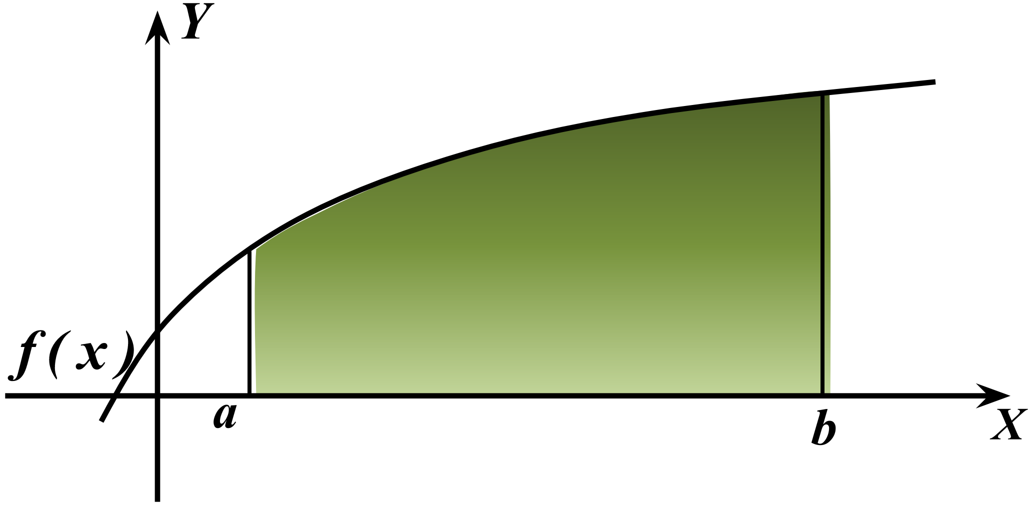
# Определенный интеграл.
# Формула Ньютона-Лейбница

# *Определение криволинейной трапеции*




**Криволинейная трапеция**

Пусть в декартовой системе координат дана фигура, ограниченная :

1) Осью x

2) Прямой $x = a$

3) Прямой $x = b$

4) Графиком непрерывной и неотрицательной на отрезке [a; b] функции $y = f(x)$

## *Задача о вычислении площади криволинейной трапеции*

Разобъем отрезок [a;b] на *n* равных частей точками $x_1, x_2 \ldots x_k \ldots x_{n-1}$

Из этих точек восставим перпендику-ляры до пересечения с графиком функции

Тогда криволинейная трапеция разобьется на *n* узких столбиков.

Рассмотрим k –й столбик основанием кото-рого служит отрезок $[x_k; x_{k+1}]$ и высотой, равной $f(x_k)$

Обозначим длину отрезка $[x_k; x_{k+1}]$

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$$

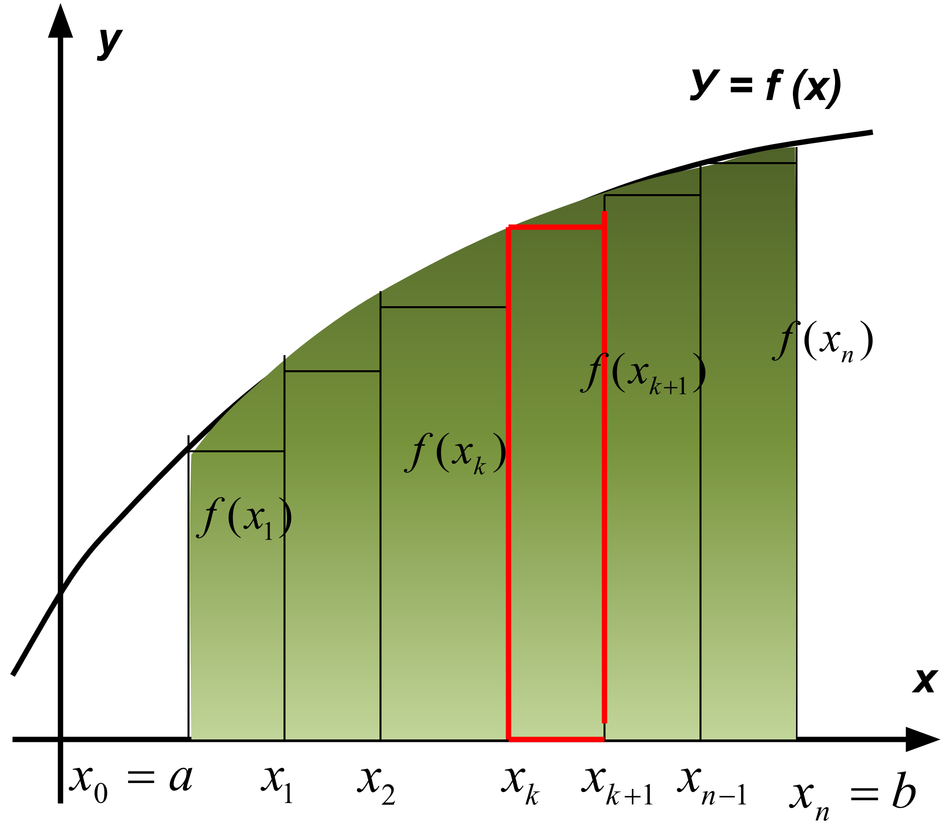
Заменим все столбики прямоугольниками с основаниями $\Delta x_1 = x_2 - x_1$ … $\Delta x_n = x_{n-1} - x_n$

и высотами $f(x_1)....f(x_n)$ соответственно

Площадь каждого прямоугольника равна

$$S_k = \Delta x_k f(x_k)$$

Площадь всей фигуры приближенно равна сумме площадей все прямоугольников




$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$$

$$S = \Delta x_1 \cdot f(x_1) + \ldots + \Delta x_k f(x_k) + \ldots + \Delta x_n \cdot f(x_n)$$

Это приближенное равенство тем точнее, чем больше *n*

*Искомая площадь криволинейной трапеции равна пределу последовательности*

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

## *Понятие определенного интеграла*

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Этот предел называют ***определенным интегралом функции***

*y = f(x)* по отрезку [a;b] и обозначают так:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx$$

читают: *интеграл от a до b эф от икс дэ икс*

*a* – **нижний предел**

*b* – **верхний предел**

**Множество всех первообразных для функции *y = f(x)* на промежутке *X* называют *неопределенным интегралом* и обозначают**

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ **называют *определенным интегралом* от *y = f(x)* по отрезку *[a;b]* и обозначают :**

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx$$

**ТЕОРЕМА.** ***Если функция y = f(x)*** **непрерывна на отрезке [*a;b*]. то справедлива формула**

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

**Формула Ньютона - Лейбница**

**где *F(x) – первообразная для функции y = f(x)***

На практике вместо записи $F(b) - F(a)$ используют $F(x)\Big|_a^b$

эту запись называют ***двойной подстановкой***

# *Формула Ньютона - Лейбница*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$$

**Вычислить определенный интеграл, значит:**

1) **найти первообразную подынтегральной функции *y = f(x);***
2) **выполнить двойную подстановку**

**Пример 1.** **Вычислить определенный интеграл**

$$\int_0^1 e^{2x+1}dx$$

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

**Решение:**

$$\int_0^1 e^{2x+1}dx = \frac{1}{2}e^{2x+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(e^{2\cdot1+1} - e^{2\cdot0+1}\right) = \frac{1}{2}\left(e^3 - e\right)$$

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

**Пример 2.** **Вычислить определенный интеграл**

$$\int_{-1}^{1}\frac{4x^7-6x^6-x^4+1}{x^4}dx$$

**Решение:**

$$\int_{-1}^{1}\frac{4x^7-6x^6-x^4+1}{x^4}dx=\int_{-1}^{1}\left(\frac{4x^7}{x^4}-\frac{6x^6}{x^4}-\frac{x^4}{x^4}+\frac{1}{x^4}\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(4x^3-6x^2-1+x^{-4}\right)dx$$

$$=4\int_{-1}^{1}x^3dx-6\int_{-1}^{1}x^2dx-\int_{-1}^{1}dx+\int_{-1}^{1}x^{-4}dx=\frac{4x^4}{4}\Big|_{-1}^{1}-\frac{6x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}-\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1}-\frac{x^{-3}}{3}\Big|_{-1}^{1}=$$

$$=\left(1^4-(-1)^4\right)-2\left(1^3-(-1)^3\right)-\frac{1}{2}\left(1^2-(-1)^2\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1^3}-\frac{1}{(-1)^3}\right)=$$

$$=0-4-0-\frac{1}{3}\cdot 2=-6\frac{2}{3}$$