§2. Комплексные числа

п.1. Основные понятия.

$$x^2 = -1$$

Комплексным числом называется выражение вида

$$z = x + iy,$$

где $x, y \in \mathbf{R}$,

i — мнимая единица, $i^2 = -1.$

$\mathbf{C}$ — множество комплексных чисел.

Замечание 1.

Если $x = 0$, то число $z = iy$ называется чисто мнимым.

Если $y = 0$, то $z = x \in \mathbf{R}$. Значит, $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.

$x = \operatorname{Re} z$ — действительная часть комплексного числа;

$y = \operatorname{Im} z$ — мнимая часть комплексного числа.

Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части.

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2, \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$$

Замечание 2.

Для комплексных чисел не вводятся понятия «больше» и «меньше».

$$\bar{z} = x - iy$$

— число, комплексно сопряженное к

$$z = x + iy$$

Свойства

1) $\operatorname{Re} z = 0 \Leftrightarrow z = -\bar{z}$

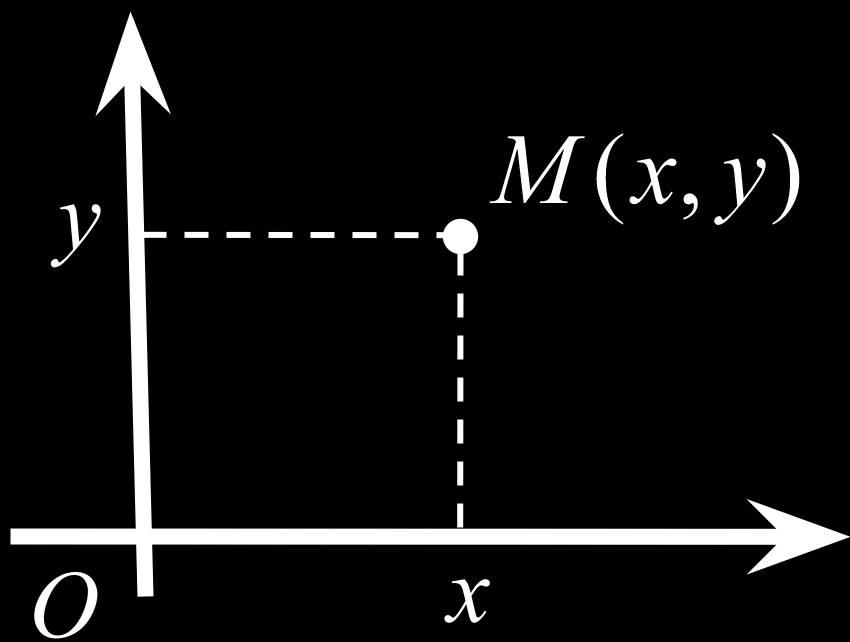
2) $\operatorname{Im} z = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z}$

3) $\overline{(\bar{z})} = z$

4) $\operatorname{Re} z = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$

5) $\operatorname{Im} z = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$

п.2. Модуль и аргумент комплексного числа.



Любое комплексное число z можно изобразить точкой $M(x, y)$, такой, что

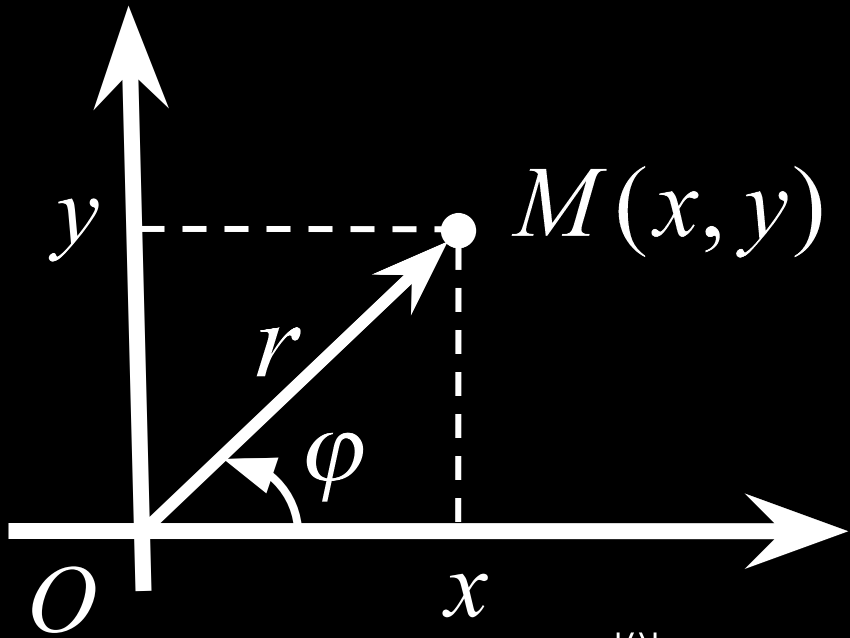
$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Каждую точку $M(x, y)$ можно рассматривать как образ комплексного числа $z = x + iy$.

Плоскость называется комплексной.

Ось Ox — действительной осью.

Ось Oy — мнимой осью.



Любое комплексное число $z = x + iy$ можно изобразить радиус-вектором

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x, y).$$

Длина вектора $\vec{r}$ называется модулем комплексного числа и обозначается

$$|z|, \ r, \ \rho.$$

Угол между положительным направлением действительной оси и вектором $\vec{r}$ называется аргументом и обозначается $\operatorname{Arg} z$.

Значение аргумента, заключенное в границах

$$-\pi < \varphi \le \pi \quad (0 \le \varphi < 2\pi)$$

называют главным значением аргумента, и обозначают $\varphi = \arg z$.

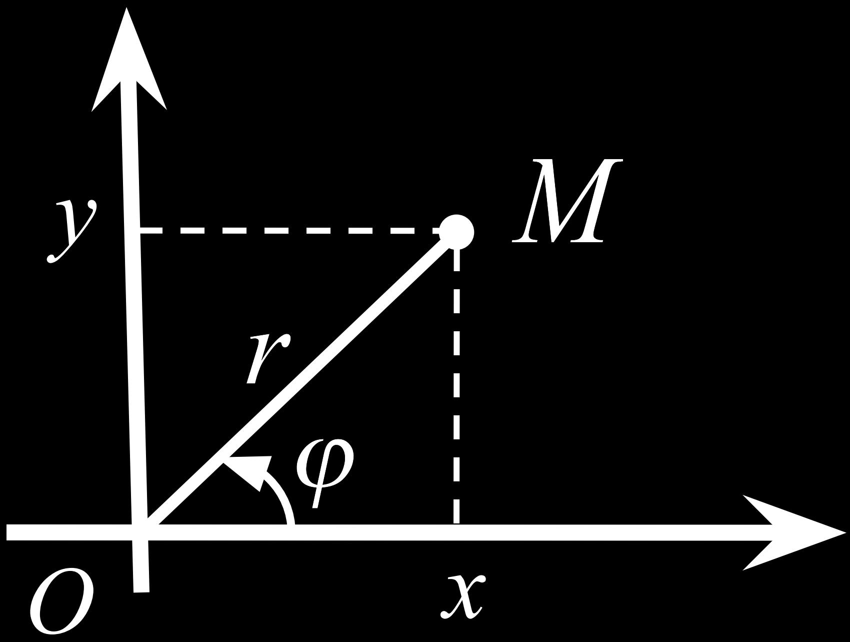
$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$$

Аргумент комплексного числа $z = 0$ не определен.

<u>Замечание 3.</u>

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} |z_1| = |z_2|, \\ \arg z_1 = \arg z_2. \end{cases}$$

Связь между $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ и $|z|, \arg z$.



$x =$

$y =$

$r =$

$\cos\varphi =$ $\sin\varphi =$

Формы записи комплексных чисел

Алгебраическая

$$\boxed{z = x + iy}$$

Тригонометрическая

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$

$$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$$

Показательная (экспоненциальная)

Формула Эйлера: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \ \ \varphi \in \mathbf{R}.$

$$\boxed{z = r\,e^{i\varphi}}$$

Замечание 4. $e^{i\pi} =$

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi$$

Пример 1. Записать комплексное число

$$z = 1 - i$$

в тригонометрической и показательной форме.

Решение. $\operatorname{Re} z =$ $\operatorname{Im} z =$

$$|z| =$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \varphi =$$

$$z =$$

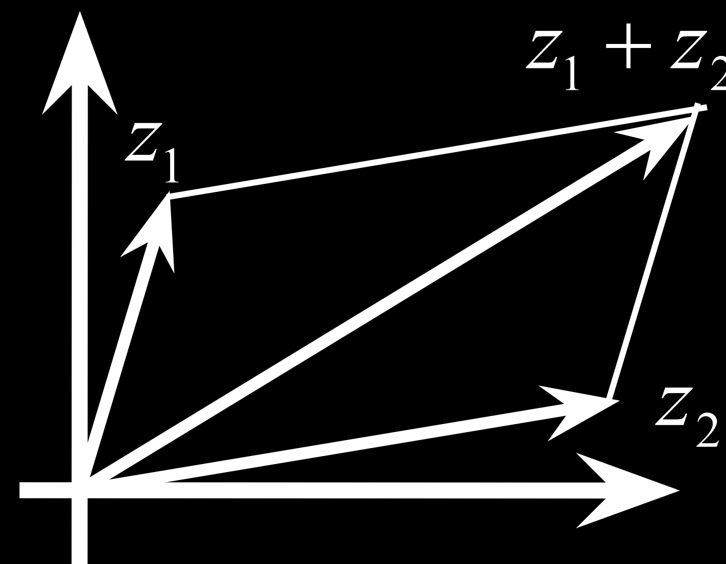
п.3. Действия над комплексными числами.

Пусть

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2.$$

Сложение:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$



Неравенство треугольника:

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

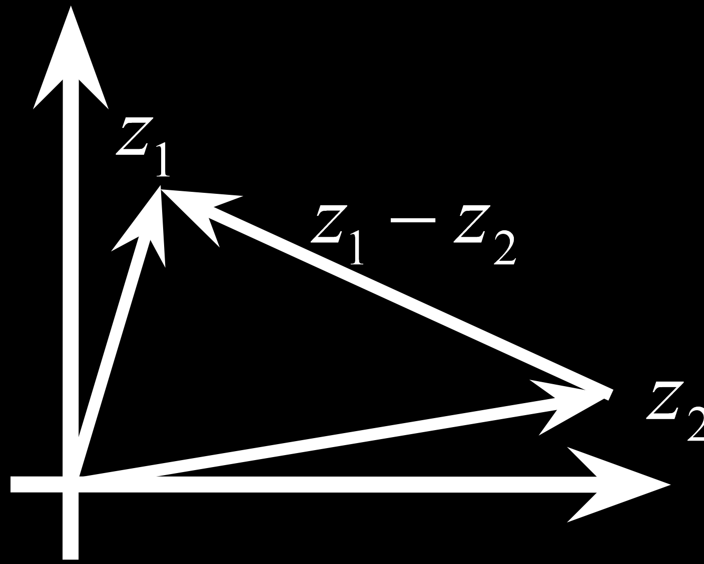
Пример 2. $z_1 = 5 + 2i, \quad z_2 = 3 - i.$

$$z_1 + z_2 =$$

Вычитание:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

$$|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$$



Пример 3.

$$z_1 = 5 + 2i, \quad z_2 = 3 - i.$$

$$z_1 - z_2 =$$

Умножение:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

$$z_1 \cdot z_2 =$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

Пример 4.

$$z_1 = 5 + 2i, \quad z_2 = 3 - i.$$

$$z_1 z_2 =$$

<u>Замечание 5.</u>

$$z \cdot \bar{z} = |\, z\,|^2 .$$

Доказательство.

$$z \cdot \bar{z} =$$

Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме.

Пусть

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Тогда

$$z_1 z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2) =$$

$$= r_1 r_2\big((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\big) =$$

$$= r_1 r_2\big((\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big).$$

$$\boxed{z_1 z_2 = r_1 r_2\big((\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big).}$$

При умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Можно показать, что

$$z_1 z_2 \ldots z_n = r_1 r_2 \ldots r_n \big((\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n)\big).$$

Если

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

то

$$\boxed{z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)}$$

— формула Муавра.

Пример 5. Вычислить

$$(1-i)^{20}.$$

Решение.

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

$$(1-i)^{20} =$$

Деление:
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2+i(y_1x_2-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}=$$

Пример 6.

$$\frac{5+2i}{3-i}=$$

Деление комплексных чисел в тригонометрической форме.

Пусть

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Тогда

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\right),$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right).}$$

При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

Извлечение корня из комплексных чисел

Пусть $n \in \mathbf{N}, n \geq 2.$

Корнем n-й степени из комплексного числа z называется комплексное число w, удовлетворяющее равенству

$$w^n = z.$$

Пусть

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Тогда

$$\rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Учитывая замечание 3, получаем

$$\rho^n = r \quad \Rightarrow$$

$$n\theta = \varphi + 2\pi k,\;\; k \in \mathbf{Z} \quad \Rightarrow$$

Поэтому,

$$\boxed{\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),}$$

$$k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Получили n различных значений корня n-й степени из комплексного числа.

Пример 7. Найти все значения $\sqrt[4]{1}$.

Решение.

Представим комплексное число в $z=1$ тригонометрической форме

$$z=1=$$

Тогда

$$\sqrt[4]{1}=$$

$$k=0: \quad w_0=$$

$$k=1: \quad w_1=$$

$$k = 2: \quad w_2 =$$

$$k = 3: \quad w_3 =$$