Определённый интеграл

Свойства определённого интеграла

1. $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

2. $$\int_a^a f(x) = 0$$

3. $$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$, *k*-любое число

4. $$\int_a^b (f_1(x)+f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$$

5.Аддитивность определённого интеграла. Для любых чисел a,b,c справедливо:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

6) Если на $[a;b]$, то $f(x) \geq 0$

$$\int_a^b f(x) \cdot dx \geq 0.$$

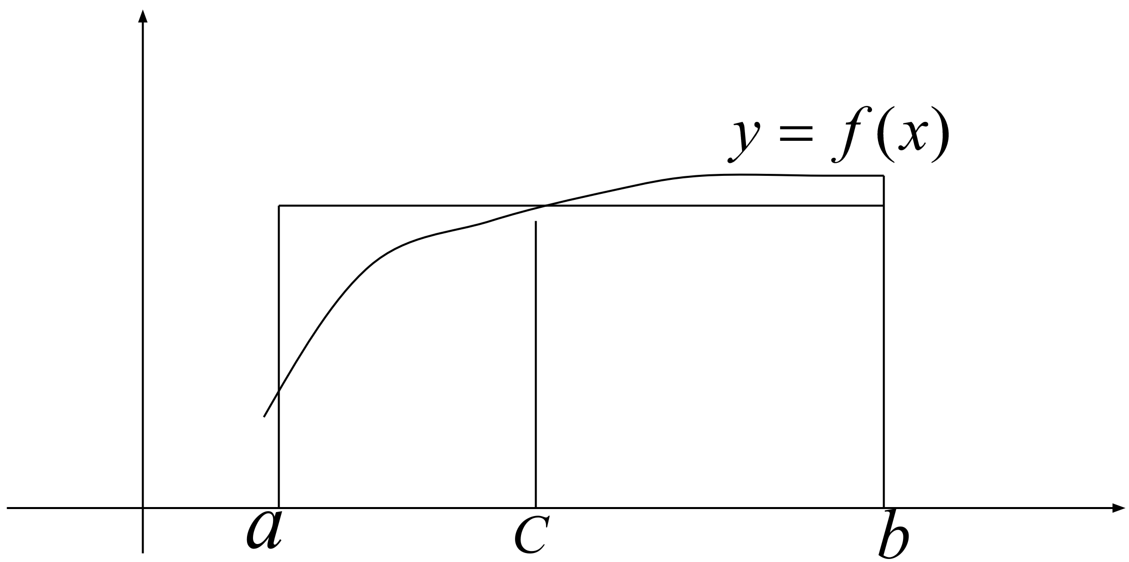
7) Если на $[a;b]$ $f(x) \geq \varphi(x)$

$$\int_a^b f(x) \cdot dx \geq \int_a^b \varphi(x) \cdot dx$$

Теорема о среднем

Если функция непрерывна на $[a,b]$, то существует такая точка $C \in [a,b]$, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(C)(b-a).$$



Формула Ньютона-Лейбница.

Если *F(x)* есть какая-либо первообразная

от непрерывной на $[a, b]$ функции *f(x),* то справедлива формула

Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Пример.

$$\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \,\Big|_0^{0,5} = \arcsin 0{,}5 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}$$

Методы интегрирования

$$\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = \left| \begin{array}{l} x = z^2 \\ dx = 2z \cdot dz \\ x = 2;\ z = 2 \\ x = 9;\ z = 3 \end{array} \right| = \int_2^3 \frac{2z \cdot dz}{z+1} =$$

$$= 2\int_2^3 \frac{(z+1)-1}{z+1} \cdot dz = 2\int_2^3 \left(1 - \frac{1}{z+1}\right) dz =$$

$$= 2z\Big|_2^3 - 2\ln|z+1|\Big|_2^3 = 6 - 4 - 2\ln 4 + 2\ln 3 = 2 + \ln\frac{9}{16}$$

Интегрирование по частям в определённом интеграле.

$$\int_a^b u\,dv = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

$$\int_0^{\pi} x\cdot\cos x\cdot dx = \left| \begin{array}{l} u = x;\ du = dx \\ dv = \cos x\cdot dx \\ v = \int \cos x\cdot dx = \sin x \end{array} \right| =$$

$$= x\cdot\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x\cdot dx =$$

$$= \pi\cdot\sin\pi - 0\cdot\sin 0 - \left(-\cos x\right)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= 0 - 0 + \cos\pi - \cos 0 = -1 - 1 = -2$$

Геометрические приложения определенного интеграла

- 1. Если $[a;b]$ непрерывна и $y=f(x)$ положительна, то $S_{кр.тр.}$ с основанием ограниченной сверху графиком этой функции можно найти по формуле

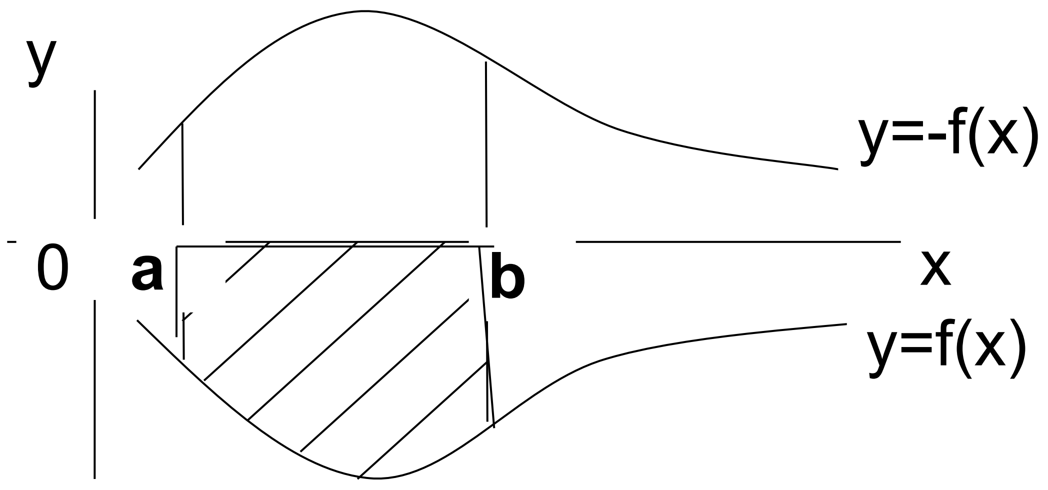
$$\boxed{S=\int_a^b f(x)dx}$$

2. Если $f(x) < 0$ на $[a;b]$.

$$-f(x) > 0$$

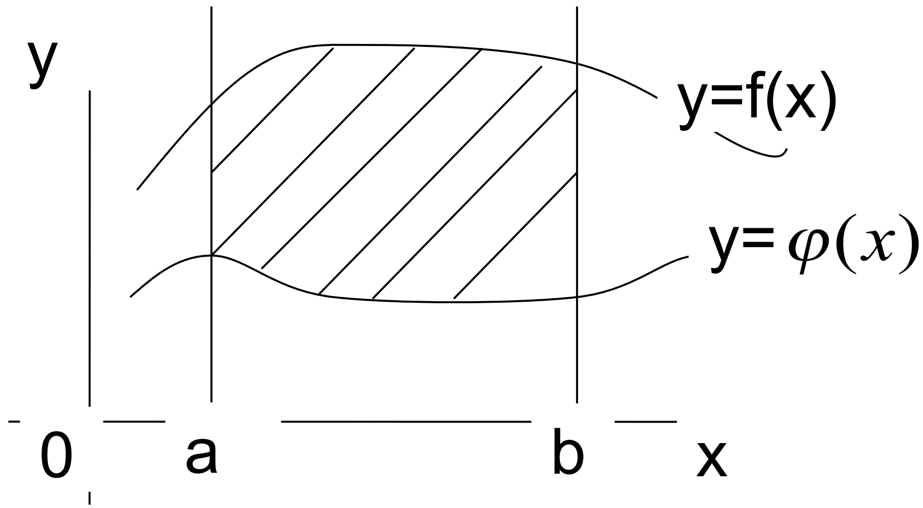
$$S = \int_a^b \left(-f(x)\right) \cdot dx = -\int_a^b f(x) \cdot dx$$

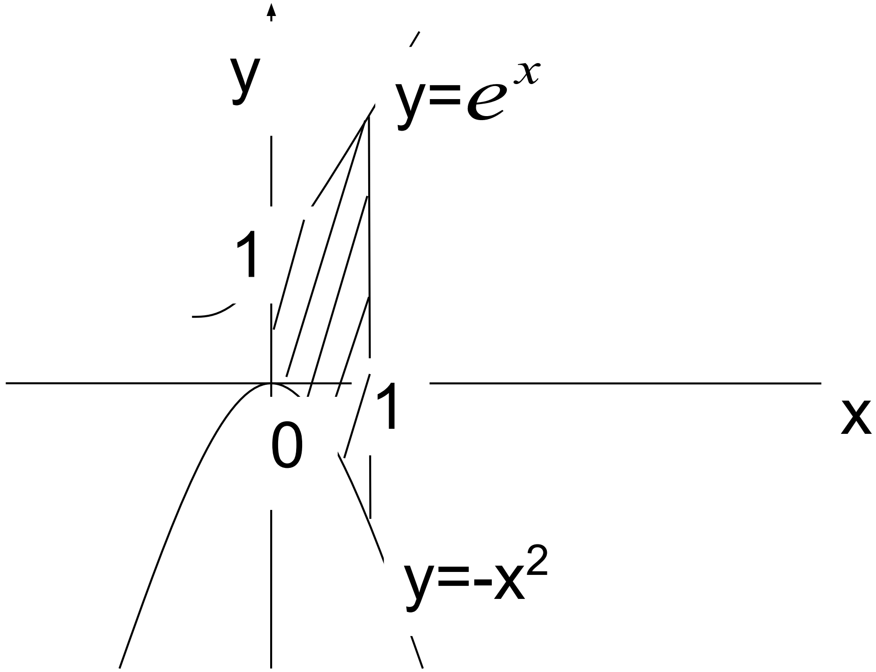
$$\boxed{S = \int_a^b \left|f(x)\right| dx}$$


y
y=-f(x)
0
a
b
x
y=f(x)

3.Рассмотрим случай, когда фигура ограничена сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу графиком функции $y = \varphi(x)$.

$$\boxed{S = \int_a^b \left[f(x) - \varphi(x) dx \right]}$$


y
y=f(x)
y= $\varphi(x)$
0
a
b
x



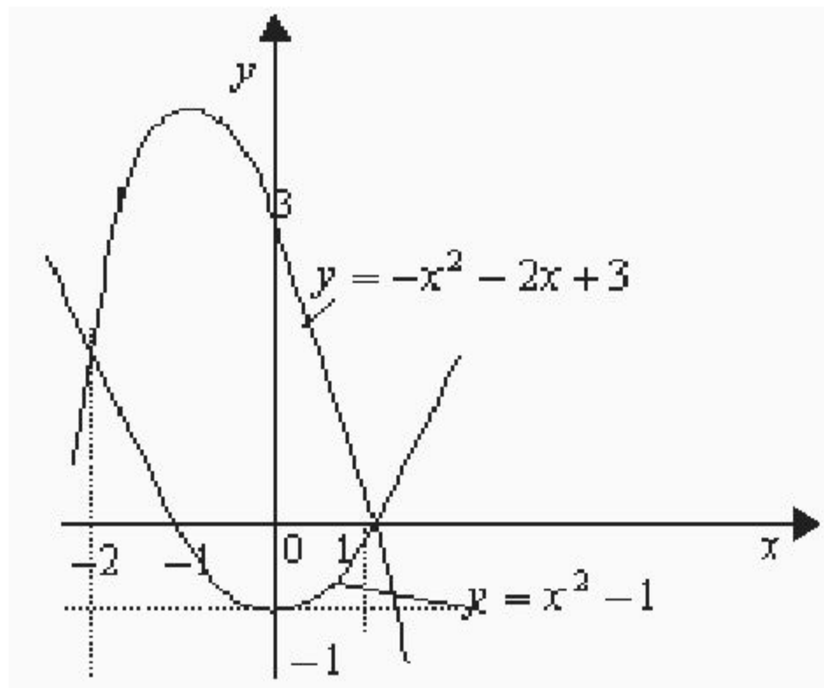
$$S=\int_0^1 (e^x+x^2)dx=(e^x+\frac{x^3}{3})\Big|_0^1=e-1+\frac{1}{3}=e-\frac{2}{3}$$

Примеры

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями
и

$$y = -x^2 - 2x + 3$$

$$y = x^2 - 1$$



Получим

$$S = \int_{-2}^{1}\left[\left(-x^2-2x+3\right)-\left(x^2-1\right)\right]dx = \int_{-2}^{1}\left(-2x^2-2x+4\right)dx =$$

$$= -2\int_{-2}^{1}\left(x^2+x-2\right)dx = -2\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right)\Bigg|_{-2}^{1} =$$

$$= -2\left[\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)-\left(-\frac{8}{3}+\frac{4}{2}+4\right)\right] = -2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2+\frac{8}{3}-6\right) =$$

$$= -2\left(3-8+\frac{1}{2}\right) = -2\left(-\frac{9}{2}\right) = 9$$

Вычисление площадей

В случае **параметрического задания кривой,** площадь фигуры, ограниченной прямыми $x = a, x = b$, осью *Ox* и кривой $x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$ вычисляют по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\varphi'(t)dt,$$

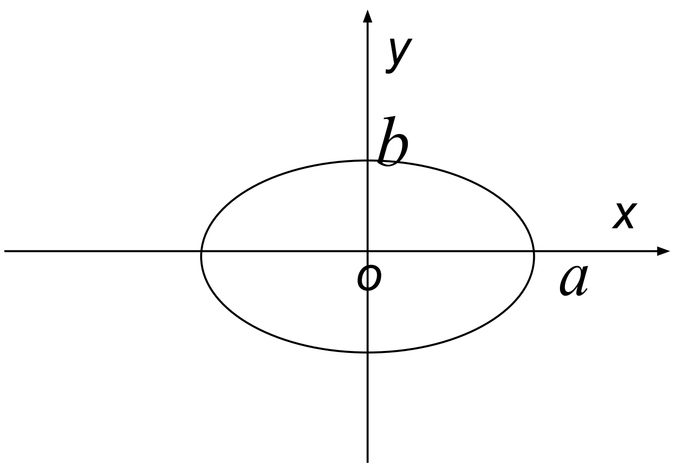
где пределы интегрирования определяют из уравнений $a = \varphi(t_1), b = \varphi(t_2)$.

Пример.

Найти площадь эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2.}{b^2} = 1$

Параметрические уравнения эллипса

$$x = a\cos t, y = b\sin t.$$



$$S = 4\int_{\pi/2}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt =$$

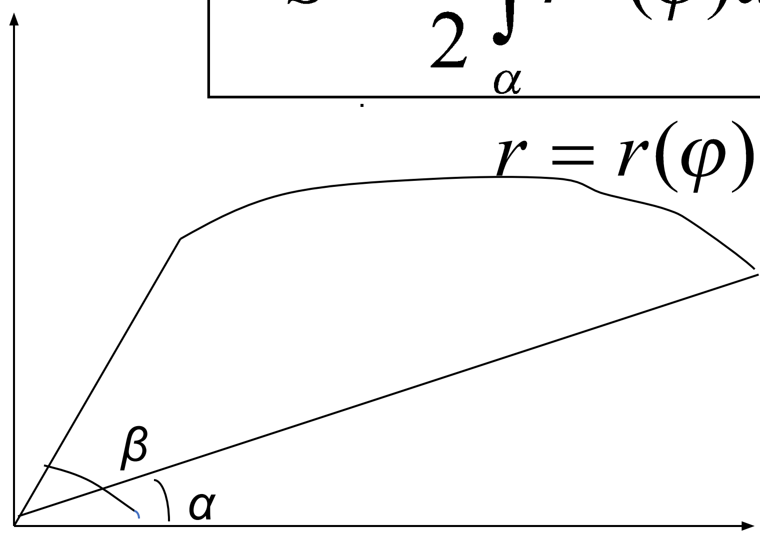
$$= 4ab\int_{0}^{\pi/2} \sin^2 t dt = 4ab\int_{0}^{\pi/2} \frac{1-\cos 2t}{2} dt =$$

$$= \frac{1}{2} 4ab(t - \frac{1}{2}\sin 2t)_0^{\pi/2} = 2ab\frac{\pi}{2} = \pi ab.$$

Вычисление площадей

Площадь полярного сектора вычисляют по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi$$



Пример.

Площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$

и лежащей вне круга радиуса $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} a^2 \cos 2\varphi d\varphi - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} \frac{a^2}{2} d\varphi = \left(\frac{1}{4}a^2 \sin 2\varphi - \frac{1}{4}a^2\varphi\right)\Big|_0^{\pi/6} =$$

$$= \frac{1}{4}a^2\left(\sin\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{a^2}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{a^2}{8}\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$S = \frac{a^2}{2}\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$$

Вычисление длины дуги

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$ $, y = \psi(t)$, то длина ее дуги

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt$$

где t_1, t_2 –значения параметра, соответствующие концам дуги .

Длина дуги в декартовых координатах

Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, то

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

где *a, b*–абсциссы начала и конца дуги $(a < b)$.

Если кривая задана уравнением $x = g(y)$, то

$$l = \int_c^d \sqrt{1 + (g'(y))^2}\, dy,$$

где *c, d*–ординаты начала и конца дуги $(c < d)$.

Длина дуги в полярных координатах

Если кривая задана уравнением в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$, то

$$\boxed{l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi}$$

где α, β –значения полярного угла, соответствующие концам дуги .

Пример.

Вычислить длину дуги кривой $y = \sqrt{x^3}$

от точки $O(0,0)$ до $B(4,8)$.

$$y' = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$, тогда

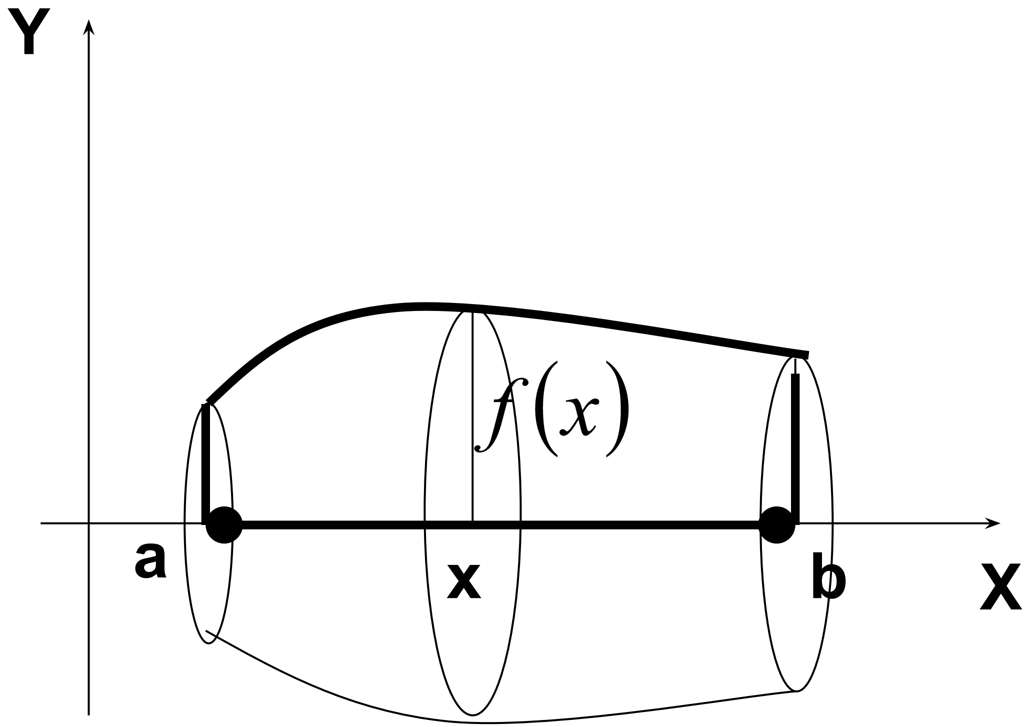
$$l = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,dx = \frac{4}{9}\int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,d\left(1 + \frac{9}{4}x\right) =$$

$$= \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4 = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right)$$

Вычисление объема тела вращения.

Объем тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, отрезком оси абсцисс $a \le x \le b$ и прямыми $x = a, x = b$, вычисляется по формуле

$$\boxed{V_x = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx}$$



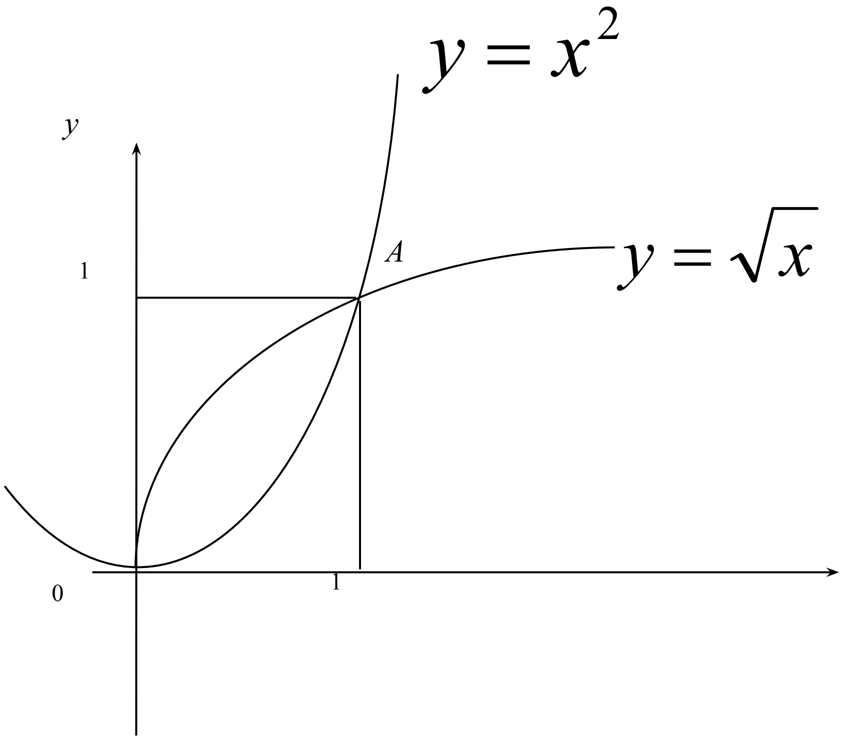
Y
$f(x)$
a
x
b
X

Вычисление объема тела вращения

Объем тела, образованного вращением вокруг оси *Oy* фигуры, ограниченной кривой $x = g(y)$, отрезком оси ординат $c \le y \le d$ и прямыми $y = c, y = d$, вычисляется по формуле .

$$\boxed{V_y = \pi \int_c^d \left(g(y)\right)^2 dy}$$

Пример.



Искомый объем можно найти как разность объемов, полученных вращением вокруг оси *Ox* криволинейных трапеций, ограниченных линиями $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$

Решение.

Тогда $$V_x = \pi\int_0^1 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx - \pi\int_0^1 \left(x^2\right)^2 dx =$$

$$= \pi\int_0^1 x dx - \pi\int_0^1 x^4 dx = \pi\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 - \pi\cdot\frac{x^5}{5}\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}$$