



## Натуральные, целые и рациональные числа

Множество натуральных чисел  $\mathbf{N}$  обладает следующими свойствами:

1.  $1 \in \mathbf{N}$ .

2.  $\forall n \in \mathbf{N} \Rightarrow n + 1 \in \mathbf{N}$ .

3.  $\forall n \in \mathbf{N}: n > 1 \Rightarrow n - 1 \in \mathbf{N}$ .

4. (аксиома индукции)

$\forall M \subset \mathbf{N}$ :

а)  $1 \in M$ ;

б)  $\forall n \in M \Rightarrow n + 1 \in M$

$\Rightarrow M \equiv \mathbf{N}$ .

Множество целых чисел:

$\forall m, n \in \mathbf{N} \Rightarrow m - n \in \mathbf{Z}$ .

Множество рациональных чисел:

$\forall m, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0 \Rightarrow \frac{m}{n} \in \mathbf{Q} \left( p \neq 0 \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{m \cdot p}{n \cdot p} \right)$

$\frac{1}{7} = 0,(142857) \quad \frac{1}{2} = \begin{cases} 0,5(0) \\ 0,4(9) \end{cases}$

..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...

$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \dots$

1.  $0, a_1 a_2 a_3 \dots$

2.  $0, b_1 b_2 b_3 \dots$

3.  $0, c_1 c_2 c_3 \dots$

$\dots$   
 $0, \overline{a_1 b_2 c_3} \dots$

## Вещественные числа

### Аксиомы сложения

1.  $\forall a, b \in \mathbf{R} \exists! a + b \in \mathbf{R}$  (сумма).
2.  $\forall a, b \in \mathbf{R} a + b = b + a$  (коммутативность).
3.  $\forall a, b, c \in \mathbf{R} (a + b) + c = a + (b + c)$  (ассоциативность).
4.  $\exists! 0: \forall a \in \mathbf{R} a + 0 = a$ .
5.  $\forall a \in \mathbf{R} \exists! b \in \mathbf{R}: a + b = 0$  (противоположное число;  $b = -a$ ).

### Аксиомы умножения

1.  $\forall a, b \in \mathbf{R} \exists! a \cdot b \in \mathbf{R}$  (произведение).
2.  $\forall a, b \in \mathbf{R} a \cdot b = b \cdot a$  (коммутативность).
3.  $\forall a, b, c \in \mathbf{R} (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$  (ассоциативность).
4.  $\exists! 1: \forall a \in \mathbf{R} a \cdot 1 = a$ .
5.  $\forall a \in \mathbf{R} \exists! b \in \mathbf{R}: a \cdot b = 1$  (обратное число)
6.  $\forall a, b, c \in \mathbf{R} a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$  (дистрибутивность).

### Следствия из аксиом сложения и умножения

1.  $\forall a, b \in \mathbf{R} \exists! x: a + x = b$  (разность;  $x = b - a$ ).
2.  $\forall a, b \in \mathbf{R} \exists! x: a \cdot x = b$  (частное;  $x = b / a$ ).

...

### Аксиомы порядка

1.  $\forall a, b \in \mathbf{R}$  имеет место одно и только одно из трёх соотношений:

$a < b$  или  $a = b$  или  $a > b$ .

2.  $\forall a, b, c \in \mathbf{R}: a < b, b < c \Rightarrow a < c$  (транзитивность).
3.  $\forall a, b, c \in \mathbf{R}: a < b \Rightarrow a + c < b + c$ .
4.  $\forall a, b, c \in \mathbf{R}: a < b, c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$ .

Аксиома непрерывности (принцип Дедекинда)

Пусть множество  $\mathbf{R}$  разделено на два класса  $K_1$  и  $K_2$ :

а) классы  $K_1$  и  $K_2$  не пусты;

б) каждое действительное число относится к одному классу;

в)  $\forall a: a \in K_1$  и  $a < b \Rightarrow b \in K_2$ .

Тогда  $\exists! s \in \mathbf{R}$ :

$a < s \Rightarrow a \in K_1$

$b > s \Rightarrow b \in K_2$ .

Такое число  $s$  называется *сечением* множества действительных чисел и является либо наибольшим в классе  $K_1$  либо наименьшим в классе  $K_2$ .

## Абсолютная величина (модуль) числа

Число  $|x|$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , удовлетворяющее соотношению

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$$

называется *абсолютной величиной* числа  $x$ .  $(|x| = \sqrt{x^2})$

$\forall x, y \in \mathbf{R}$

1.  $|x| \geq 0, |-x| = |x|, x \leq |x|.$

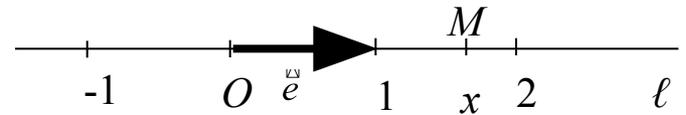
2.  $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

3.  $|x + y| \leq |x| + |y|$  (неравенство треугольника)  $\left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|.$

4.  $||x| - |y|| \leq |x - y|.$

## Геометрическое изображение действительных чисел

Если на прямой  $\ell$  заданием точки  $O$  и единичного вектора



то каждая точка  $M$  прямой  $\ell$  однозначно определяется своей координатой  $x$ .

Таким образом, каждой точке  $M$  прямой  $\ell$  соответствует одно действительное число  $x$ , и наоборот: каждому действительному числу  $x$  соответствует одна точка  $M$  прямой  $\ell$ .

Прямая  $\ell$  называется *числовой прямой* (*числовой осью*).

Таким образом, точки прямой  $\ell$  и соответствующие им действительные числа могут употребляться равнозначно.

Говорят также, что между множеством точек числовой прямой и множеством действительных чисел установлено взаимно однозначное соответствие.

При этом говорят, что *точка  $a$  лежит правее  $b$*  ( *$b$  лежит левее  $a$* ) в случае, если  $a < b$ .

В частности, отрицательные числа  $x$  лежат левее нулевой точки  $O$  (на расстоянии  $|x|$  от неё), а положительные — правее этой точки.

## Множества в $\mathbf{R}$

Множество  $X$  называется *конечным*, если оно либо пустое, либо найдётся такое натуральное  $n$ , что между элементами множества  $X$  и натуральными числами  $1, 2, \dots, n$  существует взаимно однозначное соответствие.

В противном случае множество  $X$  называется *бесконечным*.

Бесконечное множество  $X$  называется *счётным*, если существует взаимно однозначное отображение множества  $X$  на  $\mathbf{N}$ .

Конечное или бесконечное счётное множество называется *не более чем счётным*.

Множество точек числовой прямой  $\mathbf{R}$  называется *числовым*.

Любое из чисел этого множества обозначим через  $x$ ; само такое множество будем обозначать  $X = \{x\}$ .

Множество  $X$  называется *ограниченным сверху (снизу)* если  $\exists M(m): x \leq M (\geq m) \forall x \in X$ .

Такое число  $M(m)$  называется *верхней (нижней) границей*.

Множество  $X$  называется *ограниченным*, если оно ограничено сверху и снизу.

Если числовое множество неограниченно сверху (снизу), то за его верхнюю (нижнюю) границу принимают «*несобственное число*»

$$+\infty \text{ (} -\infty \text{)}.$$

Относительно этих «несобственных» или «бесконечных» чисел будем считать, что  $\forall x \in \mathbf{R}$

$$-\infty < x < +\infty.$$

Если множество  $X$  имеет своей верхней границей число  $M$ , то его верхней границей будет также любое, больше  $M$  число. Наименьшая из всех верхних границ называется *точной верхней границей (верхней гранью)* множества  $X$  и обозначается  $\sup(X)$ .

Аналогично, если множество ограничено снизу, то наибольшую из всех его нижних границ называют *точной нижней границей (нижней гранью)* и обозначают  $\inf(X)$ .

**Теорема.** Если множество  $X = \{x\}$  ограничено сверху (снизу), то оно имеет и точную верхнюю (нижнюю) границу.

*Доказательство.* 1. Если среди чисел множества  $X$  найдется наибольшее, то оно, очевидно, и будет точной верхней границей.

2. Если такого числа нет, то рассмотрим сечение множества  $\mathbf{R}$  на два класса: к верхнему классу  $K_2$  отнесём все верхние границы множества  $X$ , к классу  $K_1$  — все остальные вещественные числа, среди которых будут и все элементы множества  $X$ . Тогда по аксиоме Дедекинда существует число  $s$ , разделяющее эти два класса.

$s \in K_2$ , является в неё наименьшим и больше любого  $x$  из  $K_2$ . Следовательно, оно и будет точной верхней границей множества  $X$ .

Существование точной нижней границы доказывается аналогично.  $\square$

## Понятие последовательности

*Переменная* считается заданной, если указано множество  $X = \{x_i\}$  значений (конечное или бесконечное), которые она может принять.

*Постоянную величину* можно определить и как частный случай переменной, когда множество  $X = \{x\}$  состоит из одного элемента.

Если каждому натуральному числу  $n = 1, 2, \dots$  по некоторому правилу поставлено в соответствие число  $x_n$ , то говорят, что определена *числовая последовательность*

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

или *последовательность*  $\{x_n\}$ , члены или элементы которой занумерованы всеми натуральными числами (индексами) и расположены в порядке возрастания номеров.

Учитывая данное выше определение переменной величины, можно говорить, что переменная  $x_n$  пробегает *последовательность*  $\{x_n\}$  или *последовательность значений*  $x_n$ .

Переменную  $x_n$ , все элементы которой равны одному и тому же числу  $a$ , называют *стационарной* или *постоянной*.

1. Аналитический способ, т.е. при помощи формулы  $n$ -го члена:  $x_n = f(n)$ .

$$x_n = n^2 \quad 1, \quad 4, \quad 9, \quad 16, \quad \dots$$

$$x_n = 1 \quad 1, \quad 1, \quad 1, \quad 1, \quad 1, \quad 1, \quad \dots$$

$$x_n = 1/n \quad 1, \quad 1/2, \quad 1/3, \quad 1/4, \quad \dots$$

$$y_n = (-1)^{n+1} \quad 1, \quad -1, \quad 1, \quad -1, \quad 1, \quad -1, \quad \dots$$

$$z_n = \frac{1 + (-1)^n}{n} \quad 0, \quad 1, \quad 0, \quad 1/2, \quad 0, \quad 1/3, \quad \dots$$

Иногда  $n$ -й член последовательности задается несколькими выражениями, например, формула

$$y_n = \begin{cases} n, & n - \text{простое число,} \\ n^2, & n - \text{составное число,} \end{cases}$$

определяет последовательность 1, 2, 3, 16, 5, 36, 7, 64, 81, 100, 11, ....

2. *Рекуррентный способ*, при котором указывают первый член или несколько первых членов и формулу, позволяющую определить любой член последовательности по известным предшествующим членам.

Например, последовательность 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... может быть задана следующим образом:

$$f_1 = 1, f_2 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n = 3, 4, \dots$$

(числа Фибоначчи)

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right) \quad \left( \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

*Арифметическая прогрессия*

$$a_1 = a, a_n = a_1 + (n - 1)d, n = 2, 3, \dots,$$

где  $a$  и  $d$  — первый член и разность арифметической прогрессии.

*Геометрическая прогрессия*

$$b_1 = b, b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, n = 2, 3, \dots,$$

где  $b$  и  $q$  — первый член и знаменатель геометрической прогрессии ( $b \neq 0$  и  $q \neq 0$ ).

3. *Словесный способ* задания последовательности.

Например, 2, 3, 5, 7, 11, ... — последовательность простых чисел

или 1; 1,4; 1,414; 1,4142; ... — последовательность десятичных приближений по недостатку для  $\sqrt{2}$

Последовательность (переменная)  $\{x_n\}$  считается заданной, если нам известно то или иное правило, по которому может быть вычислено значение любого элемента последовательности, лишь только известен его номер. При этом определяется не только множество значений, которые может принимать такая переменная, но и порядок, в котором эти значения принимаются.

Для разных  $n_1$  и  $n_2$  отдельные элементы  $x_{n_1}$  и  $x_{n_2}$  последовательности могут оказаться равными как числа ( $x_{n_1} = x_{n_2}$ ), но  $x_{n_1}$  и  $x_{n_2}$  рассматриваются как разные элементы последовательности.

## Ограниченные последовательности

Последовательность  $\{x_n\}$  называется *ограниченной сверху* (ограниченной снизу),

если существует число  $M$  (соответственно,  $m$ ) такое, что

$x_n \leq M$  ( $x_n \geq m$ ) для любого натурального  $n$ .

Число  $M$  (соответственно,  $m$ ) называют *верхней границей* (*нижней границей*) последовательности.

Последовательность  $x_n$  называется *ограниченной*, если она ограничена и сверху, и снизу.

Если последовательность ограничена сверху, то она имеет бесконечное количество верхних границ. В самом деле, если  $M$  — верхняя граница последовательности  $\{x_n\}$ , т.е.  $x_n \leq M$  для всех  $n$ , то любое число  $M_1 > M$  также является верхней границей для  $\{x_n\}$ .

Аналогично, ограниченная снизу последовательность имеет бесконечное количество нижних границ.

Геометрический смысл ограниченности последовательности заключается в следующем: если последовательность  $\{x_n\}$  ограничена, причем  $m$  — нижняя, а  $M$  — верхняя граница, то каждый член последовательности  $\{x_n\}$  принадлежит отрезку  $[m, M]$ .

**Теорема 1.** Последовательность  $\{x_n\}$  является ограниченной тогда и только тогда, когда существует число  $r > 0$  такое, что  $|x_n| < r$ .

$\{x_n\}$  ограничена  $\Leftrightarrow \exists r > 0: |x_n| < r$

*Доказательство.*

1.  $\{x_n\}$  ограничена  $\Rightarrow \exists r > 0: |x_n| < r$

Так как  $\{x_n\}$  — ограниченная последовательность, то все ее члены принадлежат отрезку  $[m, M]$ , который всегда можно поместить внутри некоторого интервала  $(-r, r)$ .

Для этого достаточно взять, например,  $r = \max(|m|, |M|) + 1$ .

Тогда любой член последовательности  $x_n$  удовлетворяет неравенству  $-r < x_n < r$  или, что то же самое,  $|x_n| < r$ .

2.  $\{x_n\}$  ограничена  $\Leftarrow \exists r > 0: |x_n| < r$

$-r < x_n < r$ .

Значит, данная последовательность является ограниченной.  $\square$

**Теорема 2.** Свойство ограниченности последовательности (сверху, снизу, с двух сторон) не нарушится, если отбросить конечное число членов последовательности или, наоборот, к данной последовательности добавить некоторое число членов.

*Доказательство.* Если последовательность ограничена, т.е. целиком лежит внутри некоторого интервала  $(-r, r)$ , то последовательность, полученная из данной путем отбрасывания конечного числа членов, лежит внутри того же интервала, т.е. также ограничена.

Если к ограниченной последовательности, лежащей внутри интервала  $(-r, r)$ , добавить конечное число членов  $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}$

то при необходимости всегда можно увеличить заданный интервал  $(-r, r)$  до  $(-R, R)$ ,

положив, к примеру  $R = \max(|r|, |x_{n_1}|, |x_{n_2}|, \dots, |x_{n_k}|) + 1$  так,

чтобы все добавленные члены последовательности оказались внутри расширенного интервала.

Тогда вся новая последовательность будет лежать внутри интервала  $(-R, R)$ , т.е. она также ограничена.  $\square$

## Понятие предела последовательности

Постоянное число  $a$  называется пределом последовательности  $\{x_n\}$ , если для любого положительного, сколь угодно малого числа  $\varepsilon$ , существует натуральное число  $N(\varepsilon)$  такое, что для всех натуральных  $n > N$  выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon. \quad (1)$$

$$a := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) : \forall n > N(\varepsilon) \quad |x_n - a| < \varepsilon$$

Такое определение предела будем называть "определением на языке  $\varepsilon$ - $N$ ".

Тот факт, что число  $a$  является пределом последовательности, записывают так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

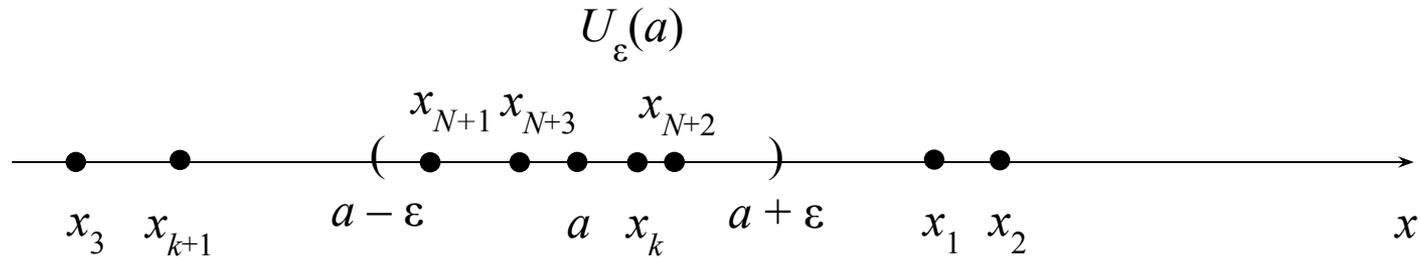
Говорят также, что переменная  $x_n$  стремится к  $a$  или что последовательность  $x_n$  сходится к  $a$ , и пишут  $x_n \rightarrow a$ .

Отметим следующее важное обстоятельство: указанное число  $N$  не является неизменным, заданным раз и навсегда: оно изменяется в зависимости от выбранного числа  $\varepsilon$ . Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, часто пишут  $N(\varepsilon)$ . При уменьшении  $\varepsilon$  соответствующий номер  $N$ , как правило, увеличивается.

Перепишем неравенство (1) как двойное:

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

Интервал  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , содержащий значения  $x$ , удовлетворяющие неравенству  $|x - a| < \varepsilon$ , называется  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $a$



Какой бы малый отрезок длины  $2\varepsilon$  с центром в точке  $a$  ни взять, все точки  $x_n$ , начиная с некоторого номера  $N$ , должны попасть внутрь этого отрезка, так что вне его может остаться лишь конечное число точек с меньшими номерами.

Можно дать следующее определение предела последовательности: число  $a$  есть предел последовательности  $\{x_n\}$ , если значения элементов последовательности, начиная с некоторого номера  $N$ , сколь угодно мало отличаются от  $a$ .

Неравенство (1), где  $\varepsilon$  произвольно, и есть запись утверждения, что  $x_n$  "сколь угодно мало отличаются от  $a$ ", а номер  $N$  как раз и указывает элемент последовательности, начиная с которого это происходит.

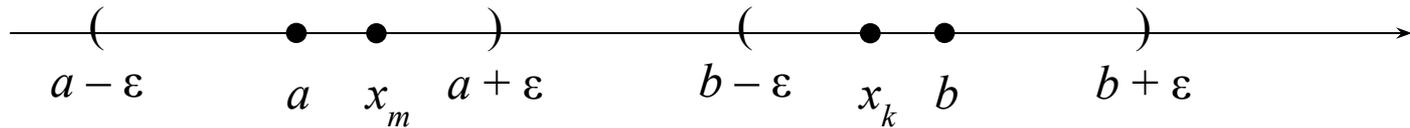
## Теоремы о пределах

**Теорема 3.** Если последовательность  $\{x_n\}$  имеет предел, то он единственный.

*Доказательство.* Проведем доказательство, предполагая обратное (*от противного*).

Пусть последовательность  $\{x_n\}$  имеет два различных предела  $a$  и  $b$  (для определенности положим  $a < b$ ).

Рассмотрим интервалы  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  и  $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ , где  $\varepsilon = (b - a)/3$ .



По определению,  $\exists N_1: \forall m > N_1$  выполняется неравенство  $|x_m - a| < \varepsilon$ .

С другой стороны,  $\exists N_2: \forall k > N_2$  выполняется неравенство  $|x_k - b| < \varepsilon$ .

Но для  $n > N = \max(N_1, N_2)$  значения  $x_n$  должны находиться в обоих указанных интервалах, что невозможно, так как эти интервалы не имеют общих точек (не пересекаются).

Получили противоречие.

□

**Теорема 4.** Если последовательность  $\{x_n\}$  имеет предел, то она ограничена.

*Доказательство.* Пусть  $x_n \rightarrow a$ . Тогда для  $\varepsilon = 1$  должно найтись такое натуральное  $N$ , что

$$|x_n - a| < 1 \text{ для } n > N.$$

Отсюда  $1 > |x_n - a| \geq |x_n| - |a|$  или

$$|x_n| < |a| + 1 \text{ для } n > N.$$

Положим  $M = \max(|a| + 1, |x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|)$ . Тогда, очевидно, что

$$|x_n| \leq M \text{ (} n = 1, 2, \dots \text{),}$$

т.е. последовательность  $\{x_n\}$  ограничена.  $\square$

*Замечание.* Утверждение, обратное теореме 4, вообще говоря, не верно: не всякая ограниченная последовательность имеет предел.

Так, последовательность  $y_n = (-1)^{n+1}$ , очевидно, ограничена ( $|y_n| \leq 1$ ), но предела не имеет: ее элементы попеременно принимают значения 1 и  $-1$ .

**Теорема 5.** (о предельном переходе в неравенстве). Если  $x_n \rightarrow a$  и  $y_n \rightarrow b$  и  $\forall n x_n \leq y_n$ , то  $a \leq b$ .

*Доказательство.* Предположим противное, что  $b < a$ .

Выберем  $\varepsilon > 0$  так, чтобы выполнялось неравенство  $b + \varepsilon < a - \varepsilon$ .

Поскольку  $x_n \rightarrow a$ , то существует такой номер  $N_1$ , что для всех  $n > N_1$  выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon \text{ или, что то же самое}$$

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Аналогично, так как  $y_n \rightarrow b$ , то существует такой номер  $N_2$ , что для всех  $n > N_2$  выполняется

$$\text{неравенство } |y_n - b| < \varepsilon \text{ или, что то же самое}$$

$$b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon.$$

Очевидно, что при всех  $n > N = \max(N_1, N_2)$  должны выполняться оба двойных неравенства.

Поэтому  $y_n < b + \varepsilon < a - \varepsilon < x_n$ , т.е.  $y_n < x_n$ ,

что противоречит условию  $x_n \leq y_n$  для всех  $n$ .

Таким образом, сделанное предположение неверно и, значит,  $a \leq b$ .  $\square$

*Замечание.* Теорема 5 верна только для нестрогих неравенств: из  $x_n < y_n$  не следует, что  $a < b$ , но

все равно, можно утверждать, что  $a \leq b$ . Например, для последовательностей  $x_n = -1/n$ ,  $y_n = 1/n$

для всех  $n$  выполняется строгое неравенство ( $x_n < y_n$ ), но пределы обеих последовательностей

равны 0.

**Теорема 6.** Если последовательности  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  имеют своим пределом одно и то же число  $a$  и последовательность  $\{z_n\}$  такова, что  $x_n \leq z_n \leq y_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), то последовательность  $z_n$  имеет своим пределом также число  $a$ .

*Доказательство.* Задав  $\varepsilon > 0$ , можно найти  $N_1$  и  $N_2$  такие, что

$$a - \varepsilon < x_n \quad (n > N_1) \quad \text{и} \quad y_n < a + \varepsilon \quad (n > N_2),$$

откуда при всех  $n > N = \max(N_1, N_2)$

$$a - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \varepsilon \quad (n > N),$$

следовательно

$$|z_n - a| < \varepsilon \quad (n > N). \quad \square$$

1. Пусть  $x_n \rightarrow a$  и  $a > p$ . Тогда, начиная с некоторого  $N$ ,  $x_n > p$ .

$$(\dots > 0 \dots > 0)$$

**Пример 1.** Пусть  $x_n = \frac{1}{n}$ . Доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

*Решение.* Здесь  $a = 0$ .

По определению, для произвольного  $\varepsilon$  имеем неравенство  $|x_n - 0| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ .

Оно верно для всех  $n > \frac{1}{\varepsilon}$ , или, точнее, для всех  $n > N$ , где  $N$  таково, что  $N = N(\varepsilon) = \left[ \frac{1}{\varepsilon} \right]$ .

*Замечание.*  $[x]$  — целая часть числа  $x$ , т.е. наибольшее целое, не превосходящее  $x$ . Например,

$$[5,2] = 5;$$

$$[-5,2] = -6.$$

Таким образом, для любого, пусть даже сколь угодно малого  $\varepsilon > 0$  найдется такое натуральное

$N$ , что  $|x_n| < \varepsilon$  для всех  $n > N$ .

*Замечание.* Наряду с последовательностью  $x_n = \frac{1}{n}$  рассмотрим также последовательности

$$y_n = \frac{(-1)^n}{n} \text{ и } z_n = \frac{1 + (-1)^n}{n},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$$

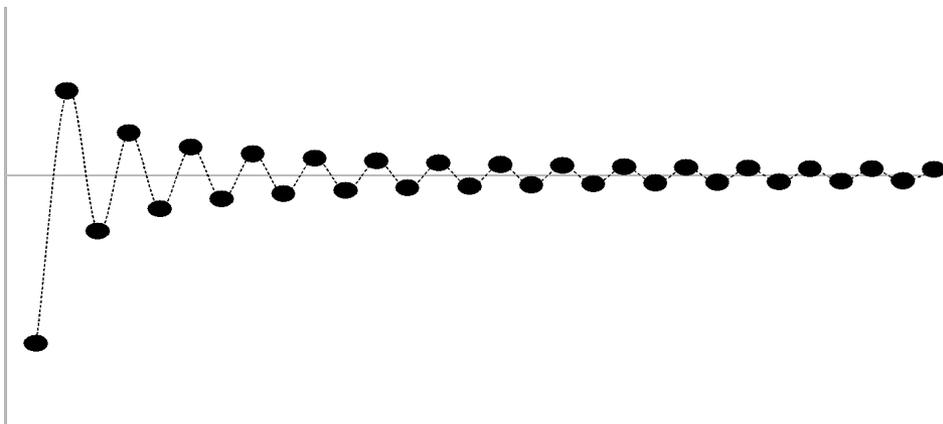
Поскольку  $|z_n| \leq \frac{2}{n} < \varepsilon$ , то  $n > N(\varepsilon) = \left[ \frac{1}{\varepsilon} \right]$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$

Эти примеры интересны тем, что они характеризуют многообразие возможностей, которые охватываются данным выше определением предела последовательности. Несущественно, лежат ли значения переменной с одной стороны от предела или нет; несущественно, принимает переменная в процессе своего изменения предельные значения или нет. Существенно лишь то, о чём говорится в определении: переменная должна отличаться от предела сколь угодно мало в конце концов, в процессе своего изменения, для достаточно далёких своих значений, при этом сама переменная, возможно, никогда не примет предельное значение.

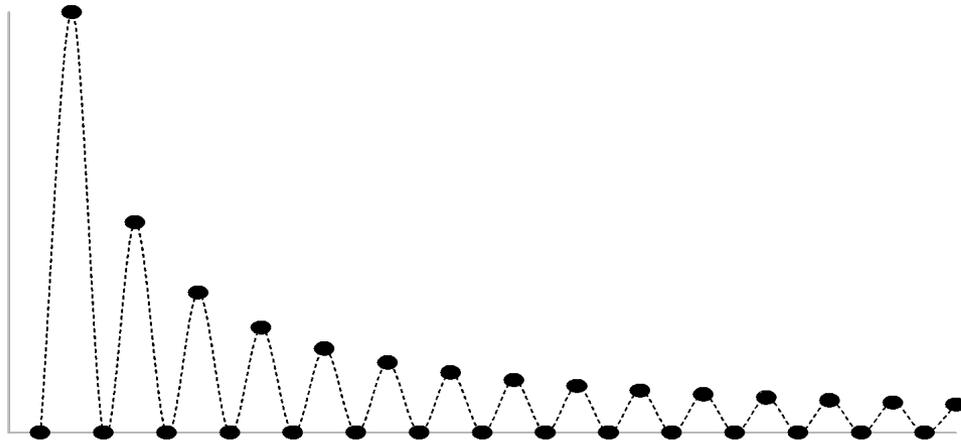
$$x_n = \frac{1}{n}$$



$$y_n = \frac{(-1)^n}{n}$$



$$z_n = \frac{1 + (-1)^n}{n}$$



**Пример 2.** Доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1$

*Решение.* Здесь  $a = 1$ . По определению, как и в предыдущем примере, имеем

$$|x_n - 1| = \left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| = \left| \frac{n-1-n}{n} \right| = \left| -\frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Полагая и здесь  $N = N(\varepsilon) = \left[ \frac{1}{\varepsilon} \right]$ , видим, что последнее неравенство справедливо для всех  $n > N$ .

**Пример 3.** Доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n - 4} = \frac{1}{3}$

*Решение.* Здесь  $a = 1/3$ ,  $x_n - \frac{1}{3} = \frac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n - 4} - \frac{1}{3} = \frac{-5n + 10}{3(3n^2 + 2n - 4)}$

Для  $n > 2$  имеем  $\left| x_n - \frac{1}{3} \right| = \frac{5n - 10}{3(3n^2 + 2n - 4)} < \frac{5n}{3(3n^2 - 4)} < \frac{5n}{3 \cdot 2n^2} < \frac{1}{n}$

$$N = N(\varepsilon) = \left[ \frac{1}{\varepsilon} \right]$$

**Пример 4.**  $x_n = a^{1/n} = \sqrt[n]{a} \rightarrow 1 \quad (a > 1)$

*Решение.*  $|x_n - 1| = a^{1/n} - 1 < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\log_a(1 + \varepsilon)} \Rightarrow N(\varepsilon) = \left[ \frac{1}{\log_a(1 + \varepsilon)} \right]$

# Бесконечно малые и бесконечно большие величины

## 1. Бесконечно малые величины

Переменная  $\alpha_n$ , имеющая своим пределом 0, называется *бесконечно малой величиной*, или просто *бесконечно малой*.

Для бесконечно малой величины неравенство (1) переписывается следующим образом

$$|\alpha_n - 0| = |\alpha_n| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon).$$

Таким образом, данное выше определение бесконечно малой можно сформулировать без упоминания термина "предел": переменная  $\alpha_n$  называется *бесконечно малой*, если она по абсолютной величине, начиная с некоторого номера  $N(\varepsilon)$ , становится **и остается** меньшей сколь угодно малого наперед заданного положительного числа  $\varepsilon$ .

Сделаем следующее замечание относительно бесконечно малых величин: ни одно в отдельности взятое значение этой величины (если оно не нуль) не может квалифицироваться как "малое" — лишь в процессе своего изменения бесконечно малая величина (если она не равна тождественно нулю) способна сделаться меньше  $\varepsilon$ .

Вернемся теперь к общему случаю последовательности  $\{x_n\}$ , имеющей своим пределом число  $a$ . Очевидно, что разность между переменной и ее пределом  $\alpha_n = x_n - a$  есть величина бесконечно малая: в силу (1) имеем

$$|\alpha_n| = |x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon).$$

Обратно, если  $\alpha_n$  есть бесконечно малая, то  $x_n \rightarrow a$ .

Это приводит нас к следующему утверждению:

*для того, чтобы переменная  $x_n$  имела своим пределом число  $a$ , необходимо и достаточно, чтобы*

$$x_n = a + \alpha_n,$$

*где  $\alpha_n$  — бесконечно малая.*

В силу вышесказанного, понятию *предел* можно дать следующее определение, равносильное старому: постоянное число  $a$  есть *предел* последовательности  $\{x_n\}$ , если  $x_n - a$  есть бесконечно малая величина.

**Пример 5.** а) Пусть  $\alpha_n = q^n$ , где  $|q| < 1$ ,  $q \neq 0$ . Доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$

*Решение.* Рассмотрим неравенство  $|\alpha_n| = |q|^n < \varepsilon$ .

Оно равносильно неравенству  $n \cdot \lg|q| < \lg\varepsilon$  или  $n > \frac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}$

$$\text{Полагая } N = N(\varepsilon) = \left[ \frac{\lg\varepsilon}{\lg|q|} \right],$$

видим, что последнее неравенство выполняется для всех  $n > N$ , что и доказывает наше утверждение.

б) Аналогично доказывается, что последовательность  $\beta_n = Aq^n$ , где  $A$  — постоянное число и  $|q| < 1$  также имеет своим пределом 0.

в) Вывести формулу для вычисления суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии  $b, bq, bq^2, \dots, bq^{n-1}, \dots$  ( $|q| < 1$ ).

*Решение.*

$$S_n = \frac{b - bq^n}{1 - q} = \frac{b}{1 - q} - \frac{b}{1 - q} q^n$$

$$\text{Поскольку при } n \rightarrow \infty \quad -\frac{b}{1 - q} q^n \rightarrow 0 \quad \Rightarrow S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b}{1 - q}$$

## 2. СВОЙСТВА БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ

В следующих теоремах (7 — 10) нам придется рассматривать выполнение арифметических операций над последовательностями.

Итак, пусть даны последовательности  $\{x_n\}$ ,  $\{y_n\}$ .

Суммой двух последовательностей будем называть последовательность  $\{x_n + y_n\}$ , элементы которой принимают значения

$$x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n, \dots$$

Аналогично определяются *разность*  $\{x_n - y_n\}$ , *произведение*  $\{x_n \cdot y_n\}$  и *частное*  $\{x_n / y_n\}$  двух последовательностей, причем в случае частного предполагается  $y_n \neq 0$ .

**Теорема 7.** Сумма любого конечного числа бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.

*Доказательство* проведем для случая двух бесконечно малых  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  (в общем случае доказательство аналогично).

Пусть дано произвольное число  $\varepsilon > 0$ . По определению, для бесконечно малой  $\alpha_n$  найдется такое число  $N_1$ , что для всех  $n > N_1$  будет выполняться неравенство

$$|\alpha_n| < \varepsilon/2.$$

Аналогично, для бесконечно малой  $\beta_n$  найдется такое число  $N_2$ , что для всех  $n > N_2$  будет

$$|\beta_n| < \varepsilon/2.$$

Очевидно, что при всех  $n > N = \max(N_1, N_2)$  должны выполняться оба неравенства:

$$|\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Итак, величина  $\alpha_n + \beta_n$  действительно является бесконечно малой.  $\square$

**Теорема 8.** Произведение ограниченной переменной  $x_n$  на бесконечно малую  $\alpha_n$  есть величина бесконечно малая:  $x_n \cdot \alpha_n \rightarrow 0$ .

*Доказательство.* Пусть для всех значений  $n$  выполняется  $|x_n| \leq M$ .

Если задано произвольное число  $\varepsilon > 0$ , то по числу  $\frac{\varepsilon}{M}$

для бесконечно малой  $\alpha_n$  найдется такое число  $N$ , что для всех  $n > N$  будет выполняться неравенство  $|\alpha_n| \leq \frac{\varepsilon}{M}$ .

Тогда для тех же значений  $n$ , очевидно,  $|x_n \alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$

Следовательно,  $x_n \cdot \alpha_n$  есть бесконечно малая.  $\square$

**Следствие.** Произведение постоянной на бесконечно малую есть величина бесконечно малая.

### 3. БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ВЕЛИЧИНЫ

Бесконечно малым величинам, в некотором смысле, противопоставляются бесконечно большие величины.

Переменная  $x_n$  называется *бесконечно большой величиной* (или просто *бесконечно большой*), если она по абсолютной величине становится и остается больше сколь угодно большого наперед заданного числа  $\varepsilon > 0$ , начиная с некоторого номера  $N(\varepsilon)$ :

$$|x_n| > \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon).$$

Как и в случае бесконечно малых, здесь также следует отметить, что ни одно в отдельности взятое значение бесконечно большой величины не может квалифицироваться как "большое" — мы и здесь имеем дело с переменной, которая лишь в процессе своего изменения способна сделаться большей произвольно взятого числа  $\varepsilon$ .

Если переменная  $x_n$  является бесконечно большой, и, по крайней мере, для больших  $n$  сохраняет определенный знак (+ или −), то, в соответствии со знаком, говорят, что переменная  $x_n$  имеет предел  $+\infty$  или  $-\infty$ . Записывается это следующим образом:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty, \quad x_n \rightarrow +\infty \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty, \quad x_n \rightarrow -\infty$$

**Пример.** Примерами бесконечно больших могут служить переменные

$$x_n = n, \quad y_n = -n, \quad z_n = (-1)^{n+1}n,$$

которые пробегают ряд натуральных чисел, но первая — со знаком "плюс", вторая — со знаком "минус", третья — с чередующимися знаками.

Очевидно, что при  $n \rightarrow \infty$  переменная  $x_n \rightarrow +\infty$ ,  $y_n \rightarrow -\infty$ ,

про третью переменную  $z_n$  нельзя сказать ни что она стремится к  $+\infty$ , ни что она стремится к  $-\infty$ .

Связь между бесконечно большими и бесконечно малыми величинами выражается следующей теоремой, которую примем без доказательства.

**Теорема 9.** Справедливы следующие утверждения:

а) Если переменная  $x_n$  является бесконечно большой, то ее обратная величина  $\alpha_n = \frac{1}{x_n}$  является бесконечно малой.

б) Наоборот, если переменная  $\alpha_n$ , не обращающаяся в 0, является бесконечно малой, то обратная к ней величина  $x_n = \frac{1}{\alpha_n}$  будет бесконечно большой.

в) Отношение ограниченной переменной  $y_n$  к бесконечно большой  $x_n$  есть величина бесконечно малая:  $\frac{y_n}{x_n} \rightarrow 0$

г) Пусть переменная  $y_n$  ограничена снизу положительным числом, а  $x_n$  — бесконечно малая. Тогда  $\frac{y_n}{x_n}$  есть бесконечно большая:  $\frac{y_n}{x_n} \rightarrow \infty$

**Следствие.** Утверждения пунктов в) и г) не изменятся, если  $y_n$  есть величина постоянная.

## Понятие о неопределенных выражениях

Пока отложим обсуждение вопросов, связанных с вычислением пределов следующих соотношений:

- а)  $\frac{x_n}{y_n}$ , когда **обе** последовательности одновременно имеют своим пределом либо 0 (в том числе и **частное!**), либо  $\infty$  (того или иного знака);
- б)  $x_n - y_n$ , когда **обе** последовательности одновременно имеют своим пределом бесконечность (того или иного знака);
- в)  $x_n \cdot y_n$ , когда одна из последовательностей имеет своим пределом 0, а другая — бесконечность, ограничившись следующими замечаниями.

Предел любого из указанных соотношений (со сделанными оговорками относительно входящих в них последовательностей), в зависимости от правила, по которому определяется каждая из последовательностей, может быть равен как числу, конечному или бесконечному, так и вообще не существовать.

Во всех указанных в пунктах а) — в) случаях говорят, что речь идет о *неопределенных выражениях* или *неопределенностях*, а именно:

а) *неопределенность вида*  $\frac{0}{0}$  в случае, когда обе последовательности имеют своим пределом 0

и *неопределенность вида*  $\frac{\infty}{\infty}$ , когда обе последовательности имеют своим пределом бесконечность;

б) *неопределенность вида*  $\infty - \infty$ , когда обе последовательности имеют своим пределом бесконечность;

в) *неопределенность вида*  $0 \cdot \infty$ , когда одна из последовательностей стремится к нулю, а другая — к бесконечности

Повторим, что во всех этих случаях нам придется, учитывая правило, определяющее каждую из последовательностей, исследовать каждое такое выражение. Подобное исследование называется *раскрытие неопределенностей*.

## Арифметические операции с пределами

Следующая теорема упрощает вычисление пределов: благодаря этой теореме не обязательно всякий раз обращаться к определению предела для его вычисления, как это делалось в ряде приведенных выше примеров.

**Теорема 1.10.** Если последовательности  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  имеют конечные пределы:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$$

то справедливы следующие утверждения:

а) их сумма (разность) также имеет конечный предел, причем  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \pm b$

б) их произведение имеет конечный предел, причем  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \cdot b$

в) их частное (в предположении  $y_n \neq 0$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$ ) имеет конечный предел, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = \frac{a}{b}$$

*Доказательство.* Из условия теоремы и определения предела на языке "бесконечно малых" следует, что

$$x_n = a + \alpha_n, y_n = b + \beta_n. \quad (2)$$

а) Исходя из этих равенств, можем записать

$$x_n \pm y_n = (a \pm b) + (\alpha_n \pm \beta_n).$$

По теореме 7  $\alpha_n \pm \beta_n$  есть величина бесконечно малая, следовательно, пользуясь определением предела на языке "бесконечно малых", можем утверждать, что последовательность  $\{x_n \pm y_n\}$  имеет предел  $a \pm b$ , что и требовалось доказать.

б) Используя и в этом случае равенства (2), имеем

$$x_n \cdot y_n = a \cdot b + (a \cdot \alpha_n + b \cdot \beta_n + \alpha_n \cdot \beta_n).$$

По теоремам 7 и 8, выражение, стоящее в скобках, есть величина бесконечно малая, следовательно, последовательность  $\{x_n \cdot y_n\}$  имеет своим пределом число  $a \cdot b$ .

в) Исходя, по-прежнему, из равенств (2), получаем

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{b \cdot y_n} (b \cdot \alpha_n - a \cdot \beta_n)$$

Выражение в скобках, в силу теорем 7 и 8, есть величина бесконечно малая, множитель при нем есть величина ограниченная (убедитесь в этом самостоятельно). Следовательно, по теореме 8, все произведение, стоящее в правой части последнего равенства есть величина бесконечно малая.

Эта бесконечно малая определяет разность между последовательностью

$$\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\} \text{ и числом } \frac{a}{b}, \text{ следовательно, } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{a}{b} \quad \square$$

**Следствие.** Утверждение пункта б) не изменится, если переменная  $y_n$  есть величина постоянная

$$(y_n = c \text{ для } n = 1, 2, \dots): \lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot x_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c \cdot a$$

**Пример 8.** Вычислить  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 5n + 4}{2n^2 - 3n + 7}$

*Решение.* Многочлены, стоящие в числителе и знаменателе дроби имеют своим пределом  $\infty$ , а сама дробь представляет собой неопределенное выражение вида  $\frac{\infty}{\infty}$

Избавимся от неопределенности, разделив почленно числитель и знаменатель  $n$ -го члена заданной прогрессии на  $n$  в наивысшей из имеющихся в числителе и знаменателе степеней, т.е. на  $n^2$ :

$$\frac{n^2 - 5n + 4}{2n^2 - 3n + 7} = \frac{1 - \frac{5}{n} + \frac{4}{n^2}}{2 - \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2}}$$

Следовательно, по теореме 10:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 5n + 4}{2n^2 - 3n + 7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{5}{n} + \frac{4}{n^2}}{2 - \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

## Предел монотонной последовательности

Последовательность  $\{x_n\}$  называется *возрастающей*, если

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} < \dots$$

Последовательность  $\{x_n\}$  называется *неубывающей*, если

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \dots$$

Последовательность  $\{x_n\}$  называется *убывающей*, если

$$x_1 > x_2 > \dots > x_n > x_{n+1} > \dots$$

Последовательность  $\{x_n\}$  называется *невозрастающей*, если

$$x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \dots$$

Последовательности указанных типов имеют общее название *монотонные*.

Обычно о последовательности говорят, что она "монотонно возрастает" или "монотонно убывает".

Вопрос о существовании предела монотонной последовательности исчерпывается следующей теоремой.

**Теорема 11.** Если монотонно возрастающая (хотя бы в широком смысле) последовательность ограничена сверху ( $x_n \leq M \forall n$ ), то она имеет конечный предел; в противном случае — стремится к  $+\infty$ .

*Доказательство.* Допустим, что данная последовательность ограничена сверху.

Тогда для множества ее значений существует конечная точная верхняя граница:

$$a = \sup(x_n).$$

Покажем, что это число  $a$  и есть предел нашей последовательности.

Во-первых, для всех значений  $n$  будет  $x_n \leq a$  и,

во-вторых, какое бы ни взять  $\varepsilon > 0$ , всегда найдется такой номер  $N$ , что  $x_N > a - \varepsilon$ .

Так как, по условию теоремы, данная нам последовательность монотонно возрастает,

при  $n > N$  будет  $x_n \geq x_N$ , т.е.  $x_n > a - \varepsilon$ , то при указанных значениях  $n$  выполняются неравенства

$$0 \leq a - x_n < \varepsilon \text{ или } |x_n - a| < \varepsilon,$$

откуда и следует, что  $\lim x_n = a$ .

Пусть теперь  $\{x_n\}$  не ограничена сверху.

Тогда  $\forall E > 0 \exists x_N > E$  и при  $n > N$  тем более будет  $x_n > E$ , что и означает  $\lim x_n = +\infty$ .  $\square$

**Теорема 11'.** Монотонно убывающая последовательность ограничена снизу, то она имеет конечный предел, в противном случае — стремится к  $-\infty$ .

*Доказательство.* Аналогично предыдущему.  $\square$

**Пример.**  $x_1 = \sqrt{c}$ ,  $x_2 = \sqrt{c + \sqrt{c}}$ ,  $x_3 = \sqrt{c + \sqrt{c + \sqrt{c}}}$ , ...,  $x_n = \sqrt{c + \sqrt{c + \sqrt{c + \dots + \sqrt{c}}}}$ ,  
n корней

$$x_{n+1} = \sqrt{c + x_n}. \quad (*)$$

Очевидно, что  $x_n$  монотонно возрастает.

Покажем, что  $x_n$  ограничена сверху, например, числом  $\sqrt{c} + 1$ .

$$x_1 = \sqrt{c} < \sqrt{c} + 1$$

Допустим, что  $x_n < \sqrt{c} + 1$ .

$$x_{n+1} = \sqrt{c + x_n} < \sqrt{c + \sqrt{c} + 1} < \sqrt{c + 2\sqrt{c} + 1} < \sqrt{c} + 1$$

$\Rightarrow$  по доказанному,  $x_n$  имеет предел:  $\lim x_n = a$ .

Выполним в (\*) предельный переход:

$$a = \sqrt{c + a}$$

$$a^2 = c + a$$

$$a = \frac{1 + \sqrt{4c + 1}}{2}$$

**Пример.** Пусть  $0 < x_0 < 1$  и

$$x_{n+1} = x_n(2 - x_n)(*)$$

Рассуждая по индукции, допустим, что  $0 < x_n < 1$  и покажем, что  $0 < x_n < x_{n+1} < 1$ .

Т.к.  $2 - x_n > 1$ , то  $x_{n+1} > x_n$ .

Но  $x_n(2 - x_n) = 1 - (1 - x_n)^2$ , откуда  $x_{n+1} < 1$ .

Выполняя в (\*) предельный переход,

$$[\lim x_n = a, a = a(2 - a)]$$

получим  $\lim x_n = 1$ .

*Замечание.* Пусть  $c > 0$  и в (\*)  $x_n = c \cdot y_n$ .

Тогда (\*) переписывается как  $y_{n+1} = y_n(2 - c \cdot y_n)$ .

Положив  $0 < y_0 < \frac{1}{c}$ , получим  $y_n \rightarrow \frac{1}{c}$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + b^n$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} \cdot \frac{1}{n^k} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \cdot \frac{1}{n^n}$$

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

$$x_{n+1} : \frac{s}{n} \rightarrow \frac{s}{n+1} \Rightarrow \left(1 - \frac{s}{n}\right) < \left(1 - \frac{s}{n+1}\right) \Rightarrow x_n < x_{n+1}$$

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} = y_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 3$$

$n = 0 :$					
$n = 1 :$		1	1		
$n = 2 :$		1	2	1	
$n = 3 :$	1	3	3	1	
$n = 4 :$	1	4	6	4	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$x_n < y_n < e \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = e \Rightarrow e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots \Rightarrow e \approx 2,71828 18284 59045 \dots$$

## Лемма о вложенных промежутках

Пусть даны монотонно возрастающая последовательность  $x_n$  и монотонно убывающая  $y_n$ , причём

$$x_n < y_n \quad \forall n$$

Если  $y_n - x_n \rightarrow 0$ , то обе последовательности имеют общий предел

$$\lim x_n = \lim y_n = c.$$

*Доказательство.* Поскольку  $x_n < y_n < y_1 \quad \forall n$ , то возрастающая последовательность  $x_n$  оказывается ограниченной сверху, следовательно, имеет предел  $\lim x_n = c$ .

С другой стороны,  $x_1 < x_n < y_n, y_n$  — убывающая, ограниченная снизу последовательность и  $\lim y_n = c'$ .

Но  $\lim(x_n - y_n) = 0 \Rightarrow c = c'$ .  $\square$

Пусть имеется бесконечная последовательность вложенных один в другой промежутков

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset$$

причем при  $n \rightarrow \infty \lim(b_n - a_n) = 0$ .

Тогда концы  $a_n, b_n$  обоих промежутков стремятся к общему пределу

$$\lim a_n = \lim b_n = c,$$

который представляет собой единственную точку, общую для всех промежутков.

Наряду с последовательностью  $\{x_n\}$  рассмотрим какую-нибудь извлеченную из неё частичную последовательность (подпоследовательность)

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots,$$

где  $\{n_k\}$  сама есть некоторая последовательность возрастающих натуральных чисел:

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < n_{k+1} < \dots$$

Если последовательность  $\{x_n\}$  имеет определённый предел (конечный или нет), то тот же предел имеет и выделенная из неё подпоследовательность.

### **Теорема 12 (Больцано-Вейерштрасса)**

Из любой ограниченной последовательности всегда можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к конечному пределу.

*Доказательство.* Пусть  $\forall n x_n \in [a_1, b_1]$ .

Разобьем  $[a_1, b_1]$  пополам. Тогда хотя бы в одной половине отрезка  $[a_2, b_2]$  будет содержаться бесконечное множество элементов данной последовательности.

Делим  $[a_2, b_2]$  пополам и опять выбираем половину  $[a_3, b_3]$ , содержащую бесконечное множество элементов последовательности и так далее.

При этом  $b_k - a_k = \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}} \rightarrow 0 \Rightarrow \exists c = \lim a_k = \lim b_k$

$x_{n_1} = x_1, x_{n_2}$  — первый (с наименьшим номером) член последовательности, содержащийся в  $[a_2, b_2]$  и т.д.

$$a_k \leq x_{n_k} \leq b_k \Rightarrow c = \lim x_{n_k} \quad \square$$

## Критерий сходимости последовательности (критерий Коши)

### Теорема 13.

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall n, m > N(\varepsilon) |x_n - x_m| < \varepsilon$$

*Доказательство.*

1. Необходимость ( $\Rightarrow$ ).

Пусть  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a < \infty$ .

Это означает, что  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m > N \quad |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad |a - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) + (a - x_m)| \leq |x_n - a| + |a - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

2. Достаточность ( $\Leftarrow$ ).

$$\varepsilon = 1 \exists N : \forall n, m > N \quad 1 > |x_n - x_m| \geq |x_n| - |x_m|$$

Зафиксируем  $m$ , а вместе с ним и  $x_m$ . Тогда  $|x_n| \leq 1 + |x_m| \Rightarrow \{x_n\}$  — ограничена,  $\Rightarrow x_{n_k} \rightarrow a$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall n, n_k > N(\varepsilon) \quad |x_n - x_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|x_n - a| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - a)| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \square$$

Критерий Коши может быть сформулирован следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall n > N(\varepsilon) \forall p \in \mathbf{N} \quad |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$$