ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

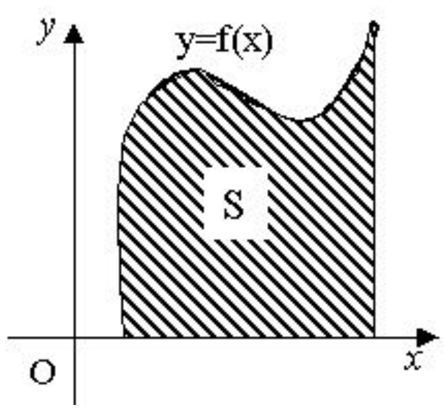
Понятие определенного интеграла

Определенный интеграл отличается от неопределенного тем, что это *либо число*, либо первообразная с определенной постоянной.

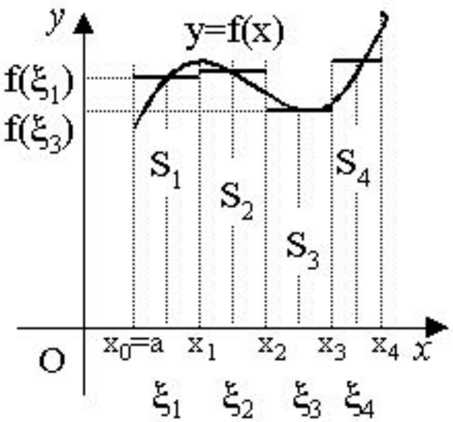
Пусть на отрезке *[a, b]* задана неотрицательная функция $y=f(x)$. Требуется найти площадь S криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$, прямыми $x=a$, $x=b$ и осью абсцисс $y=0$ – см. рисунок. Говорят также о площади S под кривой $y=f(x)$ на *[a, b]*.

Разобьем отрезок *[a, b]* на n элементарных отрезков точками $x0$, x_1, x_2, ... , x_n: $a=x_0<x_1<x_2< \ldots <x_n=b$. На каждом отрезке $[x_i\text{-}1, x_i]$ разбиения выберем некоторую точку ξ_i и положим $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, где $i=1, 2, \ldots, n$. Сумму вида

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$



будем называть *интегральной суммой* для функции $y=f(x)$ на Очевидно, что интегральная сумма зависит как от способов разбиения отрезка *[a, b]* точками x_0, x_1, x_2, ... , x_n, так и от выбора точек ξ_i *на каждом из отрезков разбиения* $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, 2, \ldots, n$.



Отдельное слагаемое $f(\xi_i)\Delta x_i$ интегральной суммы (10.1.1) равно площади S_i прямоугольника со сторонами $f(\xi_i)$ и Δx_i, где i=1, 2, … , n – см. рисунок. Другими словами, S_i – это площадь под прямой y= $f(\xi_i)$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$. Поэтому вся интегральная сумма равна площади Sл=$S_1+S_2+\ldots+S_n$ под ломаной, образованной на каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ прямой y= $f(\xi_i)$, параллельной оси абсцисс.

Для избранного разбиения отрезка *[a, b]* на части обозначим $\max\Delta x_i$ максимальную из длин отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, 2, \ldots , n$.

Пусть предел интегральной суммы при стремлении $\max\Delta x_i$ к нулю существует, конечен и не зависит от способа выбора точек $x_0, x_1, x_2, \ldots , x_n$ и точек $\xi_1, \xi_2, \ldots , \xi_n$. Тогда этот предел называется **определенным интегралом** от функции *y=f(x)* на *[a, b]*,

обозначается $\int_a^b f(x)dx$

а сама функция *y=f(x)* называется *интегрируемой* на отрезке *[a, b]*, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

При этом число *a* называется *нижним пределом*, число *b* – его *верхним пределом*, функция *f(x)* – *подынтегральной функцией*, выражение *f(x)dx* – *подынтегральным выражением*, а задача нахождения $\int_a^b f(x)dx$ *интегрированием функции* *f(x)* на отрезке *[a, b]*. есть определенное число.

Несмотря на сходство в обозначениях и терминологии, определенный и неопределенный интегралы существенно различные понятия: в то время как $\int_a^b f(x)dx$ представляет собой семейство функций, $\int_a^b f(x)dx$ есть число.

По определению положим $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Свойства определенного интеграла

Рассмотрим *свойства определенного интеграла*, которые имеют аналоги в случае интеграла неопределенного.

1. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла

$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$ где α - некоторое число

2. Интеграл от алгебраической суммы двух функций равен такой же сумме интегралов от этих функций, т. е.

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b f(x)dx$$

3. Если отрезок интегрирования разбит на части, то интеграл на всем отрезке равен сумме интегралов для каждой из возникших частей, т. е. при любых *a, b, c*

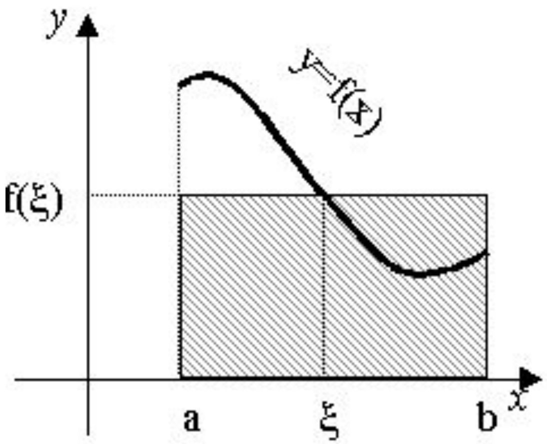
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

4. Если на отрезке *[a, b]*, где *a<b*, *f(x)≤g(x)*, то и $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

т. е. обе части неравенства можно почленно интегрировать.

5. **Теорема о среднем**. Если функция *y=f(x)* непрерывна на отрезке *[a, b]*, где *a<b*, то найдется такое значение $\xi \in$*[a, b]*, что

$$\int_c^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$



Пусть число *f(x)≥0* на *[a, b]*. Тогда теорема о среднем утверждает: найдется такая точка ξ из отрезка *[a, b]*, что площадь под кривой *y=f(x)* на *[a, b]* равна площади прямоугольника со сторонами *f(ξ)* и *(b-a)* - *см. рисунок.*

Определенный интеграл как функция верхнего предела

Если функция $y=f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то, очевидно, она интегрируема также на произвольном отрезке $[a, x]$, вложенном в $[a, b]$. Положим по определению

$$\Phi(x) = \int_a^x f(x)dx = \int_a^x f(t)dt$$

где $x \in [a, b]$, а функция $\Phi(x)$ называется **интегралом с переменным верхним пределом**.

Рассмотрим свойства функции интеграла с переменным верхним пределом $\Phi(x)$.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то функция $\Phi(x)$ также непрерывна на $[a, b]$.

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда в каждой точке x отрезка $[a, b]$ производная функции $\Phi(x)$ по переменному верхнему пределу равна подынтегральной функции $f(x)$, т.е.

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x)$$

Формула Ньютона-Лейбница

Опираясь на свойства интеграла с переменным верхним пределом, получим основную формулу интегрального исчисления, называемую **формулой Ньютона-Лейбница**.

Теорема: пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $F(x)$ – любая первообразная для $f(x)$ на $[a, b]$. Тогда определенный интеграл от функции $f(x)$ на $[a, b]$ равен приращению первообразной $F(x)$ на этом отрезке, т. е.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Нахождение определенных интегралов с использованием формулы Ньютона-Лейбница осуществляется в два этапа:

А) находим некоторую первообразную $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$, причем такую, чтобы она имела наиболее простой вид при $C=0$;

Б) находим приращение первообразной, равное искомому интегралу

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_0^1 x^2 dx$

Решение. Первообразная для функции *f(x)=x2* имеет вид *F(x)=x*^{3}*/3+C*. Для нахождения интеграла по формуле Ньютона-Лейбница возьмем такую первообразную, у которой *C=0*. Тогда

$$\int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

Геометрические приложения определенного интеграла

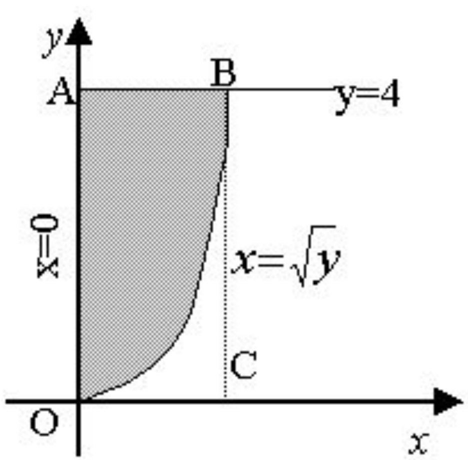
С помощью определенного интеграла можно решать целый ряд геометрических задач, а именно вычисление площадей и объемов различных фигур.

Вычисление **площадей плоских фигур**. Пусть функция *y=f(x)* неотрицательна и непрерывна на отрезке *[a, b]*. Тогда по геометрическому смыслу определенного интеграла площадь *S* под кривой *y=f(x)* на *[a, b]* численно равна определенному интегралу

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Пример 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$x = 0, x = \sqrt{y},\ y = 4$$



Решение. Из рисунка видно, что искомая площадь S криволинейного треугольника OAB равна разности двух площадей: *S=SOAB-S*OBC, каждая из которых находится по геометрическому смыслу определенного интеграла.

Решая систему $\begin{cases} y = 4, \\ x = \sqrt{y} \end{cases}$

получаем, что точка B пересечения прямой $y=4$ и кривой $x = \sqrt{y}$ имеет координаты *(2, 4)*. Тогда

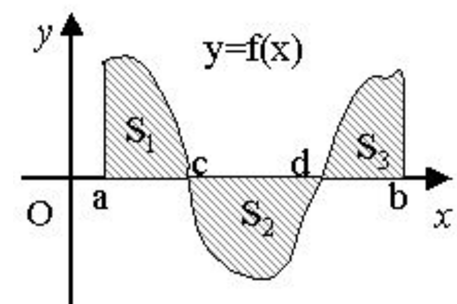
$$S_{OAB} = \int_0^2 4dx = 4\int_0^2 dx = 4x\Big|_0^2 = 8,\ S_{OBC} = \int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8}{3}$$

Окончательно $S = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$(ед.^{2}).

Если функция $y=f(x)$ неположительная на $[a, b]$, то площадь S под кривой $y=f(x)$ на $[a, b]$ отличается знаком от определенного интеграла

$$S = \int_a^b (-f(x))dx = -\int_a^b f(x)dx$$

Пусть теперь на отрезке *[a, b]* задана непрерывная функция *y=f(x)* общего вида. Предположим также, что исходный отрезок можно разбить точками на конечное число интервалов так, что на каждом из них функция *y=f(x)* будет знакопостоянна или равна нулю.

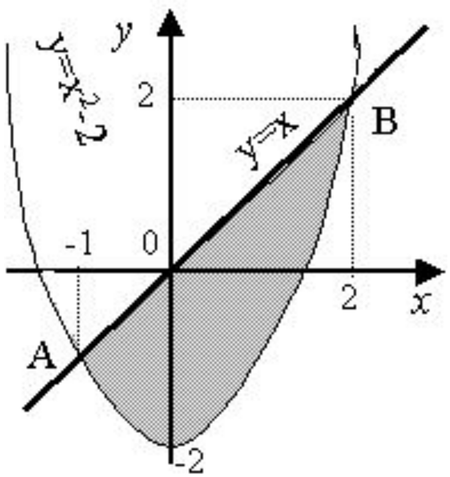


Рассмотрим случай, изображенный на рисунке. Площадь заштрихованной фигуры $S=S_1+S_2+S_3$, т.е. равна алгебраической сумме соответствующих определенных интегралов:
$$S=\int_a^c f(x)dx-\int_c^d f(x)dx+\int_d^b f(x)dx$$

Приведем формулу, применение которой часто упрощает решение задач на вычисление площадей плоских фигур.

Теорема. Пусть на отрезке *[a, b]* заданы непрерывные функции $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ такие, что $f_2(x)\geq f_1(x)$. Тогда площадь фигуры *S*, заключенной между кривыми $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ на отрезке *[a, b]* вычисляется по формуле:
$$S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx$$

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-2$, $y=x$ – см. рисунок.



Решение. Найдем координаты точек пересечения параболы $y=x^2-2$ и прямой $y=x$, решив систему этих уравнений $\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ y = x \end{cases}$

В результате получим координаты точки $A(-1, -1)$ и $B(2, 2)$. На отрезке $[-1, 2]$ $x \geq x^2-2$, поэтому можно воспользоваться формулой, полагая $f_1(x)=x^2-2$, $f_2(x)=x$. Абсциссы точек A и B пересечения линий зададут пределы интегрирования:

$$S = \int_{-1}^{2} (x-(x^2-2))dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_{-1}^{2} - \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{2} + 2x\Bigg|_{-1}^{2} =$$

$$\frac{1}{2}\left(4^2-(-1)^2\right) - \frac{1}{3}\left(2^3-(-1)^3\right) + 2(2-(-1)) = 4.5\ (\text{åä.}^2)$$