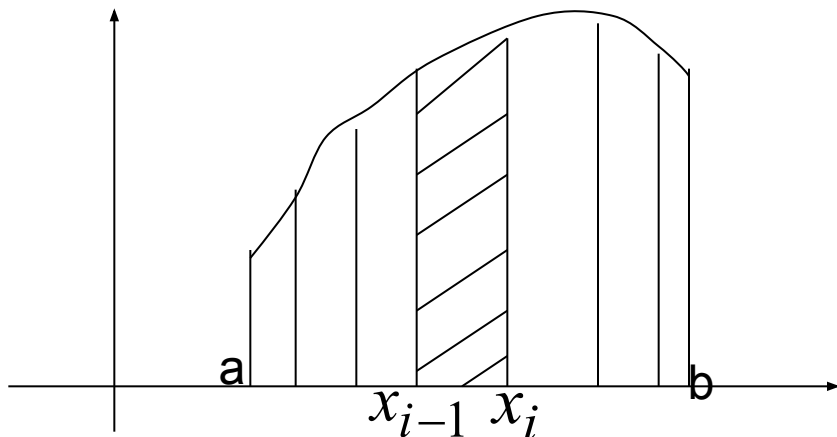


Определенный интеграл

Задача о вычислении площади плоской фигуры

Решим задачу о вычислении площади фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)$, отрезками прямых $x=a$ и $x=b$ и осью Ox . Такую фигуру называют криволинейной трапецией



Задача о вычислении площади плоской фигуры

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей точками $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n = b$. При этом криволинейная трапеция разобьется на n элементарных криволинейных трапеций. Заменяем каждую такую криволинейную трапецию прямоугольником с основанием $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, где $i = 1, 2, \dots, n$ и высотой $h = f(\bar{x}_i)$, где \bar{x}_i - произвольно выбранная внутри отрезка $[x_{i-1}, x_i]$ точка.

Задача о вычислении площади плоской фигуры

Площадь прямоугольника будет равна $\Delta S_i = f(\bar{x}_i) \Delta x_i$, а площадь всей криволинейной фигуры приблизительно будет равна сумме площадей всех прямоугольников:

$$S \approx \sum_{i=1}^n \Delta S_i = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i .$$

Определенный интеграл

Определение.

Выражение $\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i$, где

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, называется

интегральной суммой функции $f(x)$
на отрезке $[a, b]$.

Определенный интеграл

Определение.

Если существует конечный $\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i$, не

зависящий ни от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на части, ни от выбора точек $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$, то этот предел называется определенным интегралом функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и

обозначается $\int_a^b f(x) dx$.

Определенный интеграл

Замечание.

С геометрической точки зрения

при $f(x) \geq 0$ $\int_a^b f(x)dx$ равен

площади криволинейной
трапеции

Теорема о существовании определенного интеграла

Теорема.

Если функция $f(x)$ непрерывна на

отрезке $[a, b]$, то $\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i$

существует и конечен, т.е.

существует и конечен $\int_a^b f(x) dx$.

Свойства определенного интеграла

$$1. \int_a^a f(x) dx = 0 ;$$

$$2. \int_a^b dx = b - a ;$$

$$3. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx ;$$

$$4. \int_a^b [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx ;$$

Свойства определенного интеграла

$$5. \int_a^b Kf(x)dx = K \int_a^b f(x)dx ;$$

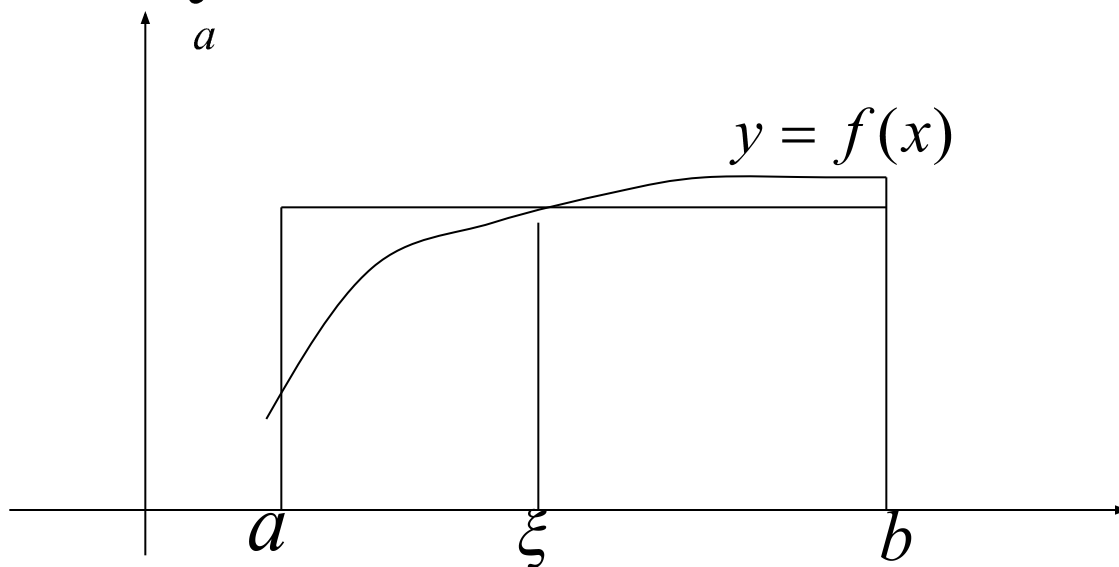
$$6. \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx ;$$

$$7. \int_a^b f(x)dx \geq 0 , \text{ если } f(x) \geq 0 .$$

Теорема о среднем

Если функция непрерывна на $[a, b]$,
существует такая точка $\xi \in [a, b]$,

что $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)$.



Вычисление определенного интеграла

Теорема.

Пусть $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$.

$$\text{Тогда } \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Эту формулу называют формулой Ньютона-Лейбница, из которой следует, что для вычисления определенного интеграла необходимо найти первообразную подынтегральной функции.

Пример

Вычислить $\int_0^3 e^{-\frac{x}{3}} dx$.

$$\int_0^3 e^{-\frac{x}{3}} dx = \int_0^3 e^{-\frac{1}{3} \cdot x} dx = -3e^{-\frac{1}{3} \cdot x} \Big|_0^3 = -3 \left(e^{-\frac{1}{3} \cdot 3} - e^{-\frac{1}{3} \cdot 0} \right) =$$

$$= -3(e^{-1} - 1) = -3 \left(\frac{1}{e} - 1 \right) = -3 \frac{1-e}{e}$$

Вычисление интеграла

Теорема (Замена переменной в определенном интеграле).

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, а функция $x = \varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$, причем $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt .$$

Пример

$$\int_0^3 \frac{x dx}{\sqrt{x+1}} = \left. \begin{array}{l} \sqrt{x+1} = t \\ x+1 = t^2 \\ x = t^2 - 1, dx = 2t dt \\ x = 0, t = 1 \\ x = 3, t = 2 \end{array} \right| = \int_1^2 \frac{t^2 - 1}{t} 2t dt =$$
$$= \int_1^2 2(t^2 - 1) dt = 2 \int_1^2 (t^2 - 1) dt = 2 \left(\frac{t^3}{3} - t \right) \Big|_1^2 = 2 \left[\left(\frac{8}{3} - 2 \right) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \right] =$$
$$= 2 \left(\frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + 1 \right) = 2 \left(\frac{7}{3} - 1 \right) = 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

Теорема (Интегрирование по частям в определенном интеграле).

Если функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ и их производные $u'(x)$ и $v'(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du .$$

Пример

$$\int_1^e \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx, v = x \end{array} \right| = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \frac{dx}{x} =$$
$$= x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx = e \ln e - \ln 1 - x \Big|_1^e = e - e + 1 = 1$$

Несобственный интеграл

Замечание.

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ не является определенным интегралом.

Считается по определению, что

$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$. Если этот предел

конечен, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, называемый

несобственным, сходится.

Если же этот предел не является конечным, то интеграл расходится.

Пример

. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{x^2 + 4}$$

(или установить его расходимость)

$$\begin{aligned} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{x^2 + 4} &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{d(x^2 + 4)}{x^2 + 4} = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 4) \Big|_0^b = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln(b^2 + 4) - \ln 4) = \infty \end{aligned}$$

Этот несобственный интеграл расходится.

Пример

Несобственный интеграл

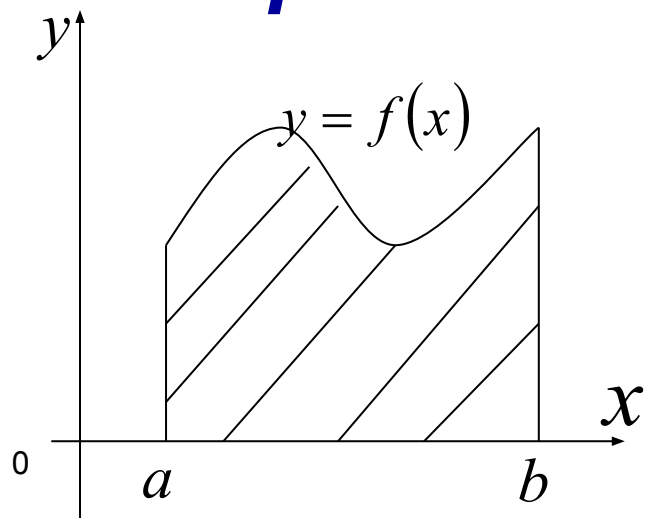
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4} =$$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{b}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2 \cdot 2} = \frac{\pi}{4}$$

***Геометрические приложения
определенного интеграла***

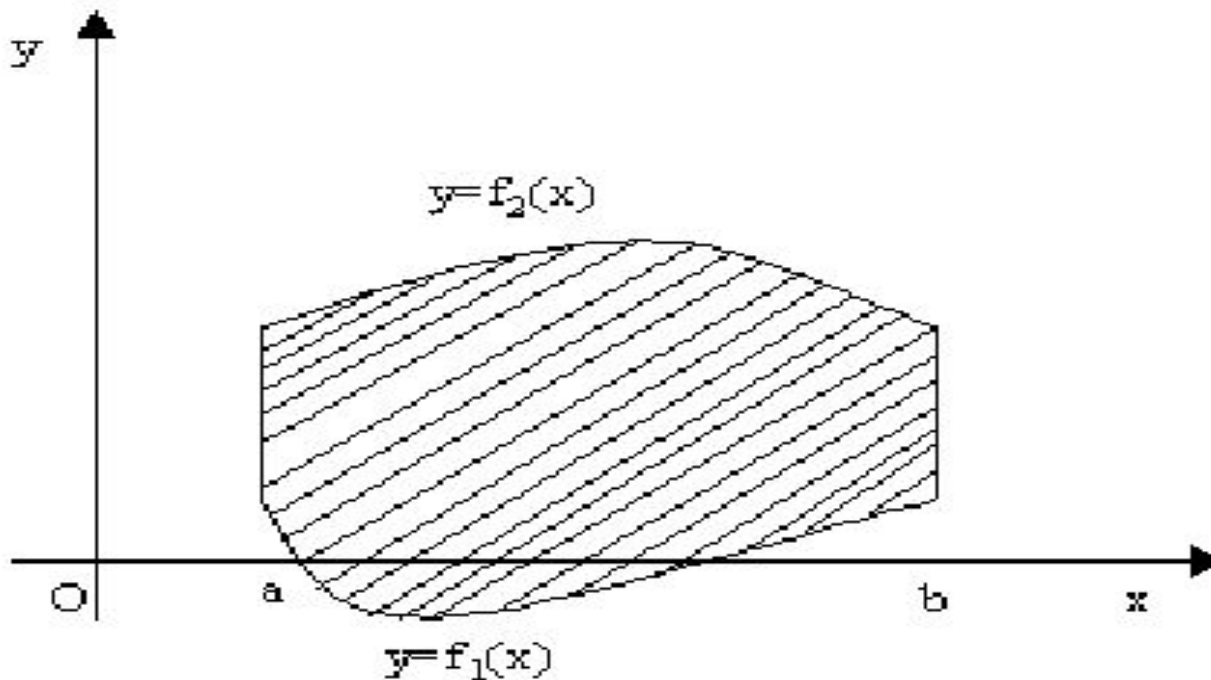
Вычисление площадей

Площадь фигуры в декартовых координатах.



Вычисление площадей

Площадь фигуры, ограниченной графиками непрерывных функций $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $f_1(x) \leq f_2(x)$ и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ определяется по формуле $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$



Вычисление площадей

В случае **параметрического задания кривой**, площадь фигуры, ограниченной прямыми $x = a, x = b$

, осью Ox и кривой $x = \varphi(t), y = \psi(t)$,

вычисляют по формуле
$$S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \varphi'(t) dt,$$

где пределы интегрирования определяют из уравнений

$$a = \varphi(t_1), b = \varphi(t_2)$$

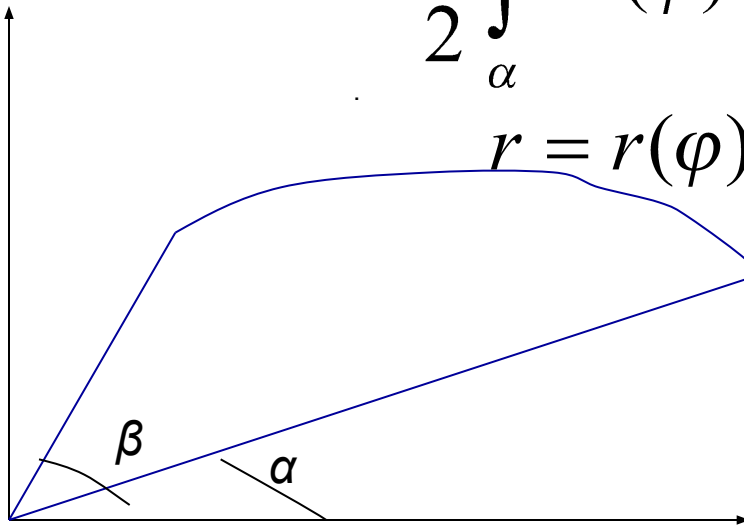
Вычисление площадей

Площадь полярного сектора

вычисляют по формуле

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi$$

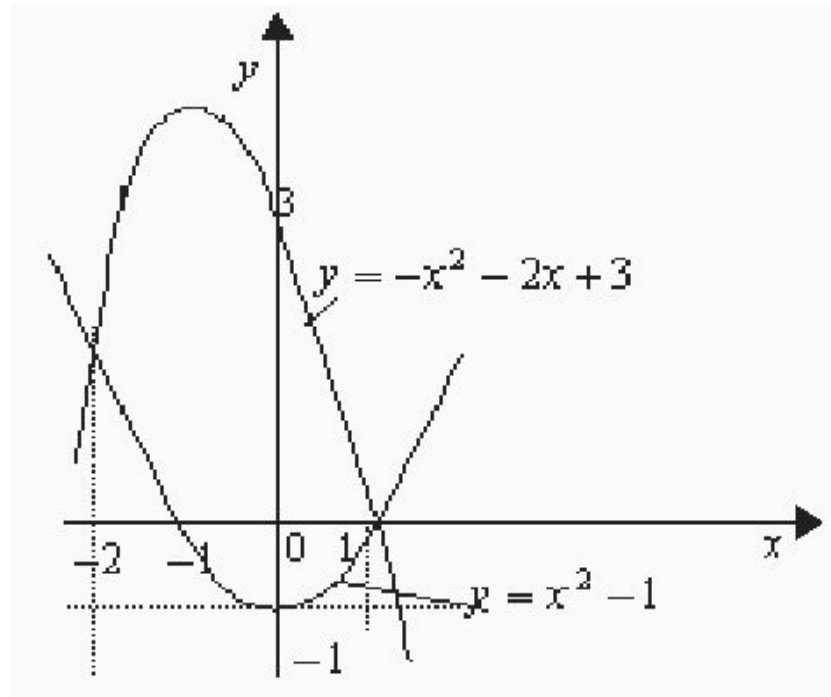
$$r = r(\varphi)$$



Примеры

Вычислить площадь фигуры,
ограниченной линиями $y = -x^2 - 2x + 3$ и

$$y = x^2 - 1$$



Продолжение

Получим

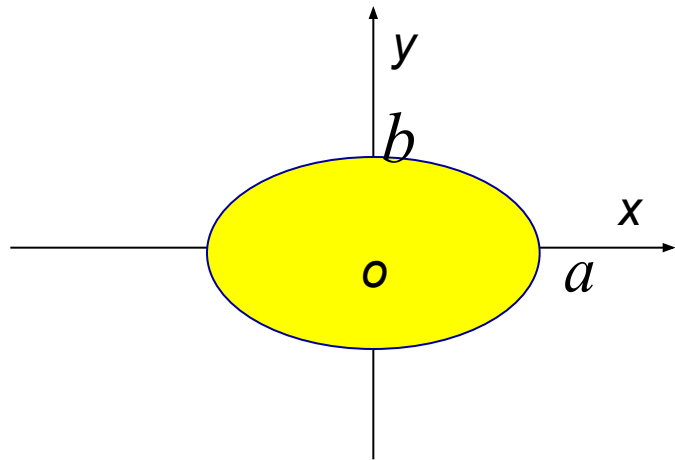
$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 [(-x^2 - 2x + 3) - (x^2 - 1)] dx = \int_{-2}^1 (-2x^2 - 2x + 4) dx = \\ &= -2 \int_{-2}^1 (x^2 + x - 2) dx = -2 \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_{-2}^1 = \\ &= -2 \left[\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) - \left(-\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4 \right) \right] = -2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 + \frac{8}{3} - 6 \right) = \\ &= -2 \left(3 - 8 + \frac{1}{2} \right) = -2 \left(-\frac{9}{2} \right) = 9 \end{aligned}$$

Примеры

Найти площадь эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Параметрические уравнения эллипса

$$x = a \cos t, y = b \sin t.$$



$$\begin{aligned} S &= 4 \int_{\pi/2}^0 b \sin t (-a \sin t) dt = \\ &= 4ab \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = 4ab \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \\ &= \frac{1}{2} 4ab \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right)_0^{\pi/2} = 2ab \frac{\pi}{2} = \pi ab. \end{aligned}$$

Пример

Площадь фигуры, ограниченной
лемнискатою Бернулли $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$
и лежащей вне круга радиуса $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} a^2 \cos 2\varphi d\varphi - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} \frac{a^2}{2} d\varphi &= \left(\frac{1}{4} a^2 \sin 2\varphi - \frac{1}{4} a^2 \varphi \right) \Big|_0^{\pi/6} = \\ &= \frac{1}{4} a^2 \left(\sin \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{a^2}{4} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{a^2}{8} \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right) \\ S &= \frac{a^2}{2} \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

Вычисление длины дуги

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$ $y = \psi(t)$ длина ее дуги

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$$

где t_1, t_2 – значения параметра, соответствующие концам дуги .

Длина дуги в декартовых координатах

Если кривая задана уравнением $y = f(x)$ то $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ где a, b — абсциссы начала и конца дуги ($a < b$)

Если кривая задана уравнением $x = g(y)$ то $l = \int_c^d \sqrt{1 + (g'(y))^2} dy$ где c, d — ординаты начала и конца дуги ($c < d$)

Длина дуги в полярных координатах

Если кривая задана уравнением в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$ то

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi ,$$

где α, β —значения полярного угла, соответствующие концам дуги .

Примеры

Вычислить длину дуги кривой $y = \sqrt{x^3}$
от точки $O(0,0)$ до $B(4,8)$

$$y' = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}, \text{ тогда}$$

$$\begin{aligned} l &= \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{4}{9} \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} d\left(1 + \frac{9}{4}x\right) = \\ &= \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1) \end{aligned}$$

Вычисление объема тела вращения.

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, отрезком оси абсцисс и прямыми $x = a$ и $x = b$, вычисляется по формуле

$$V_x = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Вычисление объема тела вращения

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кривой $x = g(y)$, отрезком оси ординат и прямыми $y = c$ и $y = d$, вычисляется по формуле

$$V_y = \pi \int_c^d (g(y))^2 dy$$

Вычисление объема тела вращения

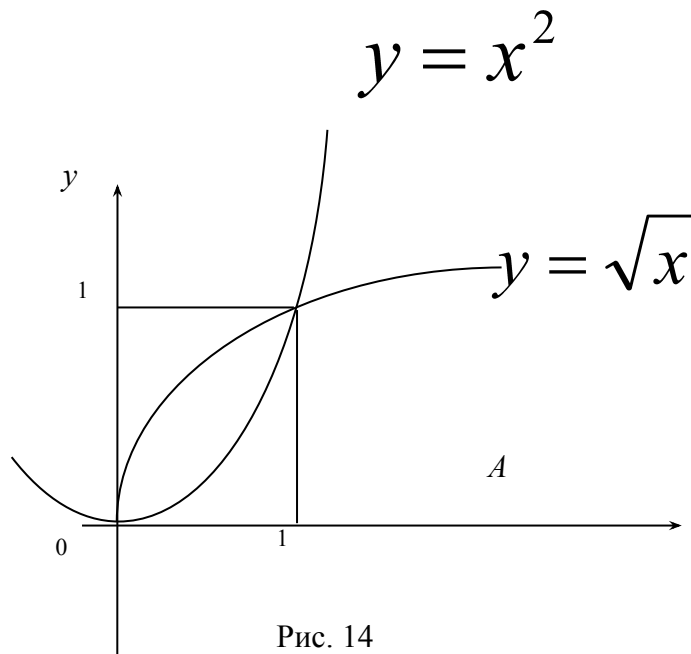


Рис. 14

Искомый объем
можно найти как
разность объемов,
полученных
вращением вокруг
оси Ox
криволинейных
трапеций,
ограниченных
линиями $y = \sqrt{x}$ и
 $y = x^2$

Решение

Тогда

$$V_x = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx - \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx =$$
$$= \pi \int_0^1 x dx - \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 - \pi \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 =$$
$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}$$