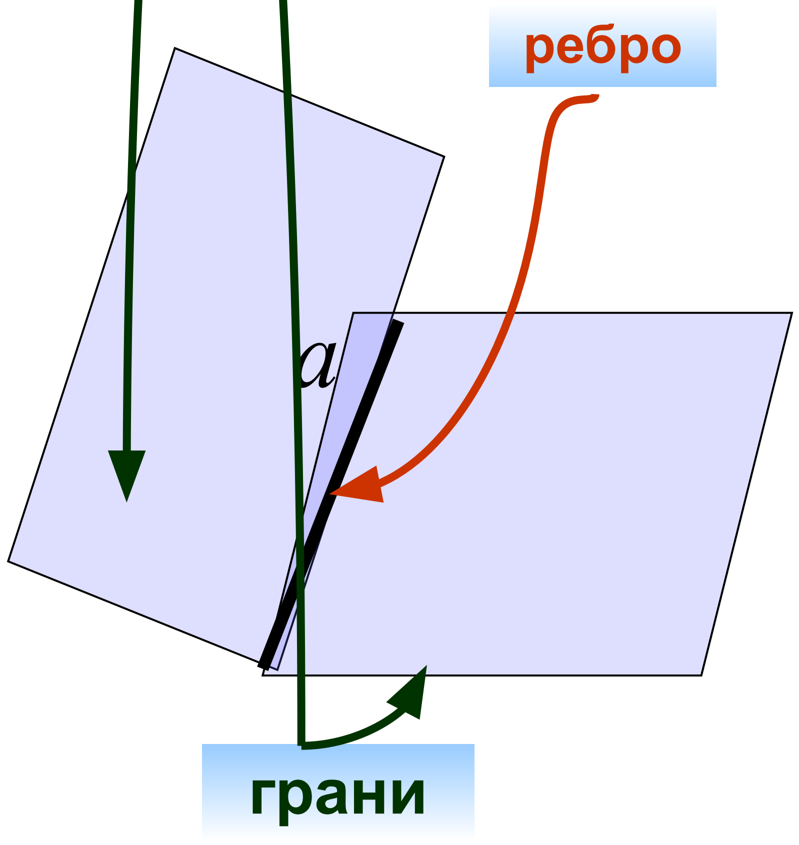
Определение двугранного угла

Двугранным углом *называется фигура, образованная двумя не принадлежащим одной плоскости полуплоскостями, имеющими общую границу – прямую* a.

Полуплоскости, образующие двугранный угол, называются его гранями.

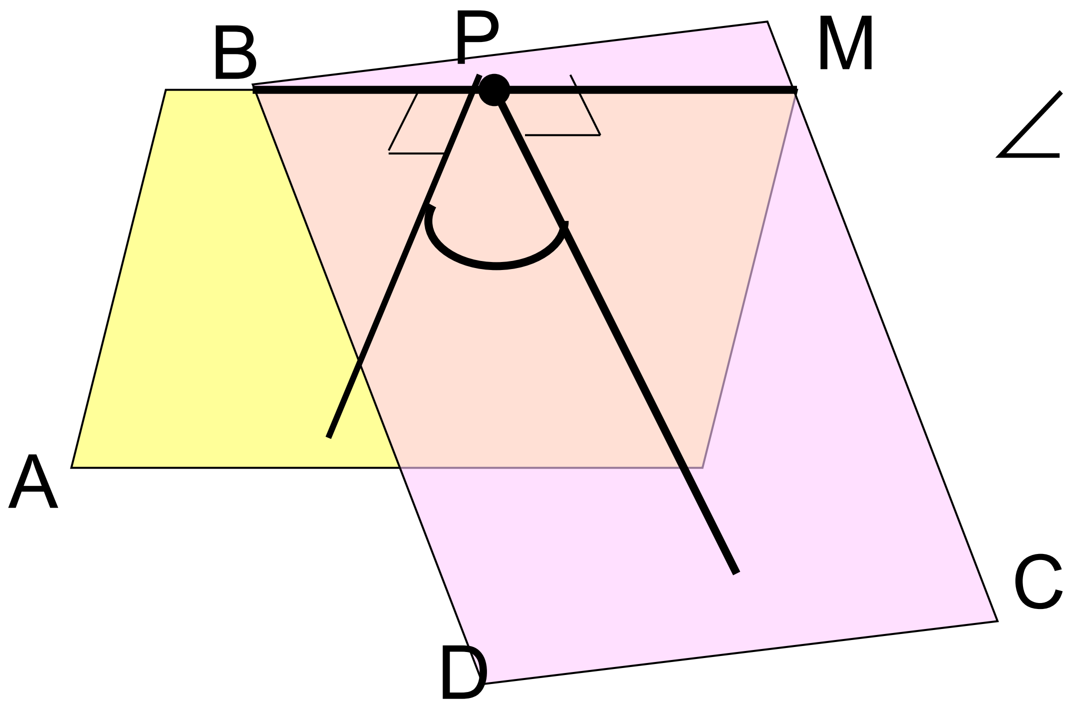
Общая граница этих полуплоскостей – ребром двугранного угла.





Измерение двугранных углов. Линейный угол.

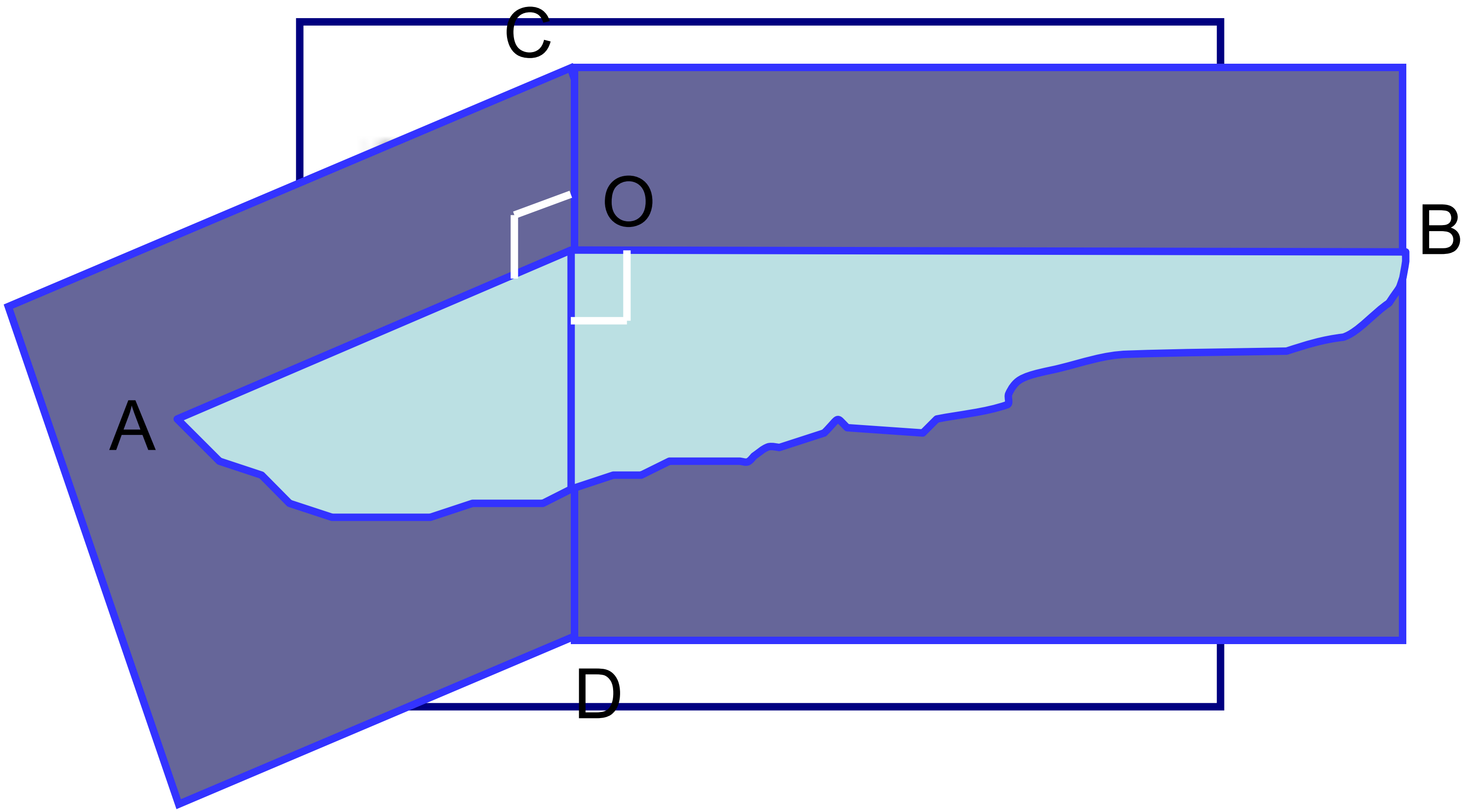
Величиной двугранного угла называется величина его линейного угла.



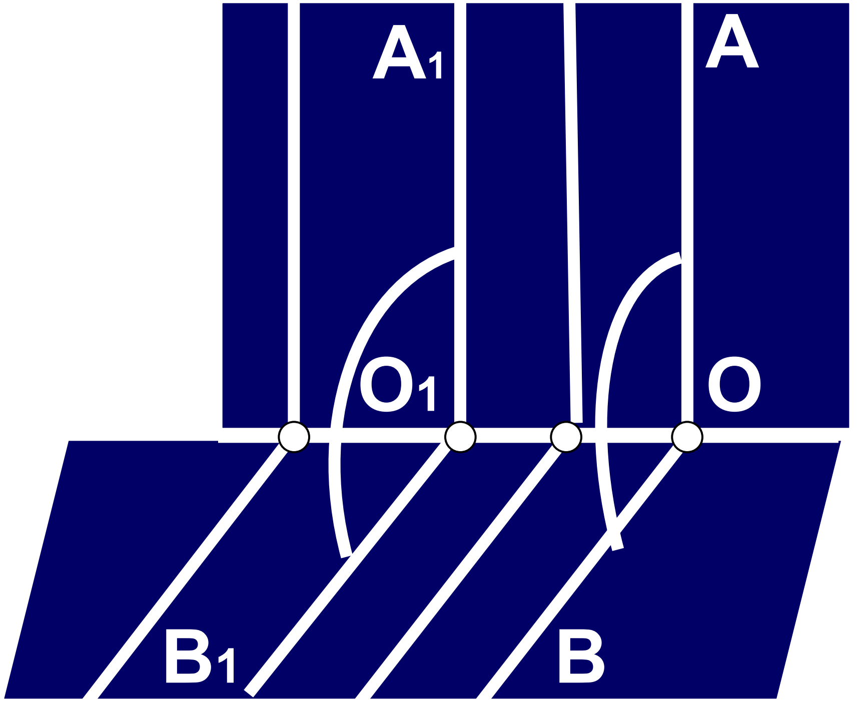
$\angle ABMC = \angle P$

Угол P – линейный угол двугранного угла ABMC

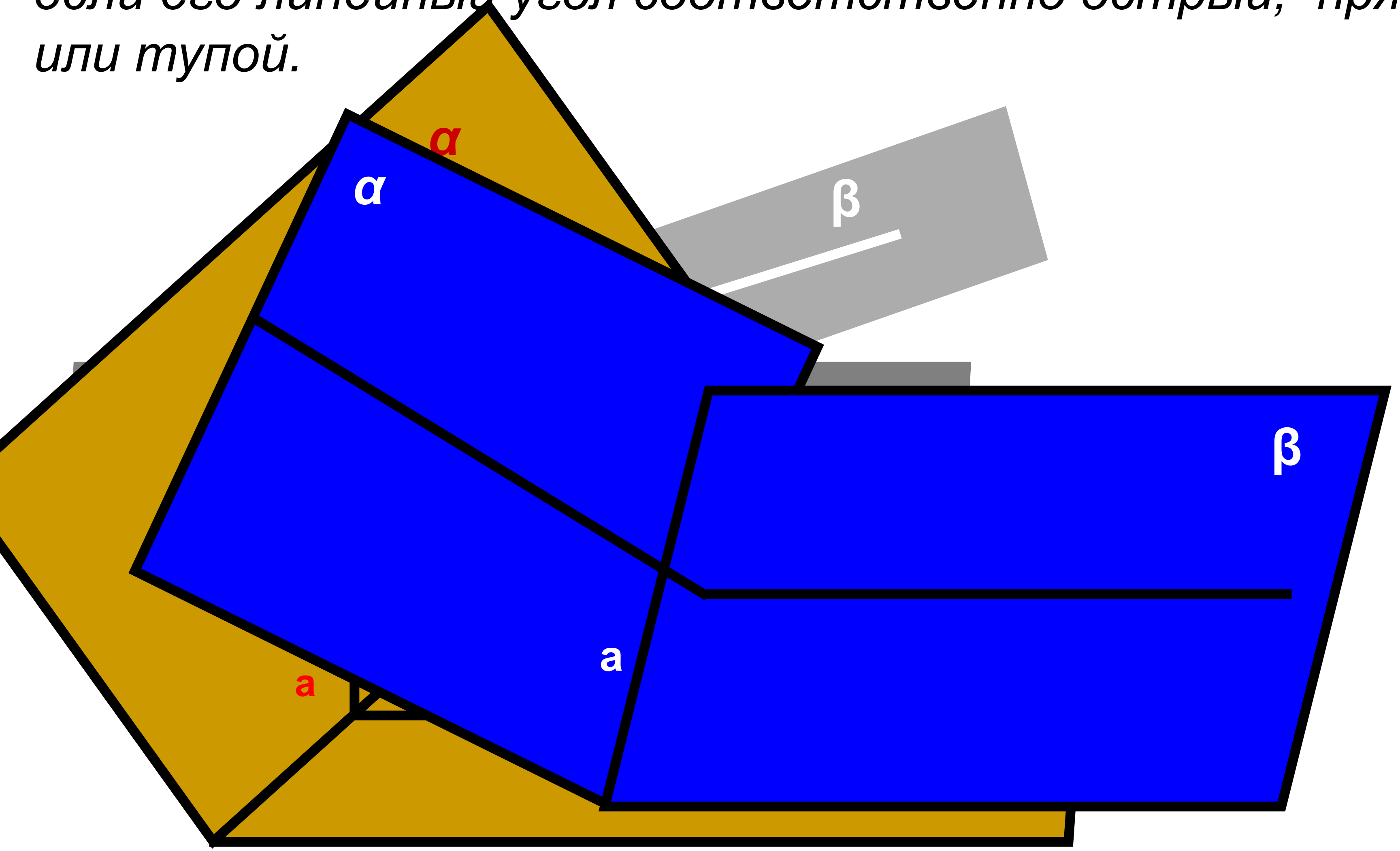
Линейным углом двугранного угла *называется сечение двугранного угла плоскостью, перпендикулярной ребру.*



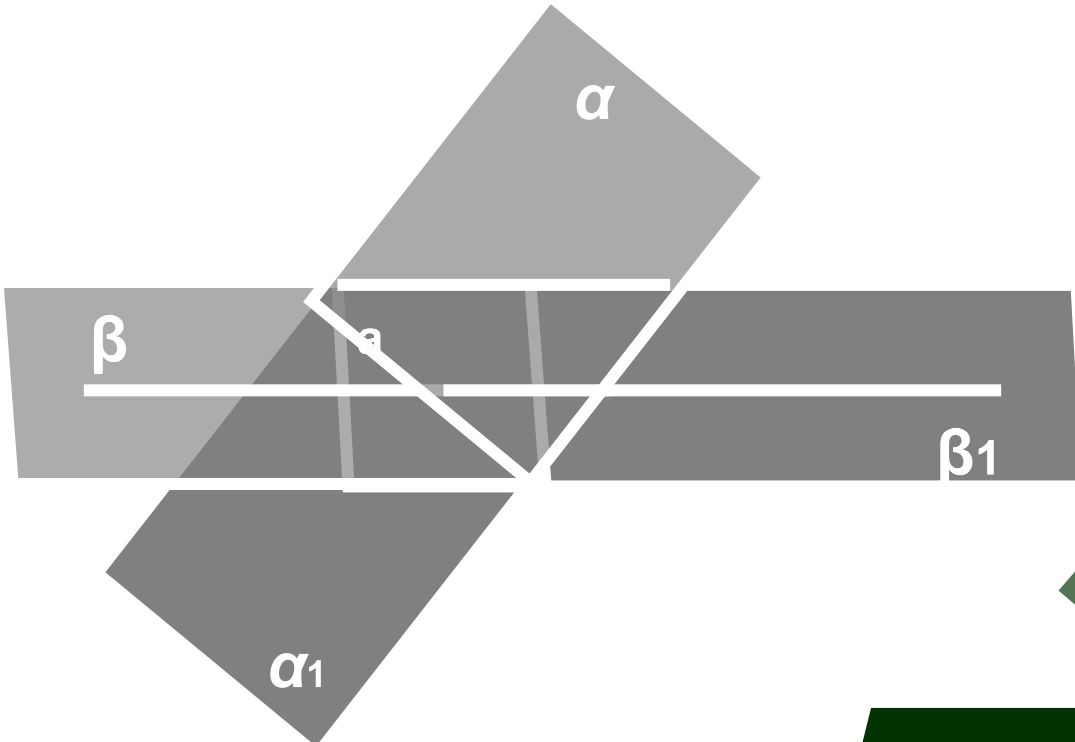
Величина линейного угла не зависит от выбора его вершины на ребре двугранного угла.

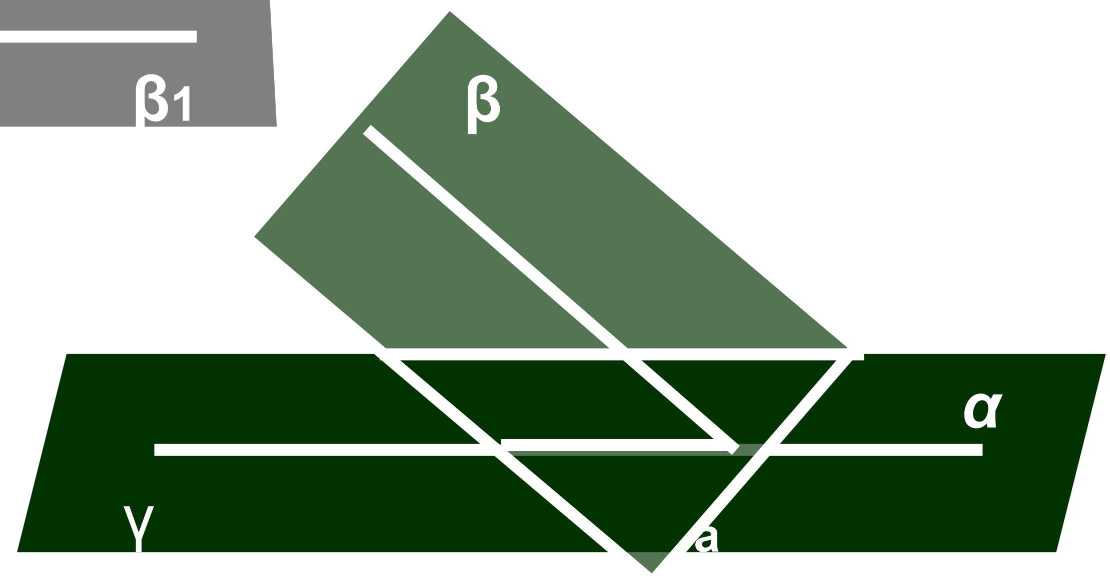


Двугранный угол является острым , прямым или тупым, если его линейный угол соответственно острый, прямой или тупой.



Аналогично тому , как и на плоскости , в пространстве определяются смежные и вертикальные двугранные углы.



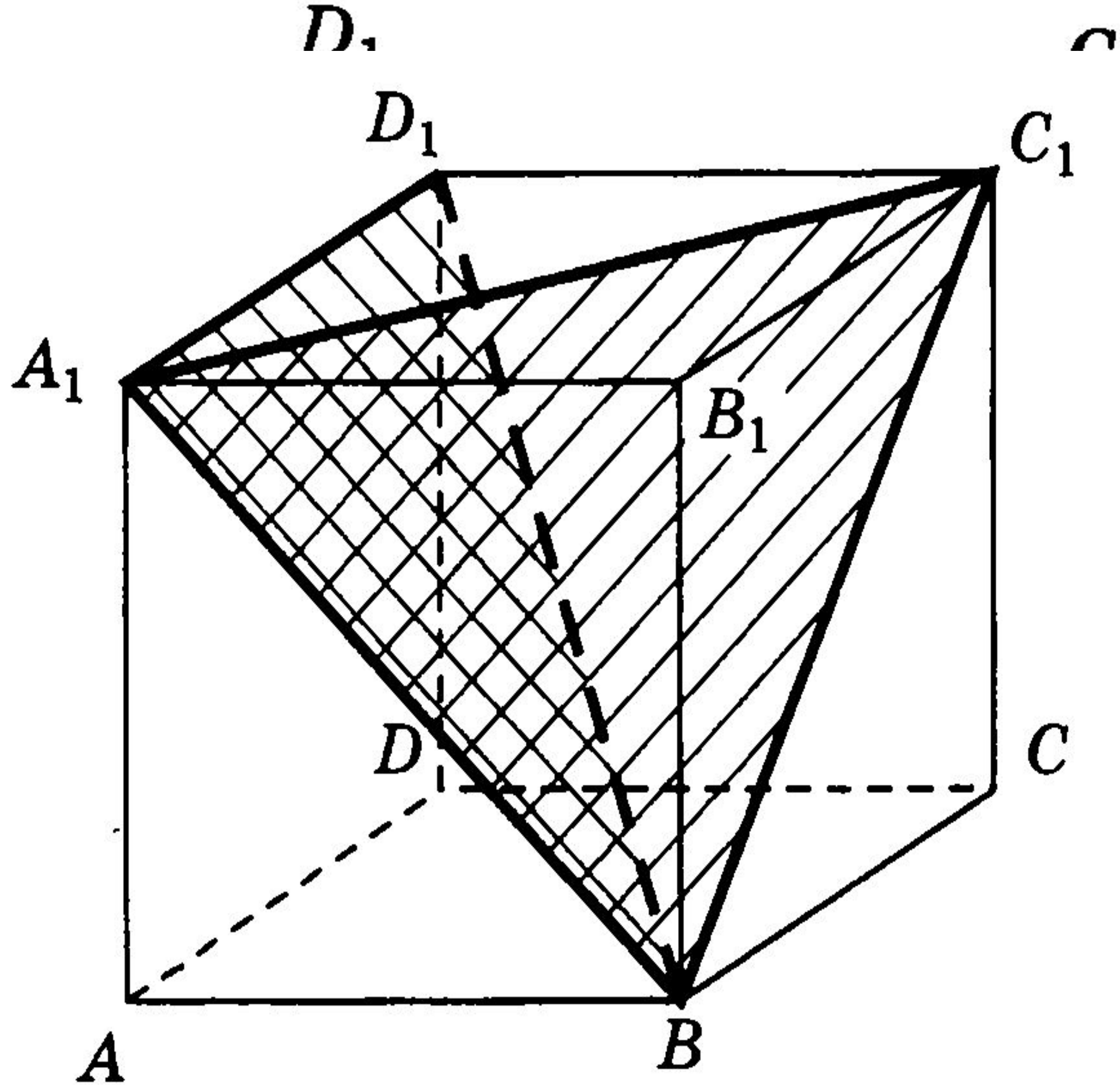


Углом между двумя пересекающимися плоскостями называется наименьший из двугранных углов, образованных при их пересечении.

Угол между параллельными или совпадающими плоскостями полагается равным нулю.

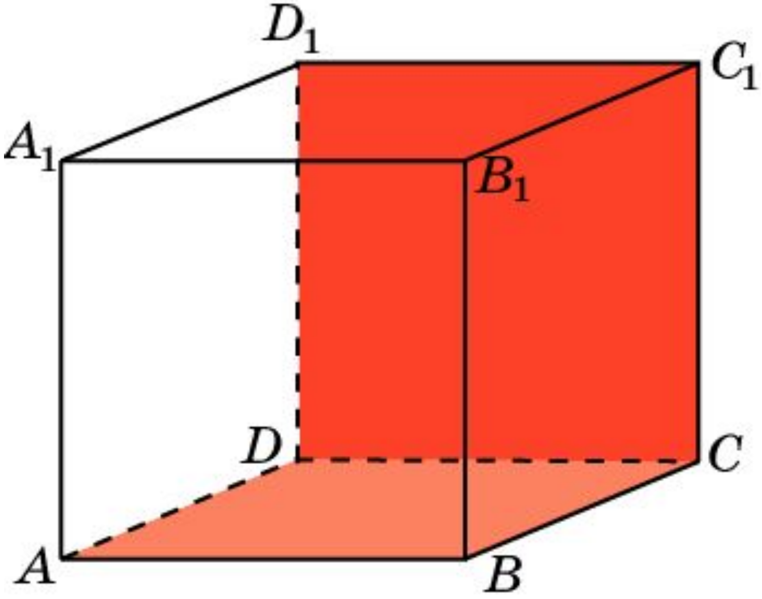
Работа в парах

- **Уровень А.** В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите углы между плоскостями ABC_1 и ABC.
- **Уровень В.** В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите углы между плоскостями ABC и ACD_1.
- **Уровень С.** В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите углы между плоскостями BA_1C_1 и BA_1D_1.



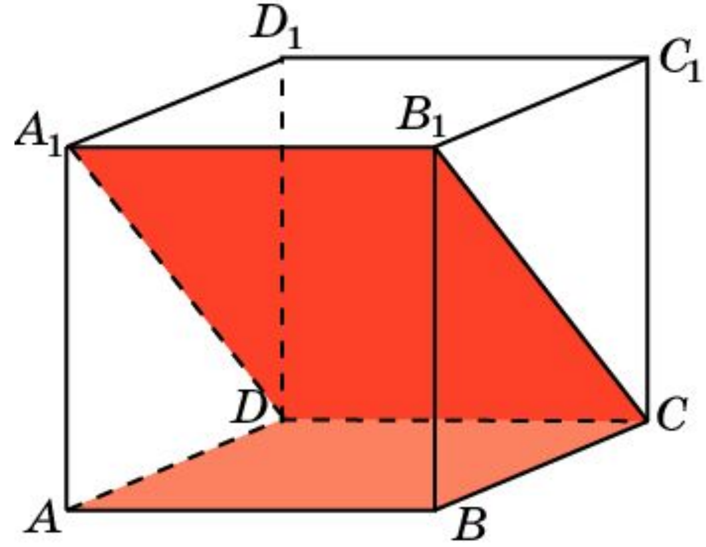
D1
C
D1
C1
A1
B1
D
C
A
B

1. В кубе A…D^1 найдите угол между плоскостями ABC и CDD^1.



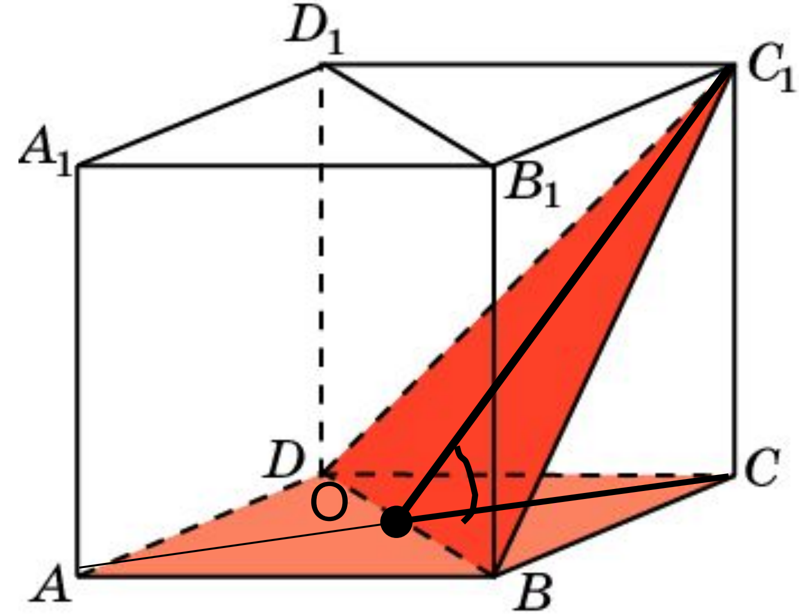
Ответ: 90°

2.В кубе $A\ldots D_1$ найдите угол между плоскостями ABC и CDA_1.



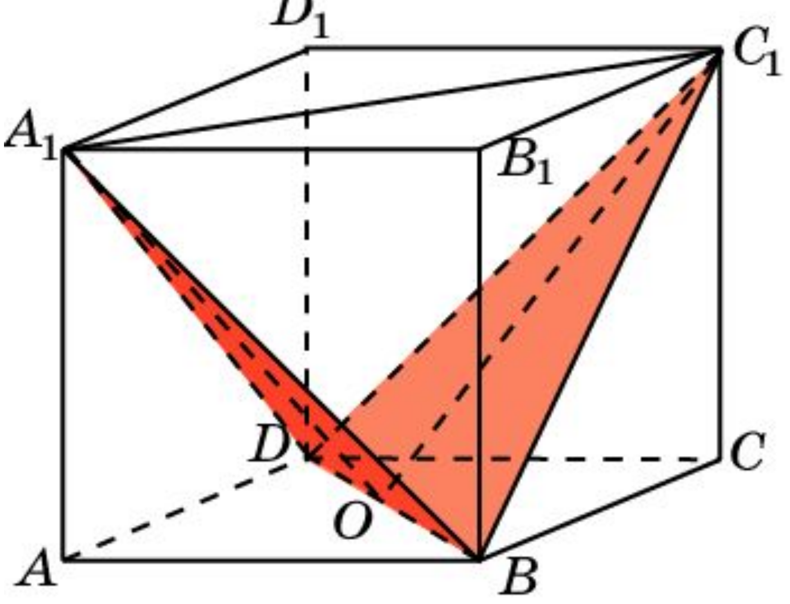
Ответ: 45°

3.В кубе A… D_1 найдите угол между плоскостями ABC и BC_1D.



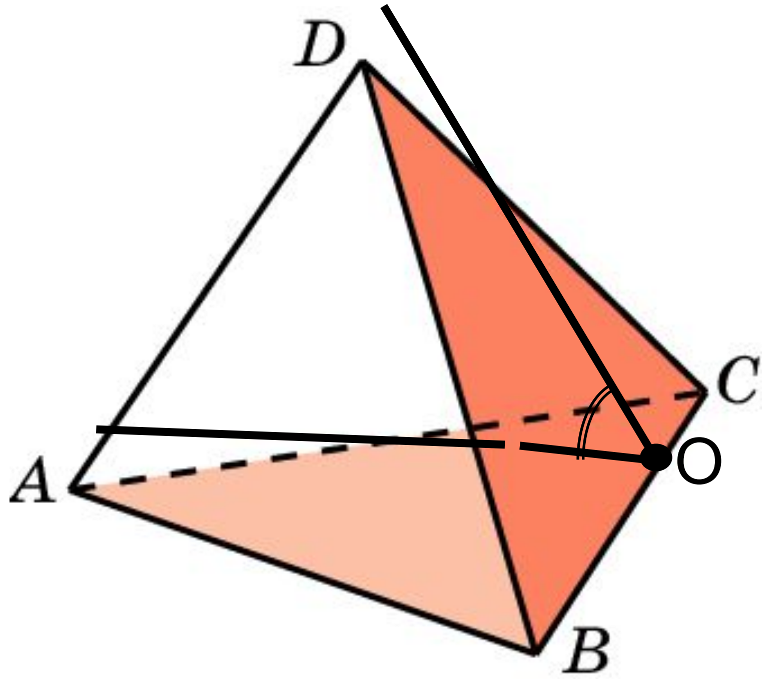
Ответ: $tg\,\varphi = \sqrt{2}.$

4. В кубе А… D_1 найдите угол между плоскостями BC1D и BA_1D.



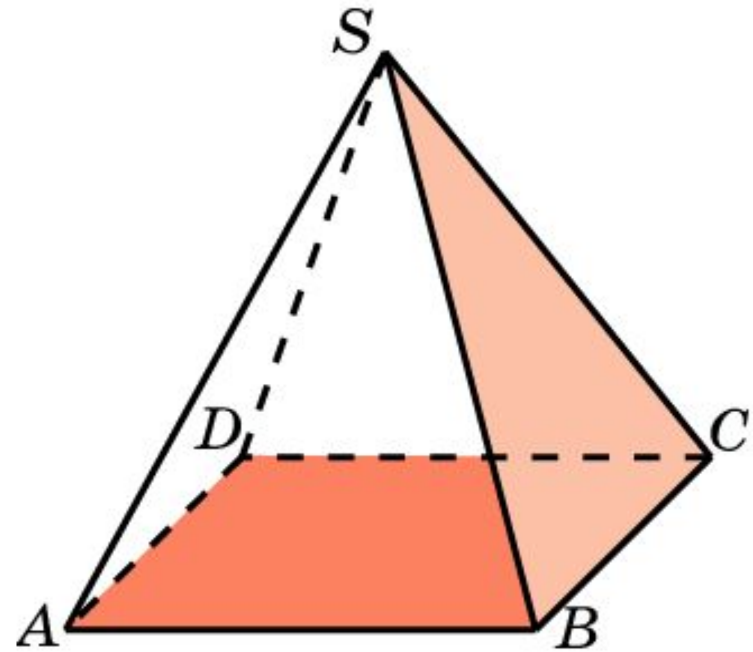
Ответ: $\cos\varphi = \frac{1}{3}$.

5. В тетраэдре ABCD, ребра которого равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и BCD.



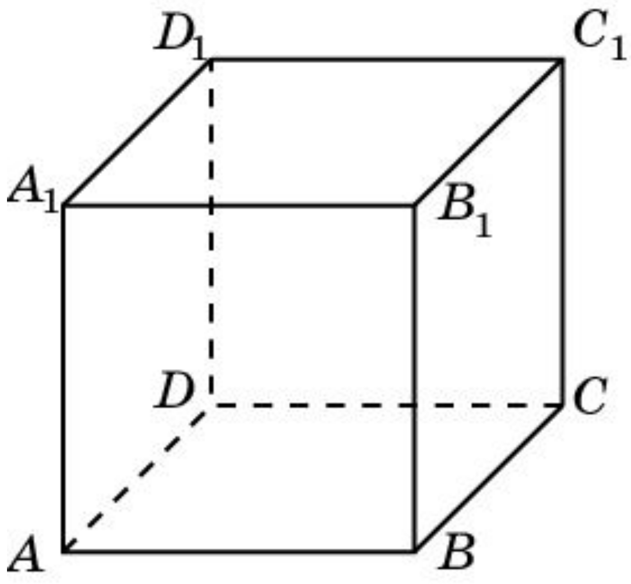
Ответ: $\cos \varphi = \dfrac{1}{3}.$

6. В правильной пирамиде *SABCD*, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями *SBC* и *ABC*.



Карточка A Задание 1

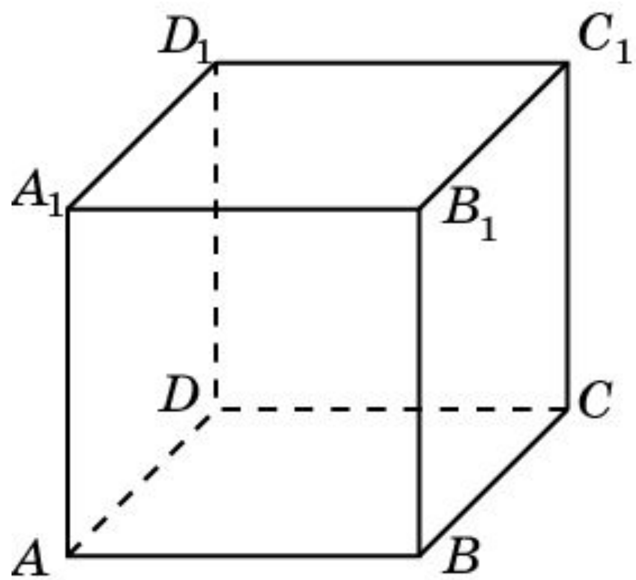
В кубе $A \ldots D_1$ укажите плоскости, проходящие через вершины куба, параллельные плоскости ABC.



Ответ: $A_1B_1C_1$.

Карточка B Задание 1

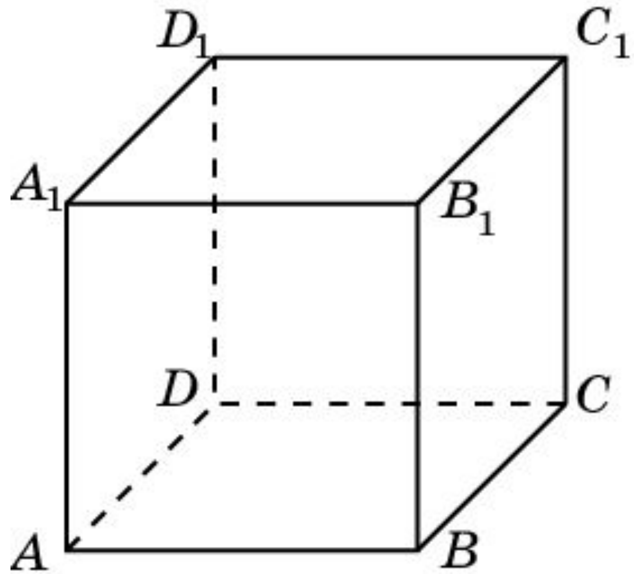
Дан куб $A \ldots D_1$. Назовите плоскость, проходящую через вершины этого куба и параллельную плоскости AB_1D_1.



Ответ: BC_1D.

Карточка А Задание 2

Сколько имеется пар параллельных плоскостей, содержащих грани куба $A \ldots D_1$.



Решение: Каждая грань участвует в одной паре параллельных плоскостей. У куба имеется 6 граней. Следовательно, искомое число пар параллельных граней равно $\dfrac{6}{2} = 3.$

Карточка В Задание 2

Для пирамиды, изображённой на рисунке, назовите номера верных утверждений:

1) угол между плоскостями SAB и DBC прямой;

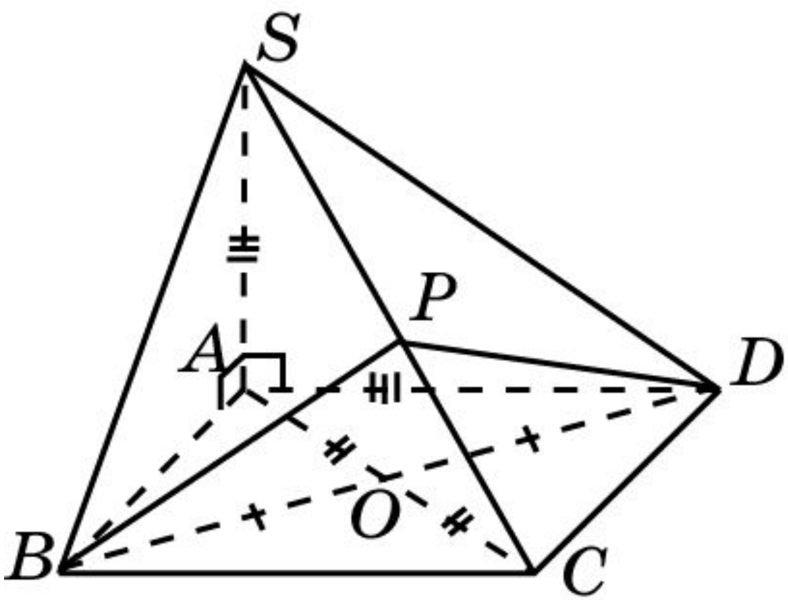
2) плоскости SBC и SAB перпендикулярны;

3) плоскости SAC и DBC перпендикулярны;

4) угол между плоскостями SCD и DBC прямой;

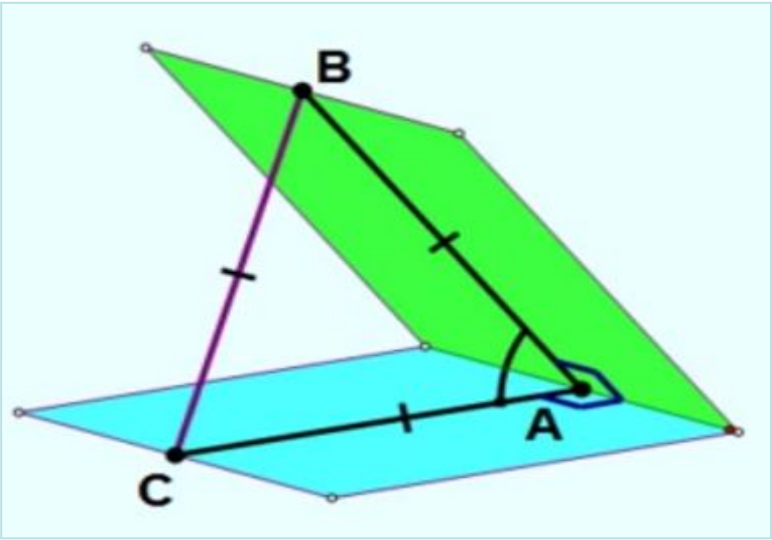
5) плоскости DBC и ASP перпендикулярны;

6) угол между плоскостями SBC и ASP прямой.

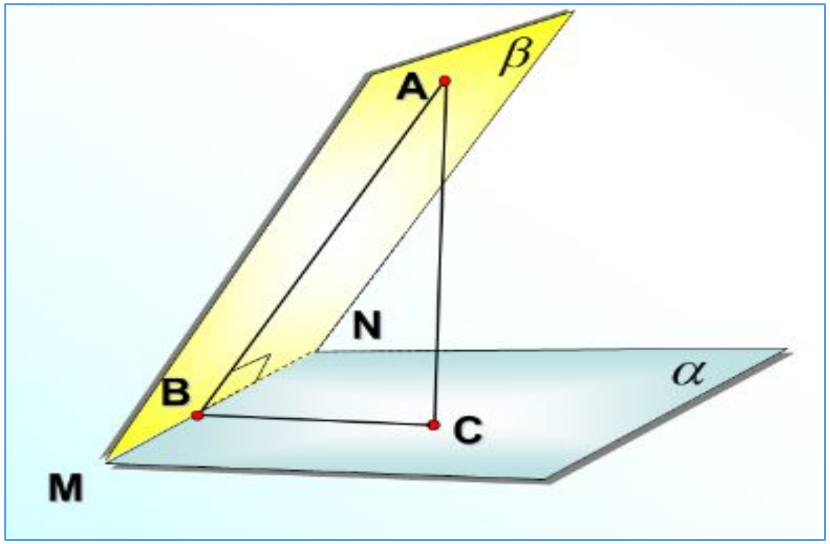


Ответ: 1), 3), 5).

Используя рисунок решить задачи



Ответ: 30°



Используя рисунок решить задачи:

а) AC=BC=7

Найти : угол B, AB.

б) угол B=45^0, AC=a.

Найти: BA, CB.

в) AB=12, BC=6

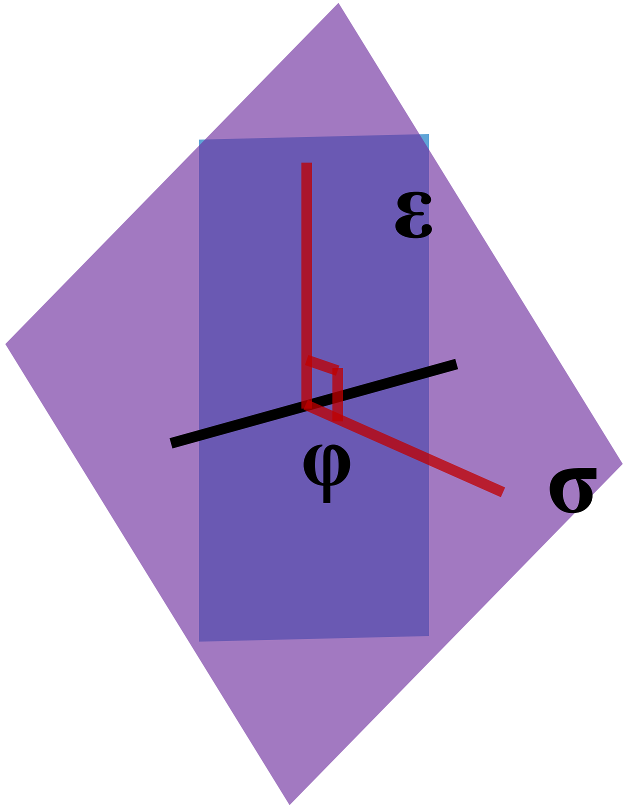
Найти угол B.

г) AB=5, AC=3. Найти tgB.

Определение

Две плоскости называются перпендикулярными, если двугранный угол между ними равен 90°

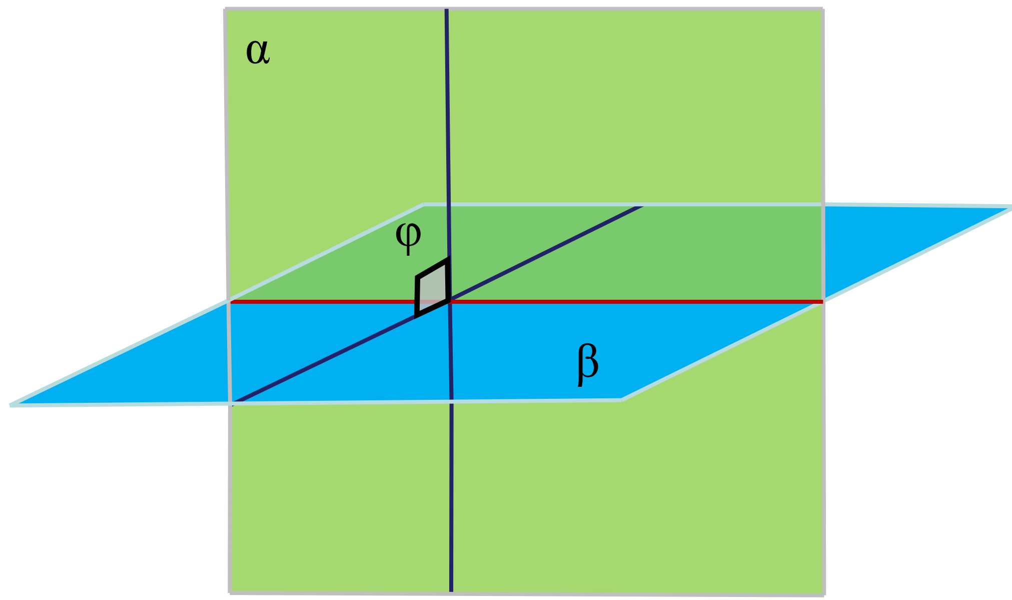
$\varepsilon \perp \sigma$, т.к. $\varphi = 90°$



α, β — плоскости

φ — двугранный угол между плоскостями

Ответ: 30°



Теорема (признак перпендикулярности двух плоскостей)

Если **плоскость** проходит через прямую, **перпендикулярную** другой плоскости, то эти плоскости **перпендикулярны**

Дано:

α, β, $AM \subset \alpha$, $AM \perp \beta$, $AM \cap \beta = A$

Доказать: $\alpha \perp \beta$

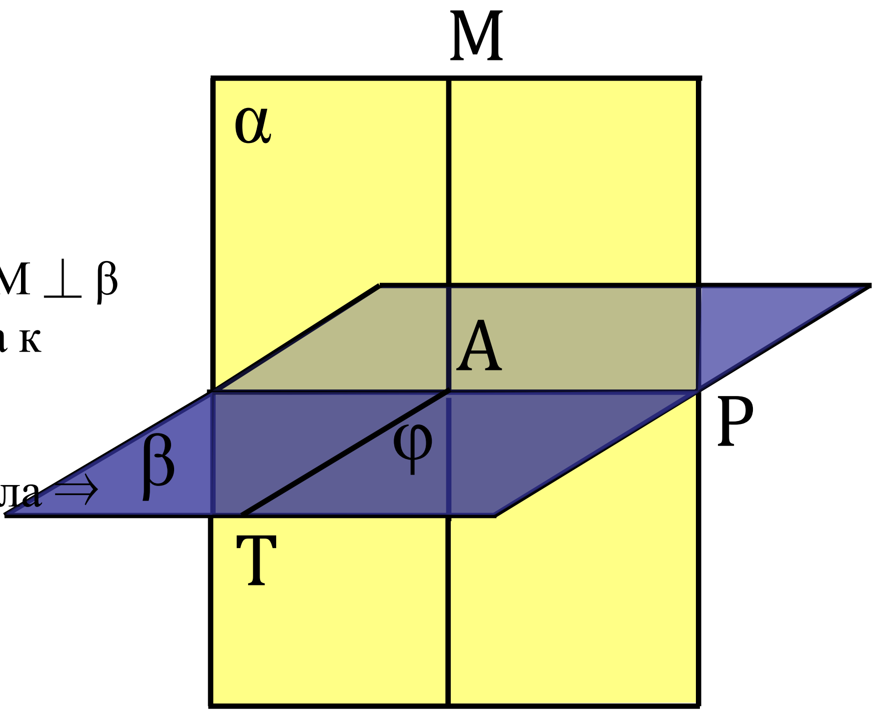
Доказательство:

1) $\alpha \cap \beta = AP$, при этом $AM \perp AP$, т. к. $AM \perp \beta$ по условию, то есть AM перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости β

2) $AT \subset \beta$, $AT \perp AP$,

$\angle TAM$ — линейный угол двугранного угла $\Rightarrow$

$\angle TAM = 90°$, т.к. $MA \perp \beta \Rightarrow \alpha \perp \beta$

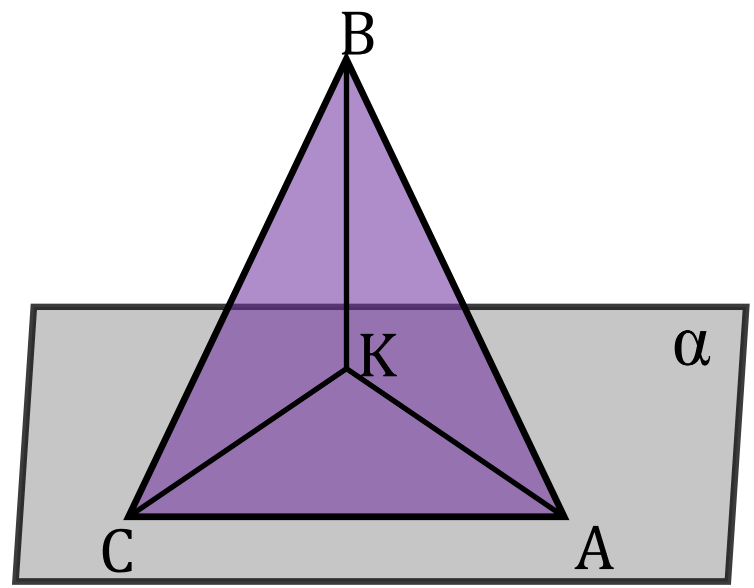


Что и требовалось доказать

Задача

Дано:
ΔABC, $\angle C = 90°$, $AC \subset \alpha$, $\angle$ между плоскостями α и $\Delta ABC = 60°$, $AC = 5$ см, $AB = 13$ см
Найти: расстояние от B до α

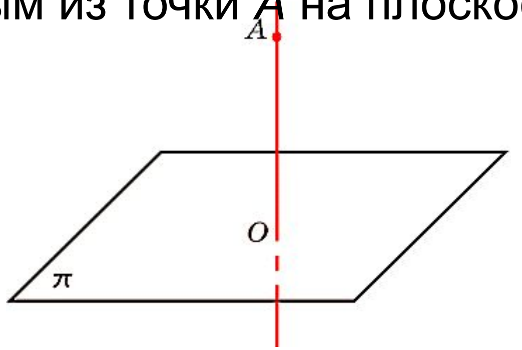
Решение:
1) Построим $BK \perp \alpha$. Тогда KC — проекция BC на α
2) $BC \perp AC$ (по условию), значит, (по ТТП), $KC \perp AC \Rightarrow \angle BCK$ — линейный угол двугранного угла ABCK, т. е. $\angle BCK = 60°$
3) Из ΔBCA по теореме Пифагора:
$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$
из ΔBKC: $BK = BC \cdot \sin 60° = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ (см)

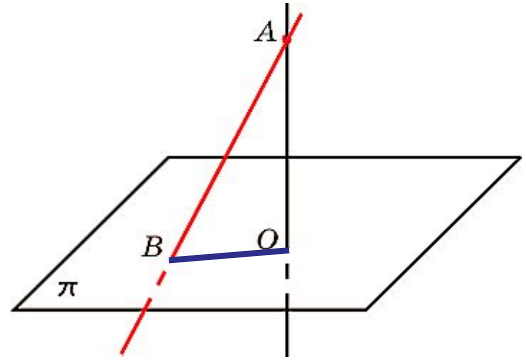


Ответ: $6\sqrt{3}$ см

ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННАЯ

Пусть точка *A* не принадлежит плоскости π. Проведем прямую *a*, проходящую через эту точку и перпендикулярную π. Точку пересечения прямой *a* с плоскостью π обозначим *O*. Отрезок *AO* называется перпендикуляром, опущенным из точки *A* на плоскость π.



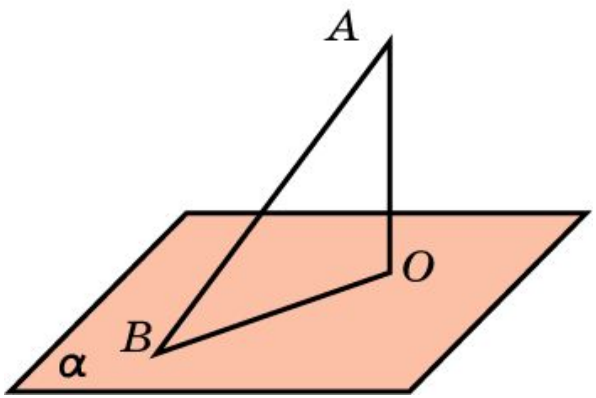


Наклонной к плоскости называется прямая, пересекающая эту плоскость и не перпендикулярная ей. Наклонной называют также отрезок, соединяющий точку, не принадлежащую плоскости, с точкой плоскости, и не являющийся перпендикуляром.

Отрезок *OB*, соединяющий основание перпендикуляра и основание наклонной, называется проекцией наклонной *AB* на плоскость π.

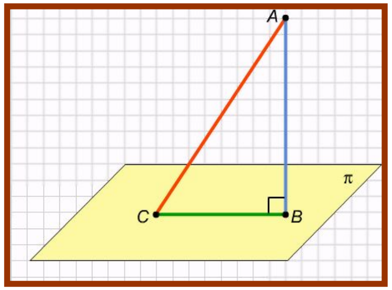
Теорема о перпендикуляре и наклонной

Теорема. Перпендикуляр, опущенный из точки на плоскость, короче всякой наклонной, проведенной из той же точки к той же плоскости.

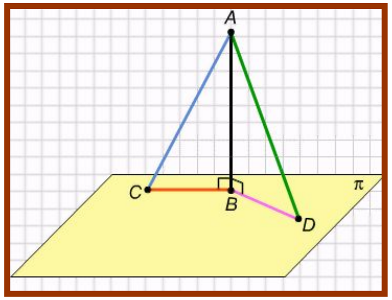


Доказательство. Пусть AB – наклонная к плоскости α, AO – перпендикуляр, опущенный на эту плоскость. Соединим отрезком точки O и B. Треугольник AOB прямоугольный, AB – гипотенуза, AO – катет. Следовательно, $AO < AB$.

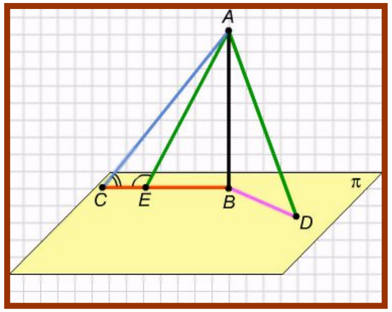
Свойства наклонных, выходящих из одной точки



1. Перпендикуляр всегда короче наклонной, если они проведены из одной точки.



2. Если наклонные равны, то равны и их проекции, и наоборот.



3. Большей наклонной соответствует большая проекция и наоборот.