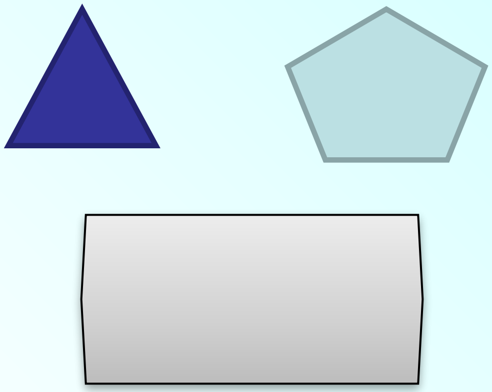
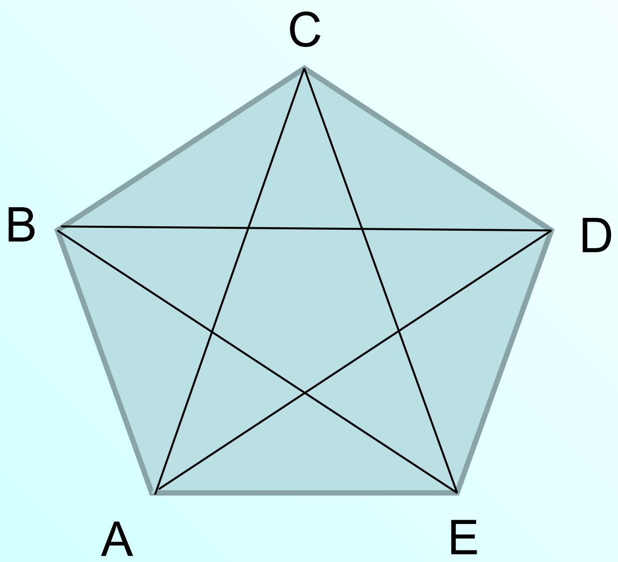
Правильные многоугольники, вычисление их элементов. Окружность, описанная около правильного многоугольника. Окружность, вписанная в правильный многоугольник.

Понятие многоугольника

Многоугольник – это простая замкнутая ломаная линия и конечная часть плоскости, которую она ограничивает***.***



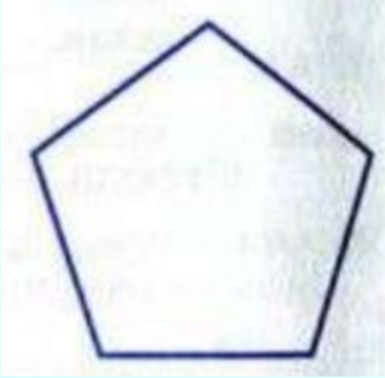


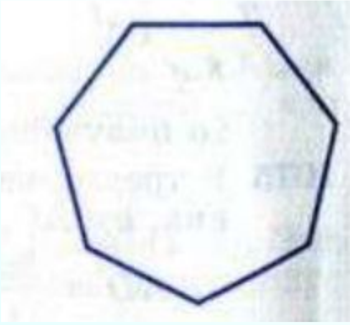
A, B, C, D, E *– вершины;*
AB, BC, CD, DE, AE *– стороны;*
AC, AD, BE, BD, CE *– диагонали.*

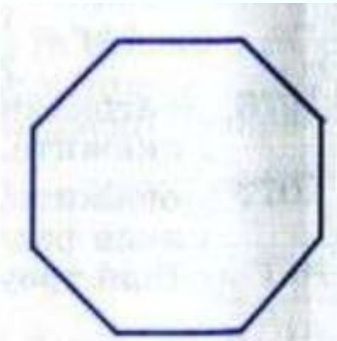
Понятие правильного многоугольника

Правильный многоугольник – это выпуклый многоугольник, у которого все углы равны и все стороны равны.

Примерами правильных прямоугольников являются равносторонний треугольник и квадрат. На рисунках изображены правильные пятиугольник, семиугольник и восьмиугольник.







Выведем формулу для вычисления угла α_n правильного n-угольника.

Сумма всех углов правильного n-угольника равна $(n - 2) \cdot 180°$, причём все углы его равны, поэтому

$$\alpha_n = \frac{n-2}{n} \cdot 180°$$

Основные свойства правильного многоугольника

1. Все стороны равны:

$$a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_{n-1} = a_n$$

2. Все углы равны:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = ... = \alpha_{n-1} = \alpha_n$$

3. Центр вписанной окружности $O_в$ совпадает з центром описанной окружности $O_о$, что и образуют **центр многоугольника O**

4. Сумма всех углов n-угольника равна:

$$180° \cdot (n - 2)$$

5. Сумма всех внешних углов n-угольника равна 360°:

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + ... + \beta_{n-1} + \beta_n = 360°$$

6. Количество диагоналей (D_n) n-угольника равна половине произведения количества вершин на количество диагоналей, выходящих из каждой вершины:

$$D_n = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$

7. В любой многоугольник можно вписать окружность и описать круг при этом площадь кольца, образованная этими окружностями, зависит только от длины стороны многоугольника:

$$S = \frac{\pi}{4} a^2$$

8. Все биссектрисы углов между сторонами равны и проходят через центр правильного многоугольника **O**

Изучив свойства правильного многоугольника, исследуем вопрос о возможности вписать его в некоторую окружность.

Теорема (об описанной около правильного многоугольника окружности)

Около любого правильного многоугольника можно описать окружность и притом ровно одну.

Доказательство

Пусть $A_1A_2A_3...A_n$ — правильный многоугольник, O — точка пересечения биссектрис углов A_1 и A_2 (рис. 307).

Соединим точку O отрезками с остальными вершинами многоугольника и докажем, что $OA_1 = OA_2 = ... = OA_n$. Так как $\angle A_1 = \angle A_2$, то $\angle 1 = \angle 3$, поэтому треугольник A_1A_2O равнобедренный: в нём $OA_1 = OA_2$. Треугольники A_1A_2O и A_2A_3O равны по двум сторонам и углу между ними ($A_1A_2 = A_3A_2$, A_2O — общая сторона и $\angle 3 = \angle 4$), следовательно, $OA_3 = OA_1$. Точно так же можно доказать, что $OA_4 = OA_2$, $OA_5 = OA_3$ и т. д.

Итак, $OA_1 = OA_2 = ... = OA_n$, т. е. точка O равноудалена от всех вершин многоугольника. Поэтому окружность с центром O и радиусом OA_1 является описанной около многоугольника.

Докажем теперь, что описанная окружность только одна. Рассмотрим какие-нибудь три вершины многоугольника, например A_1, A_2, A_3. Так как через эти точки проходит только одна окружность, то около многоугольника $A_1A_2A_3...A_n$ можно описать только одну окружность. Теорема доказана.

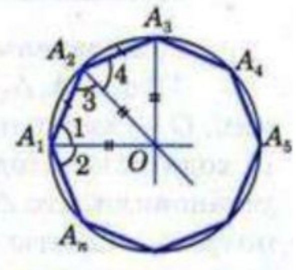


Рис. 307

Из доказанного очевидно следующее утверждение.

- **Следствие**. *Центр правильного многоугольника совпадает с центром описанной около него окружности.*

Окружность называется вписанной в многоугольник, если все стороны многоугольника являются касаются этой окружности.

Докажем теорему об окружности, вписанной в правильный многоугольник.

Теорема

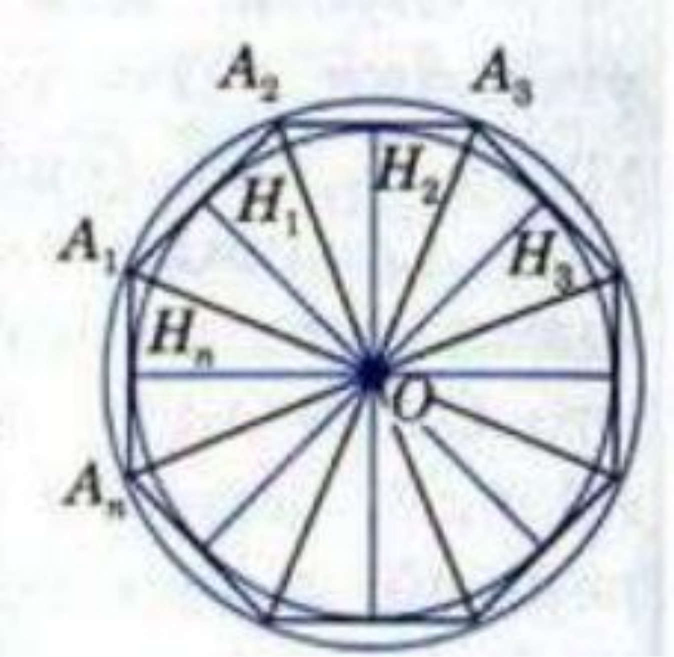
В любой правильный многоугольник можно вписать окружность, и притом только одну.

Доказательство

Пусть $A_1A_2...A_n$ — правильный многоугольник, O — центр описанной окружности (рис. 308). В ходе доказательства предыдущей теоремы мы установили, что $\triangle OA_1A_2 = \triangle OA_2A_3 = ... = \triangle OA_nA_1$, поэтому высоты этих треугольников, проведённые из вершины O, также будут равны: $OH_1 = OH_2 = ... = OH_n$. Отсюда следует, что окружность с центром O и радиусом OH_1 проходит через точки H_1, H_2, ..., H_n и касается сторон многоугольника в этих точках, т. е. эта окружность вписана в данный правильный многоугольник.

Докажем теперь, что вписанная окружность только одна.

Предположим, что наряду с окружностью с центром O и радиусом OH_1 есть и другая окружность, вписанная в многоугольник $A_1A_2...A_n$. Тогда её центр O_1 равноудалён от сторон многоугольника, т. е. точка O_1 лежит на каждой из биссектрис углов многоугольника и, следовательно, совпадает с точкой O пересечения этих биссектрис. Радиус этой окружности равен расстоянию от точки O до сторон многоугольника, т. е. равен OH_1. Таким образом, вторая окружность совпадает с первой. **Теорема доказана.**



Из доказанного очевидно следующие утверждения:

Следствие. *Окружность вписанная в правильный многоугольник, касается сторон многоугольника в их серединах.*

Следствие. *Центр окружности, описанной около правильного многоугольника, совпадает с центром окружности, вписанной в тот же многоугольник.*

Эта точка называется **центром правильного многоугольника.**

ПИСЬМЕННО ВЫПОЛНИТЕ ТЕСТ:

1. Правильным называется выпуклый многоугольник, у которого:
а) все стороны равны; б) все углы равны;
в) все стороны и все углы равны; г) все углы острые.

2. Если все вершины многоугольника лежат на окружности, то окружность называется:
а) вписанной; б) описанной.

3. Около правильного многоугольника можно описать:
а) Одну окружность; б) две окружности; в) множество.

4. Если все стороны многоугольника касаются окружности, то окружность называется:
а) вписанной; б) описанной.

5. Центр окружности, описанной около правильного многоугольника и центр окружности, вписанной в этот же многоугольник:
а) центр вписанной окружности; б) центр описанной окружности;
в) центр правильного многоугольника; г) центр многоугольника.

6. Если четырехугольник вписан в окружность, то:
а) сумма его противолежащих углов равна 180°;
б) сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180°;
в) суммы противоположных сторон равны;
г) суммы смежных сторон равны.

ПИСЬМЕННО ВЫПОЛНИ ЗАДАНИЯ:

1. Верно ли утверждение о том, что любой правильный многоугольник является выпуклым? Ответ обоснуйте.
2. Верно ли утверждение о том, что любой выпуклый многоугольник является правильным? Ответ обоснуйте.
3. Докажите утверждение о том, что любой равносторонний треугольник является правильным.
4. Найдите углы правильного n-угольнинка, если а) $n=5$; б) $n=18$.
5. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если каждый его угол равен а) 60°; б) 135°.