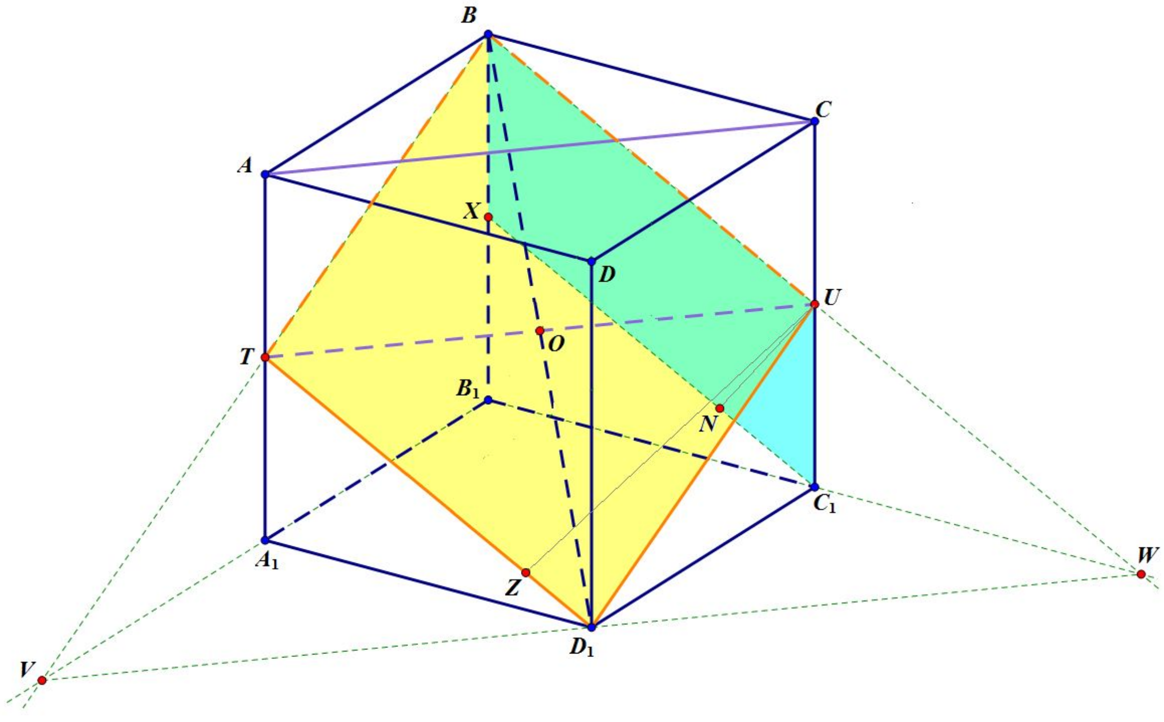
«Стереометрия
Аксиомы стереометрии»



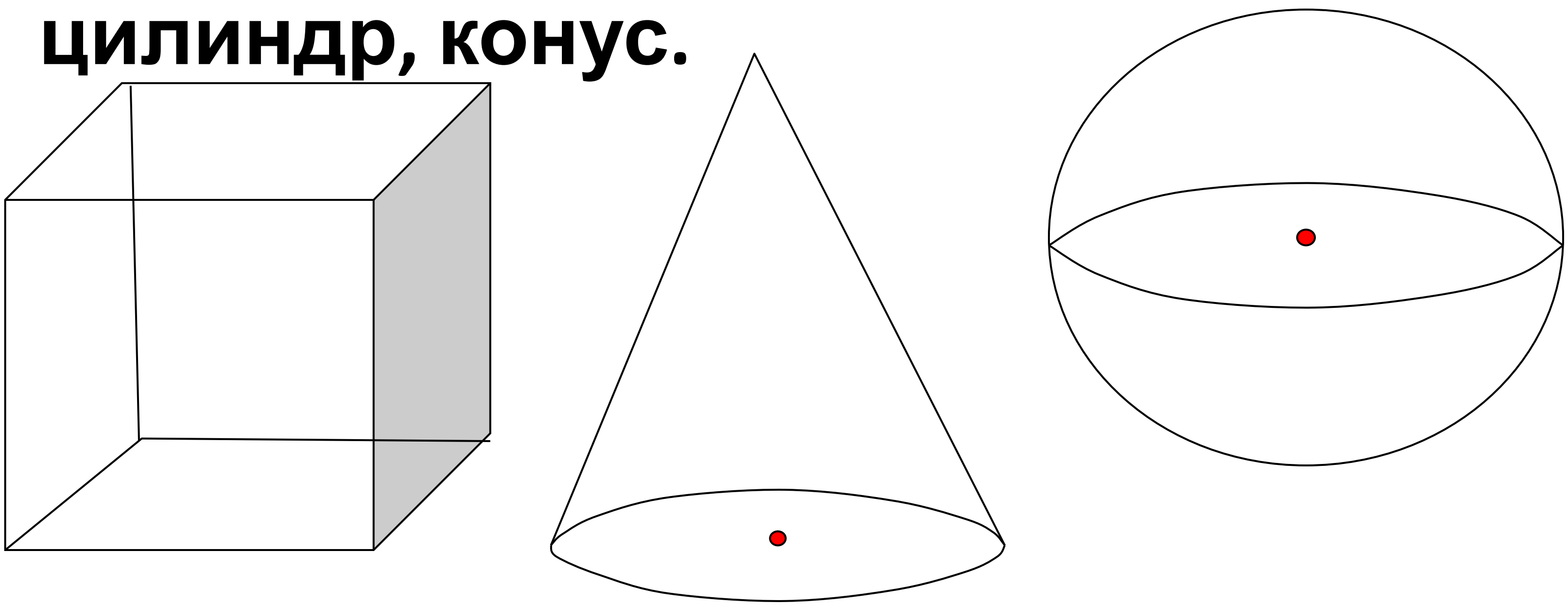
Стереометрия - изучает свойства фигур в пространстве.

Слово «стереометрия» происходит от греческих слов «стереос» объемный, пространственный, «метрео» – мерить.

Основные фигуры: точка, прямая, плоскость.

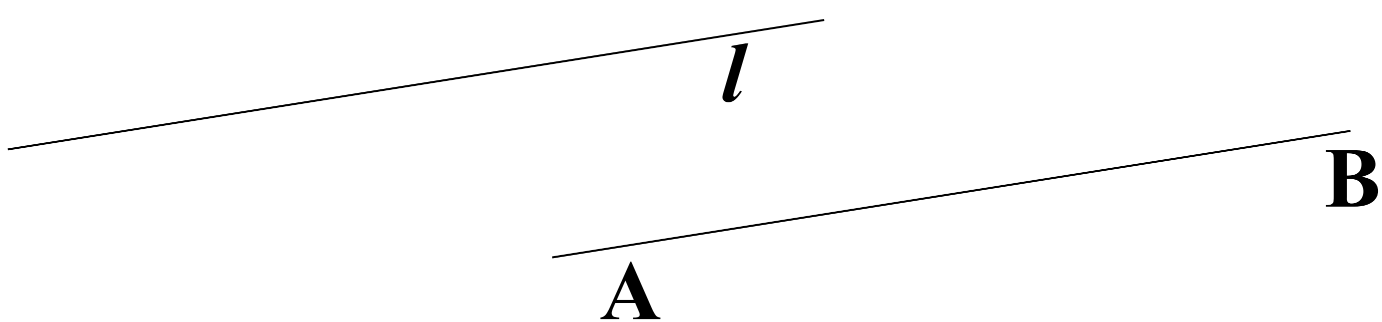
Наряду с основными фигурами мы будем рассматривать геометрические тела и их поверхности. Такие, как: куб, параллелепипед, призма, пирамида.

А также тела вращения: шар, сфера, цилиндр, конус.



Для обозначения точек как и в планиметрии используют прописные латинские буквы: А, В

Прямую обозначают одной строчной латинской буквой и двумя прописными латинскими буквами:



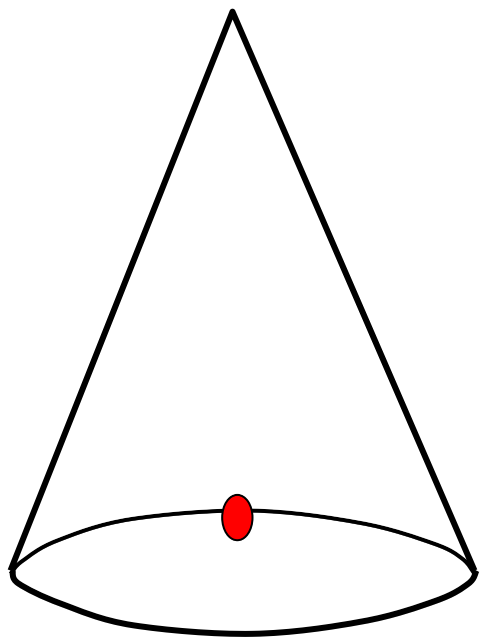
Плоскость в стереометрии обозначают греческими буквами, например:

$$\alpha \quad \beta \quad \gamma$$

А на рисунках чаще всего плоскость изображают в виде параллелограмма. Но следует понимать и представлять себе данную геометрическую фигуру как неограниченную во все стороны.

При изучении в курсе стереометрии геометрических тел пользуются их плоскими изображениями на чертеже.
Изображением пространственной фигуры служит ее проекция на плоскость.

Изображение конуса

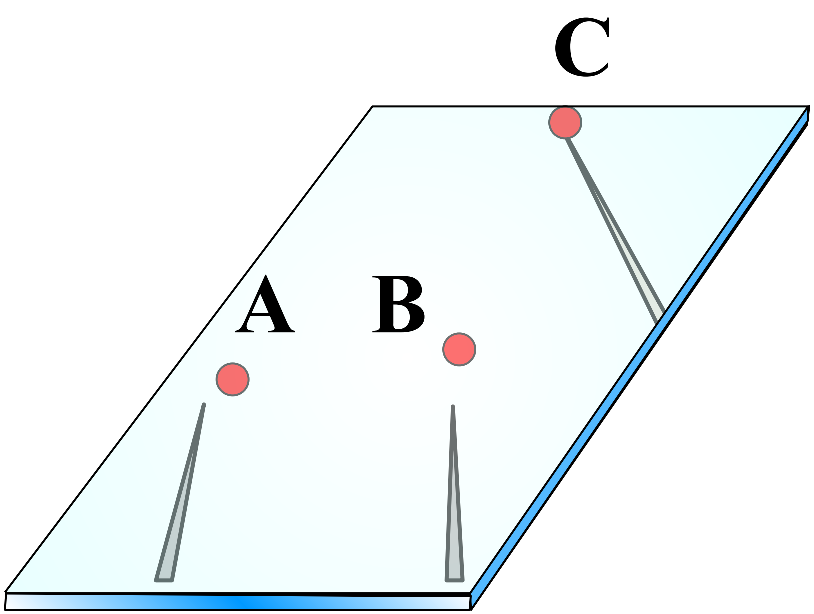


Изучая свойства геометрических фигур – воображаемых объектов, мы получаем представление о геометрических свойствах реальных предметов (их форме, взаимном расположении и т. д.) и можем использовать эти свойства в практической деятельности. В этом состоит прикладное значение геометрии.

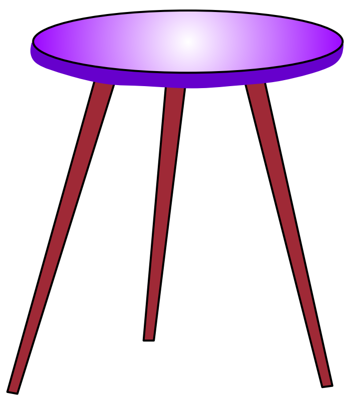
Геометрия, в частности стереометрия, широко используется в строительном деле, архитектуре, машиностроении, геодезии, во многих других областях науки и техники.

Основные свойства точек, прямых и плоскостей выражены в аксиомах. Существует множество аксиом стереометрии, в учебнике вам представлены три:

A_1. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.



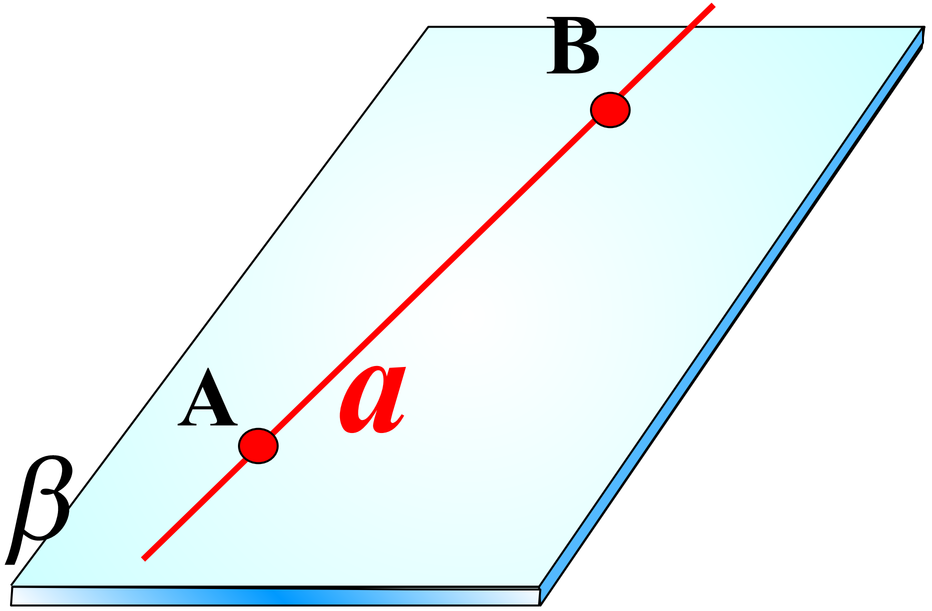
Самый простой пример к аксиоме A_1 из повседневной жизни:



Табурет с тремя ножками всегда идеально встанет на пол и не будет качаться. У табурета с четырьмя ножками бывают проблемы с устойчивостью, если ножки стула не одинаковые по длине.

Табурет качается, т. е. опирается на три ножки, а четвертая ножка (четвертая «точка») не лежит в плоскости пола, а висит в воздухе.

A_2. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.



$$A \in \beta$$

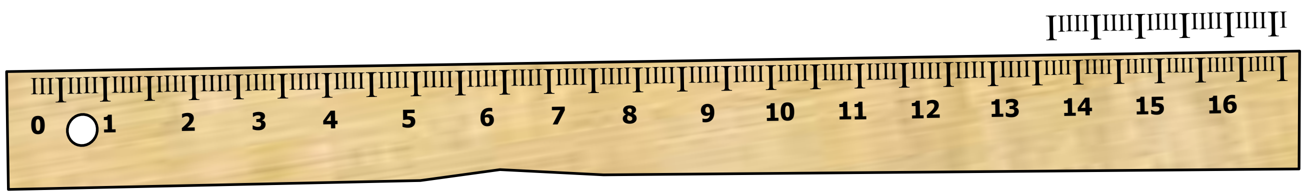
$$B \in \beta$$

$$a \subset \beta$$

Свойство, выраженное в аксиоме A_2, используется для проверки «ровности» чертежной линейки.

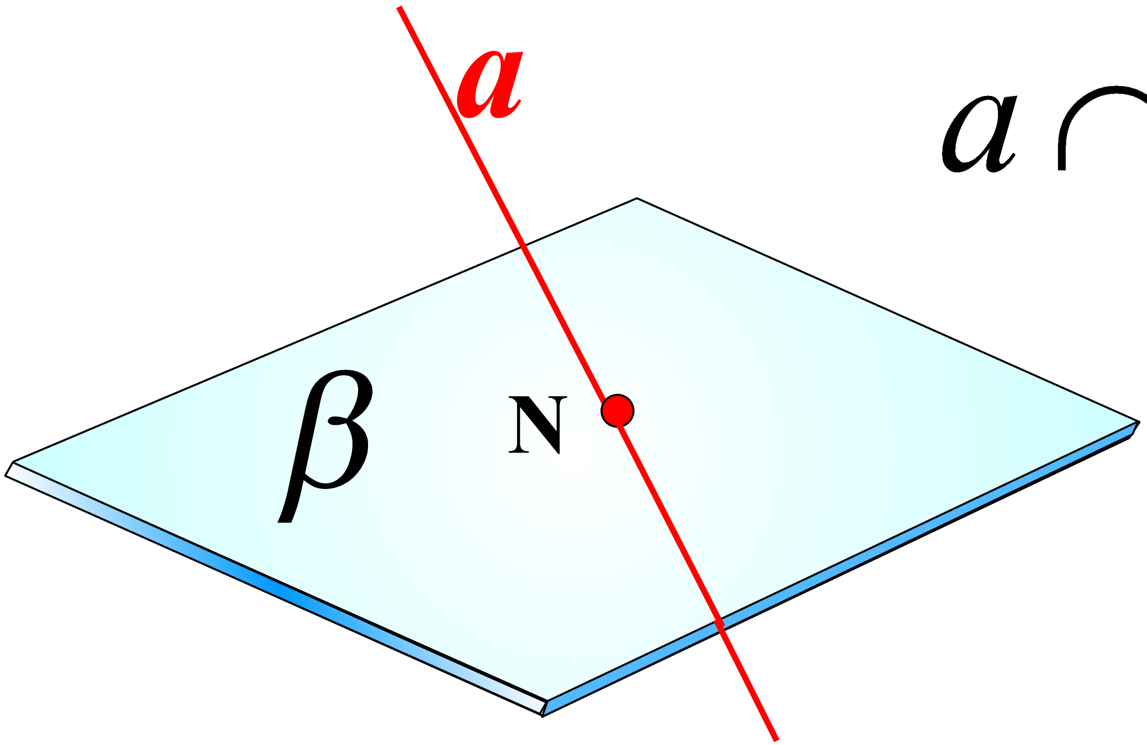
Линейку прикладывают краем к плоской поверхности стола. Если край линейки ровный, то он всеми своими точками прилегает к поверхности стола.

Если край неровный, то в каких-то местах между ним и поверхностью стола образуется просвет.



Следствия из аксиомы A_2:

1. Если прямая не лежит в данной плоскости, то она имеет с ней не более одной общей точки.
2. Если прямая и плоскость имеют только одну общую точку, то говорят, что они пересекаются.

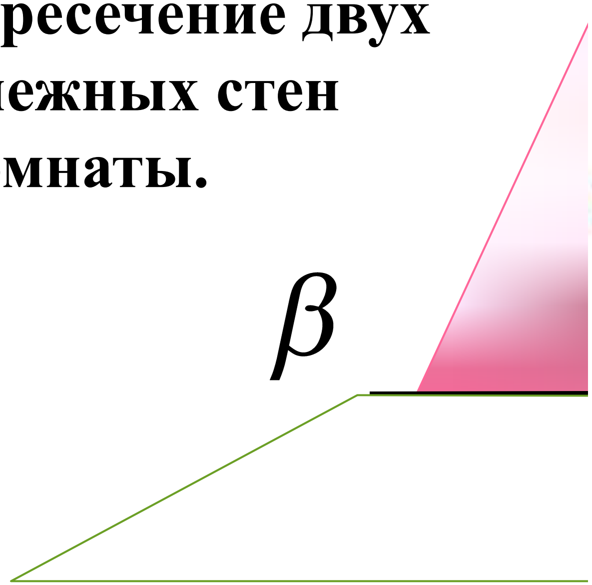


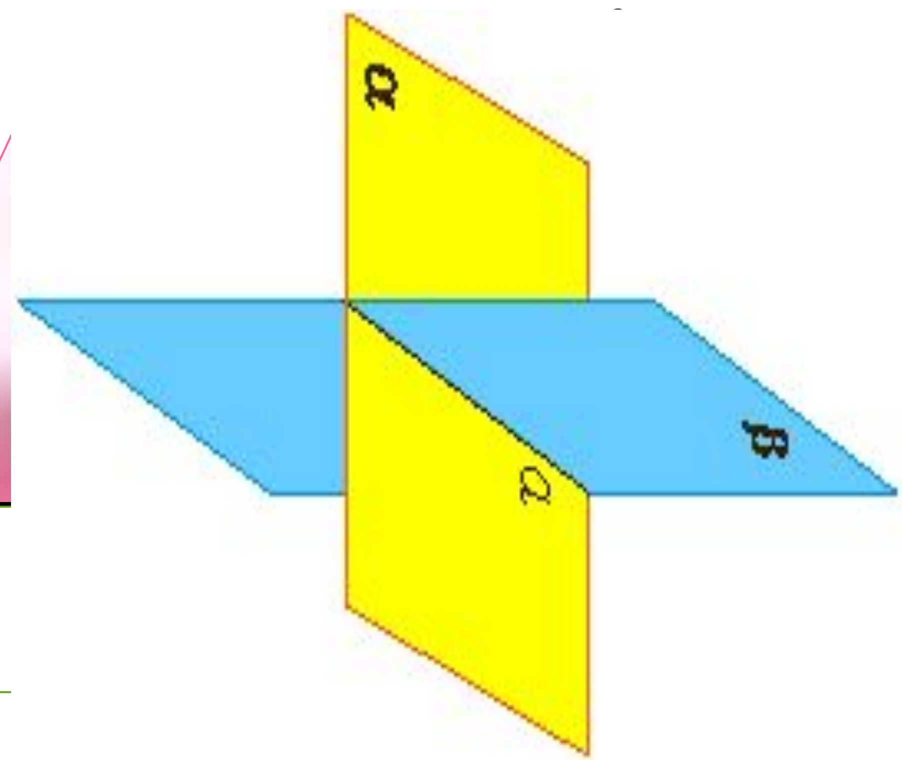
$$a \cap \beta = N$$

А$_3$. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

$$\beta \cap \gamma = a$$

Самый простой пример к аксиоме А$_3$ из повседневной жизни является пересечение двух смежных стен комнаты.

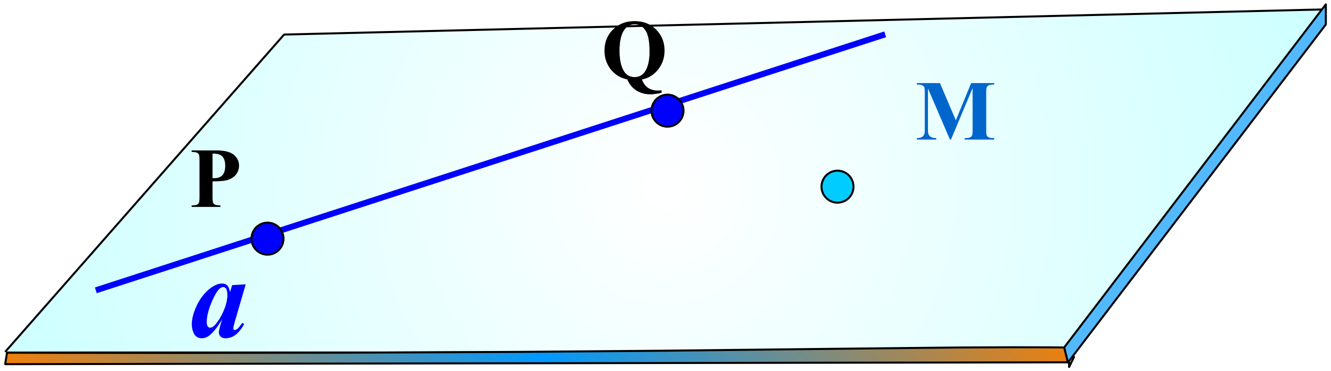




Следствия из аксиом

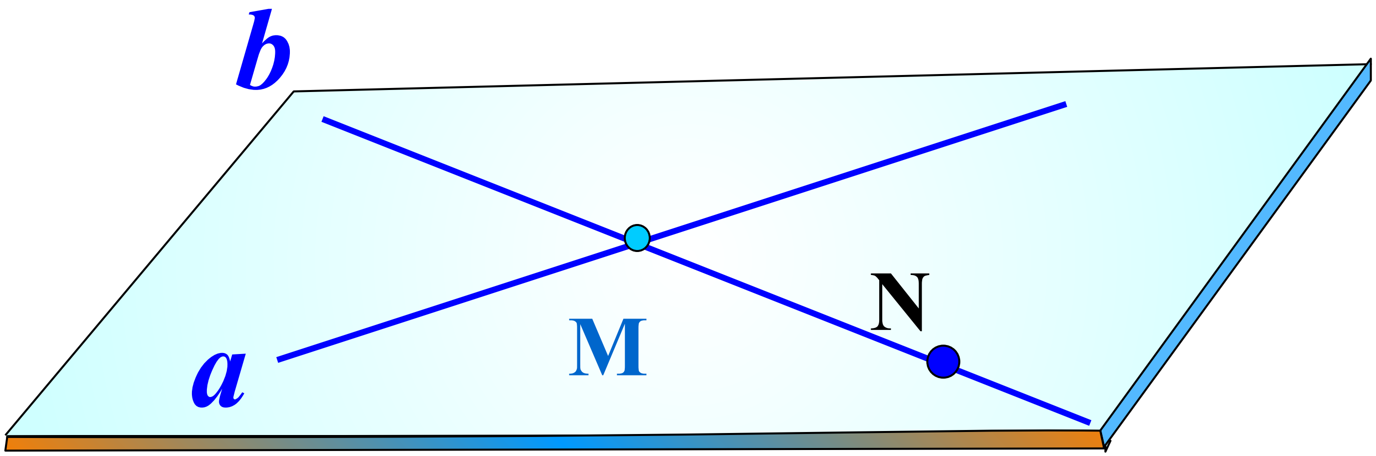
Теорема 1

Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.



Теорема 2

Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна



Сколько плоскостей можно провести?

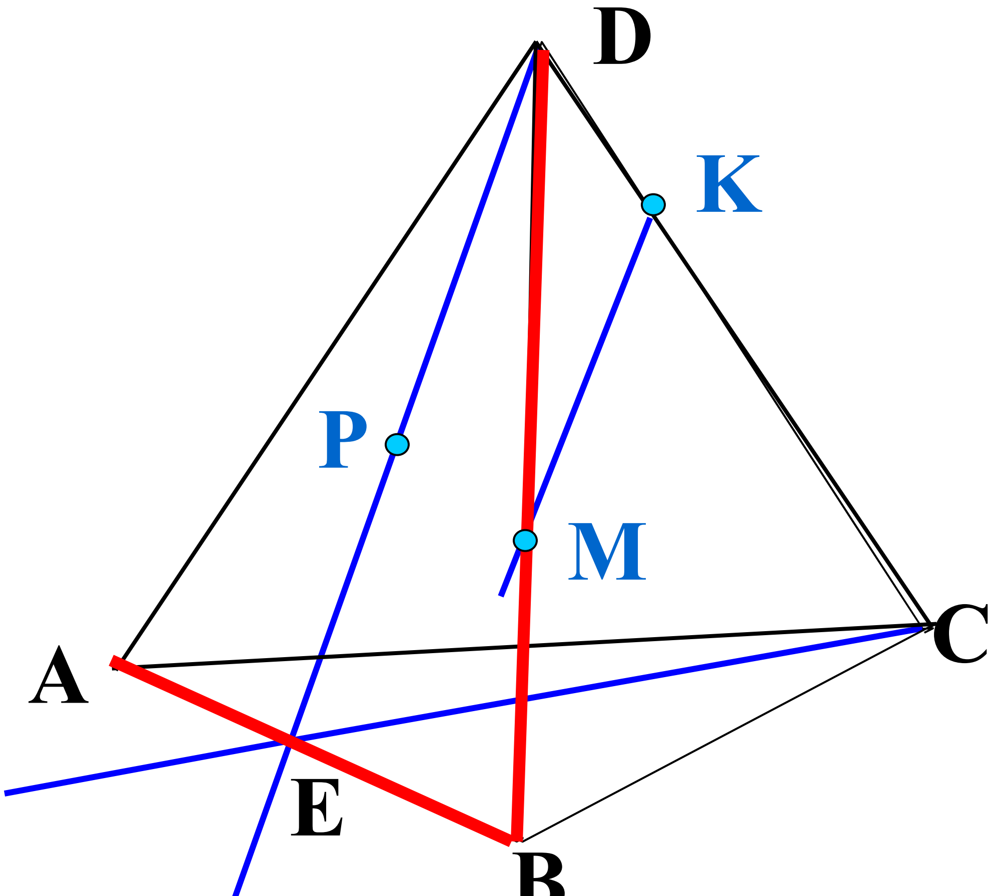
а) через одну точку?

б) через две точки?

в) через три точки, лежащие на одной прямой?

г) через три точки, не лежащих на одной прямой?

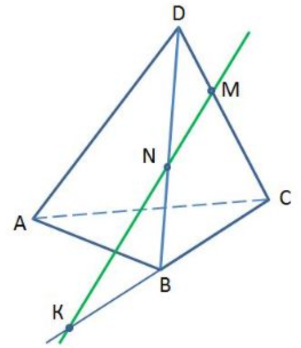
Задача 1



А). Назовите плоскости, в которых лежат прямые PE, MK, DB, AB, EC

Б). Назовите точки пересечения прямой DK с плоскостью ABC

В). Назовите точки, лежащие в плоскостях ADB и DBC



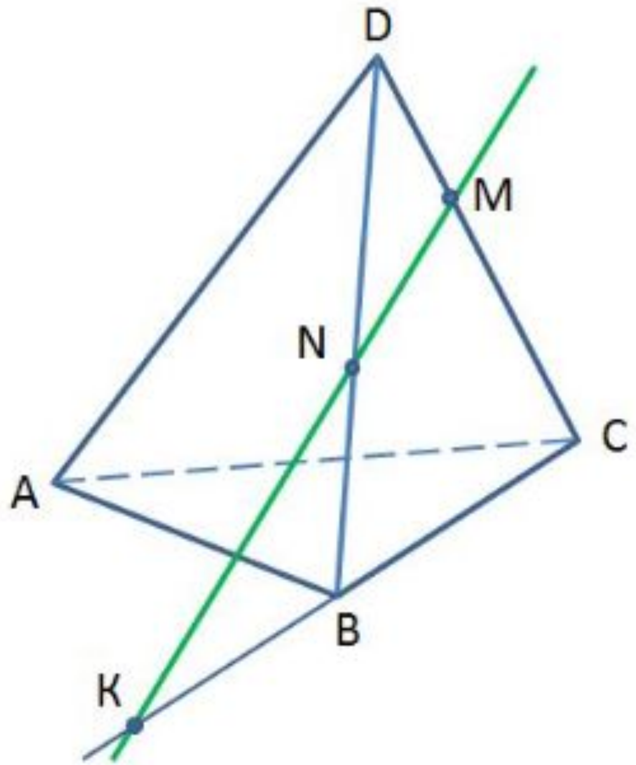
Каким плоскостям принадлежит точка К?

1) ABC и ABD

2) ABD и BCD

3) ACD и ABD

4) ABC и BCD



Задания

5) Докажите, что через 3 данные точки, лежащие на прямой проходит плоскость. Сколько существует таких плоскостей?

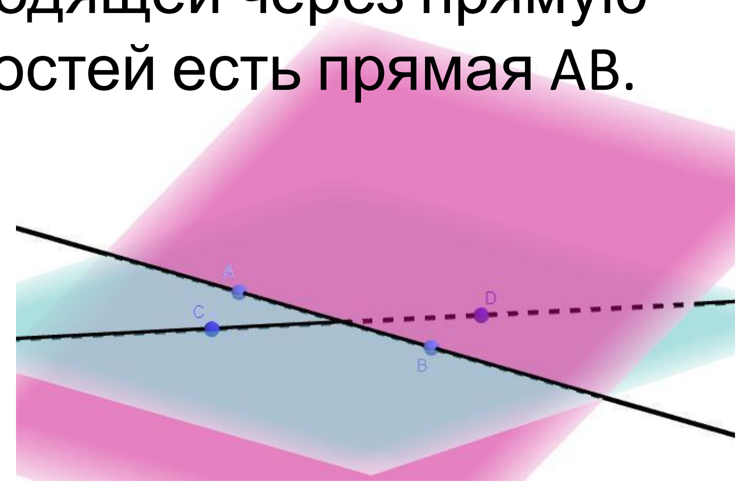
6) Три данные точки соединены попарно отрезками. Докажите, что все отрезки лежат одной плоскости.

?)Прямые АВ и CD пересекаются. Через прямую АВ проведена плоскость. Назовите линию пересечения данной плоскости с плоскостью ВCD.

1. По теореме через две прямые, которые пересекаются, проходит единственная плоскость, тогда так как по условию AB ∩ CD, то пересекающиеся прямые AB и CD задают единственную плоскость.

2. Т.к точки B,C,D принадлежат прямым AB и CD, то точки B,C,D задают ту же плоскость, что и пересекающиеся прямые AB и CD.

3. По аксиоме стереометрии если две точки принадлежат плоскости, то и вся прямая принадлежит плоскости, тогда так как точки A и B принадлежат плоскости BCD и плоскости проходящей через прямую AB, то линия пересечения плоскостей есть прямая AB.



Домашняя работа

Уч. «Геометрия 10-11 кл» Л.С. Атанасян знать теорию 4-7 стр.

Стр.7-8 № 1, №10, №14

2.2 Параллельность прямых, прямой и плоскости.

- Параллельные прямые в пространстве
- Параллельность 3 прямых
- Параллельность прямой и плоскости

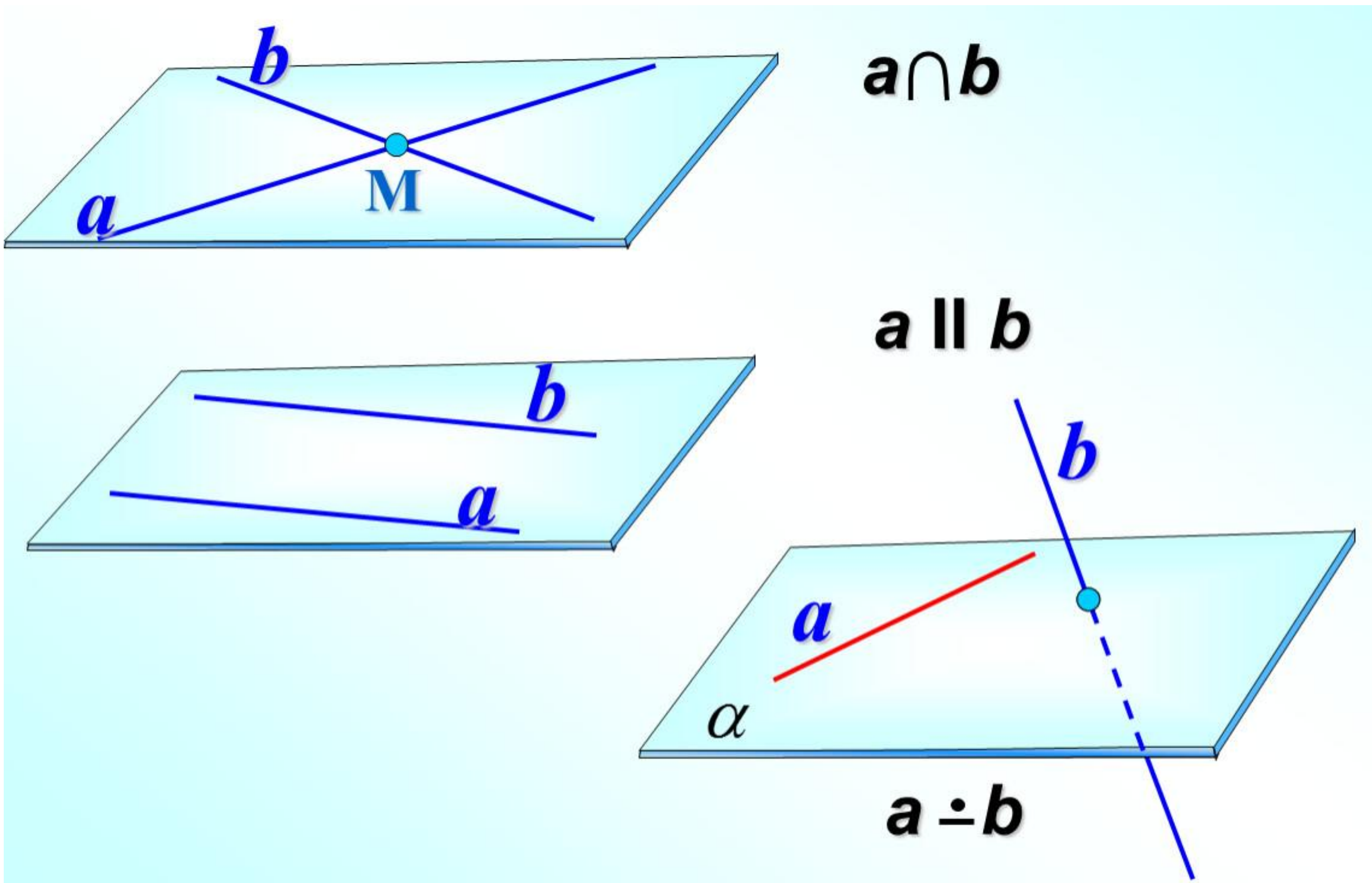
Основные понятия стереометрии

- Точка
- Прямая
- Плоскость
- Пространство

1. Случаи расположения:

А) точки и прямой
Б) точки и плоскости
В) прямой и плоскости
Г) 2 плоскостей
Д) 2 прямых

Взаимное расположение прямых в пространстве



2 прямые

Находятся в одной плоскости:

- Пересекаются – имеют 1 общую точку
- Параллельны, не имеют общих точек

Находятся в разных плоскостях:

- Скрещивающиеся

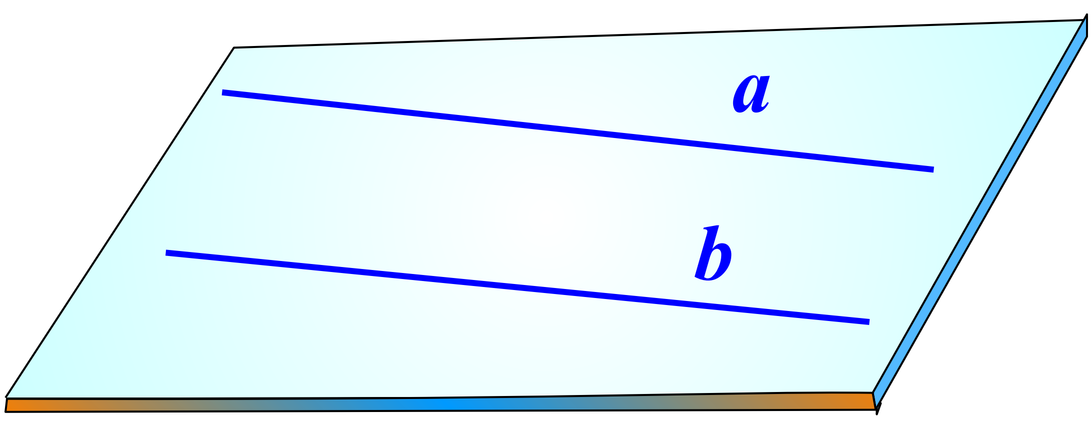
Две прямые называются **скрещивающимися**, если они не лежат в одной плоскости

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Две прямые в пространстве называются параллельными, если соблюдается 2 условия:

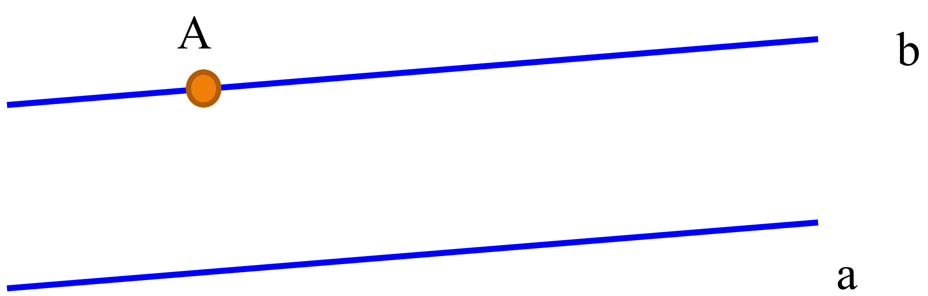
1) они лежат в одной плоскости и

2) не пересекаются



Теорема

Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая **параллельная** данной и притом только **одна**.



Параллельность 3 прямых

Лемма:

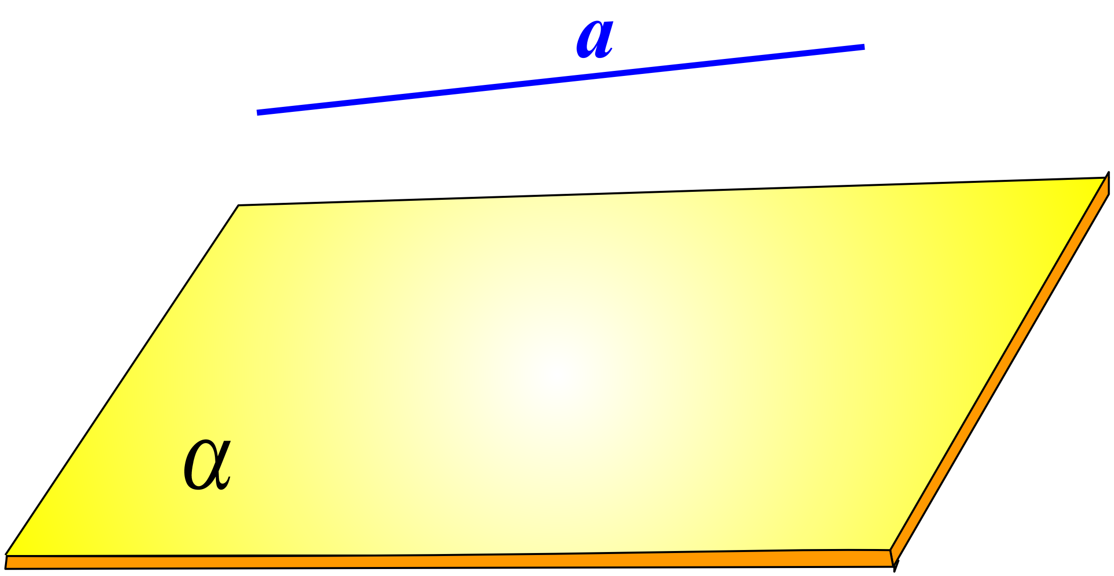
Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.

Теорема:

Если 2 прямые параллельны третьей прямой, то они паралельны.

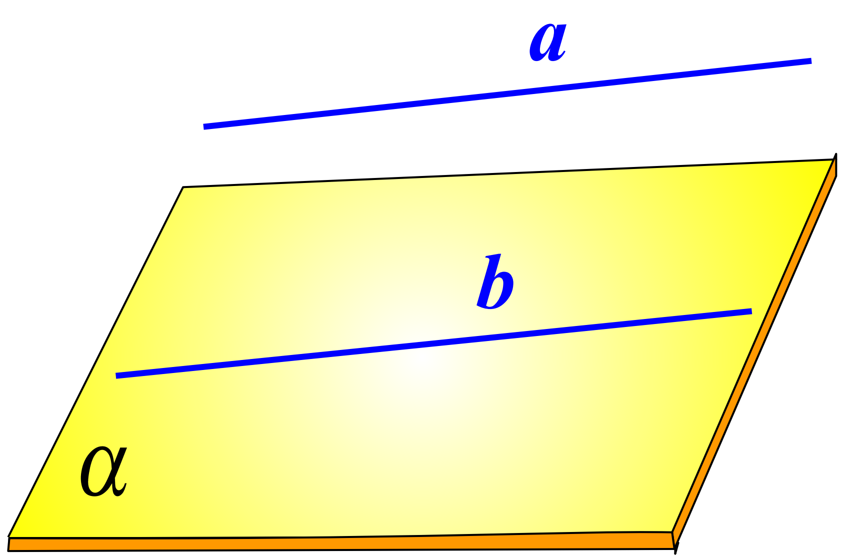
Параллельность прямой и плоскости.

Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек



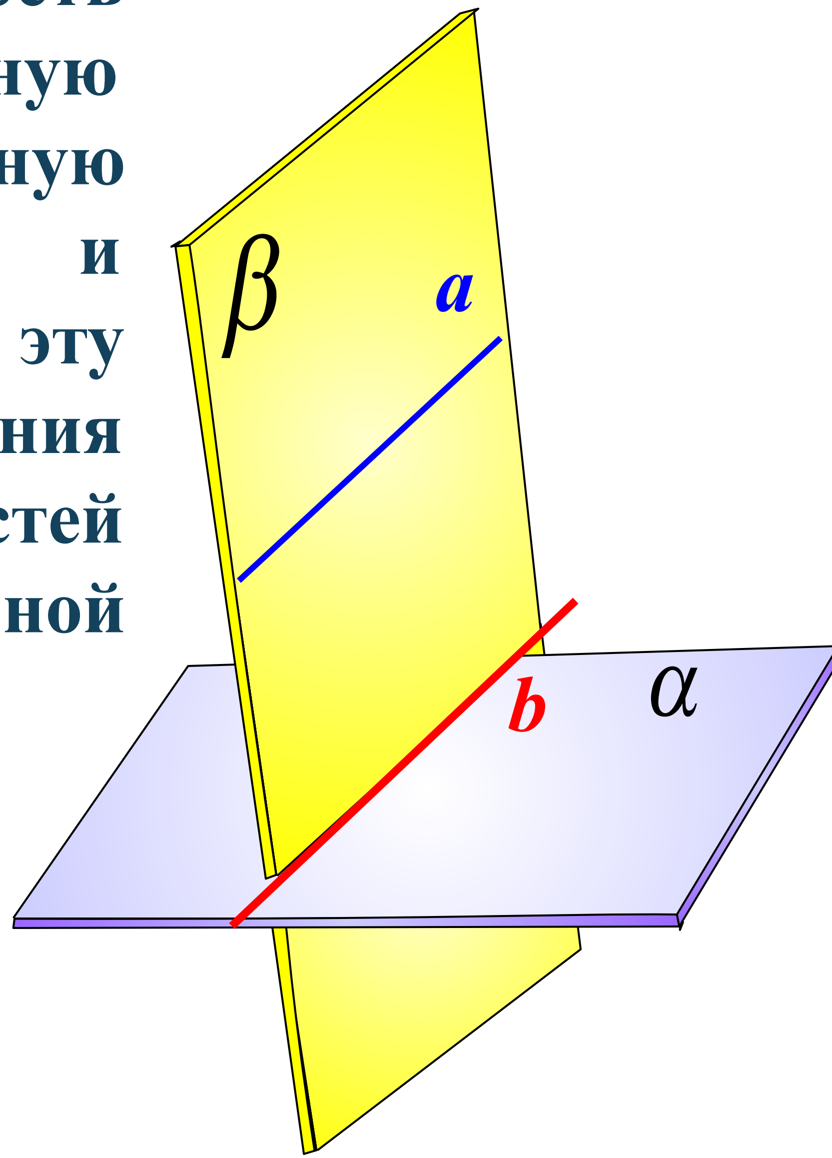
ТЕОРЕМА

Если прямая не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна этой плоскости.



Следствие 1^0

Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

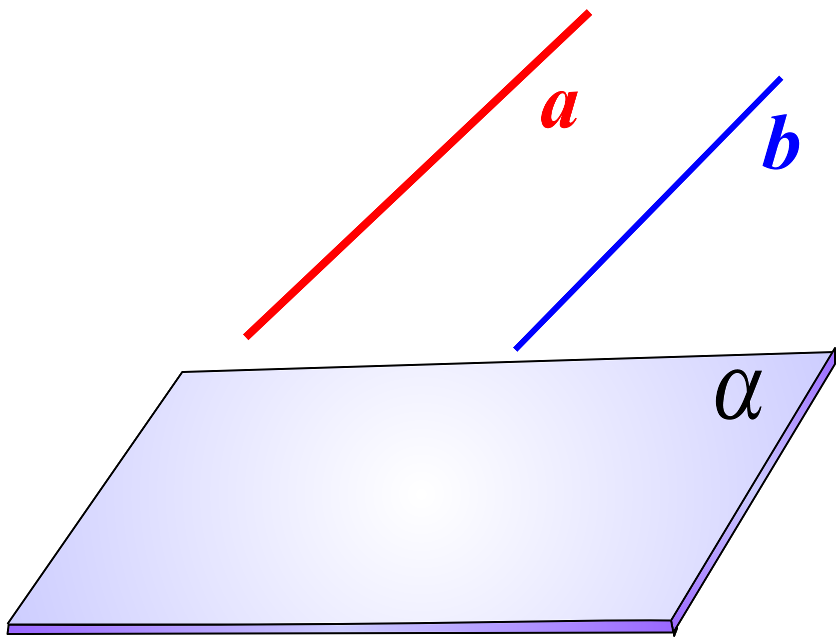


$a \parallel \alpha$

$b \parallel a$

Следствие 2^0

Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, то другая прямая либо также параллельна данной плоскости, либо лежит в этой плоскости.



$a \parallel b$

$a \parallel \alpha$

$b \parallel \alpha$ $\qquad$ $b \subset \alpha$

2 прямые

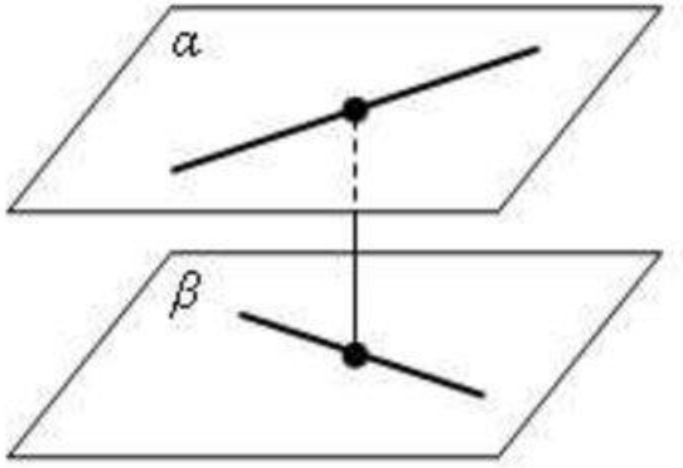
Находятся в одной плоскости:

- Пересекаются – имеют 1 общую точку
- Параллельны, не имеют общих точек

Находятся в разных плоскостях:

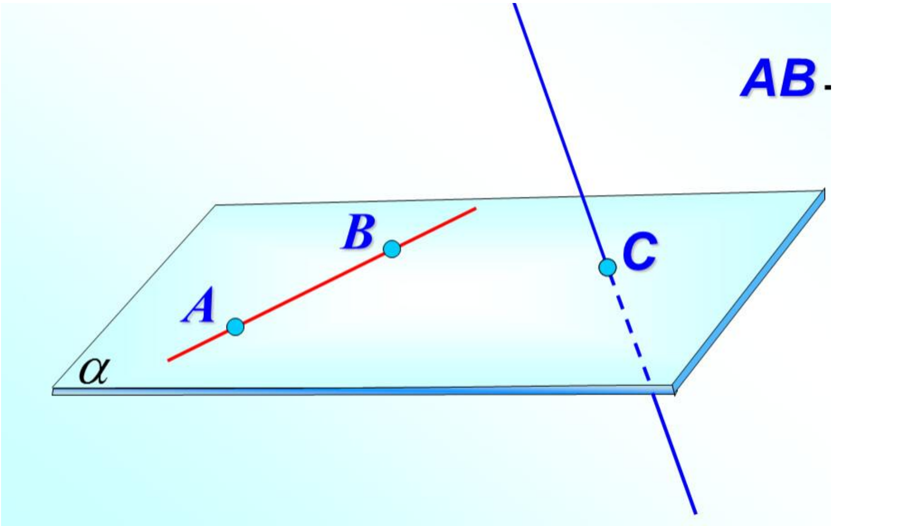
- Скрещивающиеся

Две прямые называются **скрещивающимися**, если они не лежат в одной плоскости



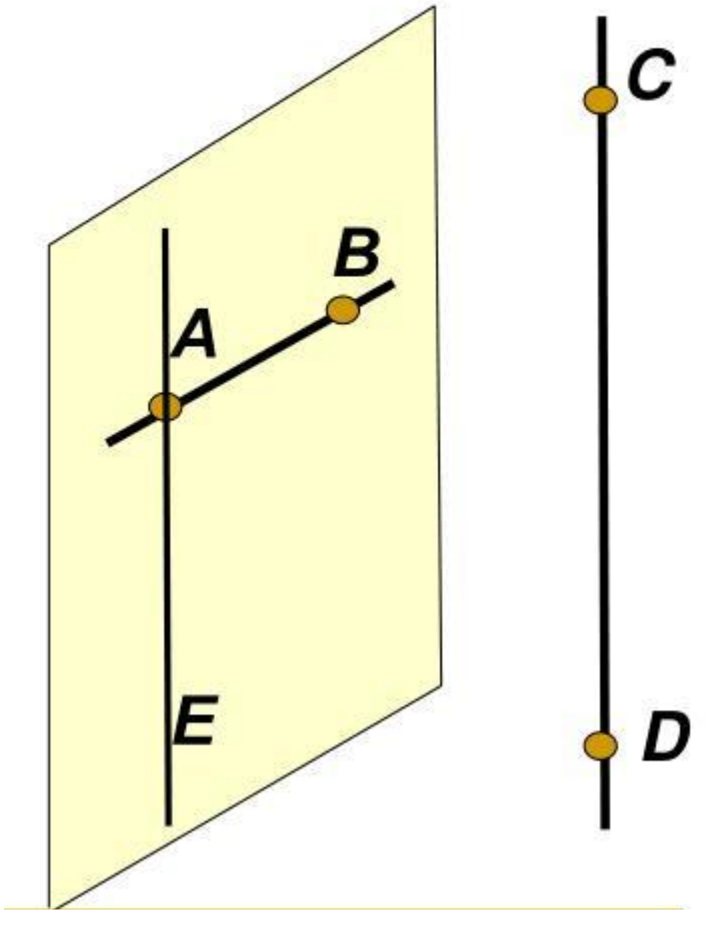
Теорема о скрещивающихся прямых

Признак: Если одна из двух прямых лежит в плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то эти прямые скрещиваются.



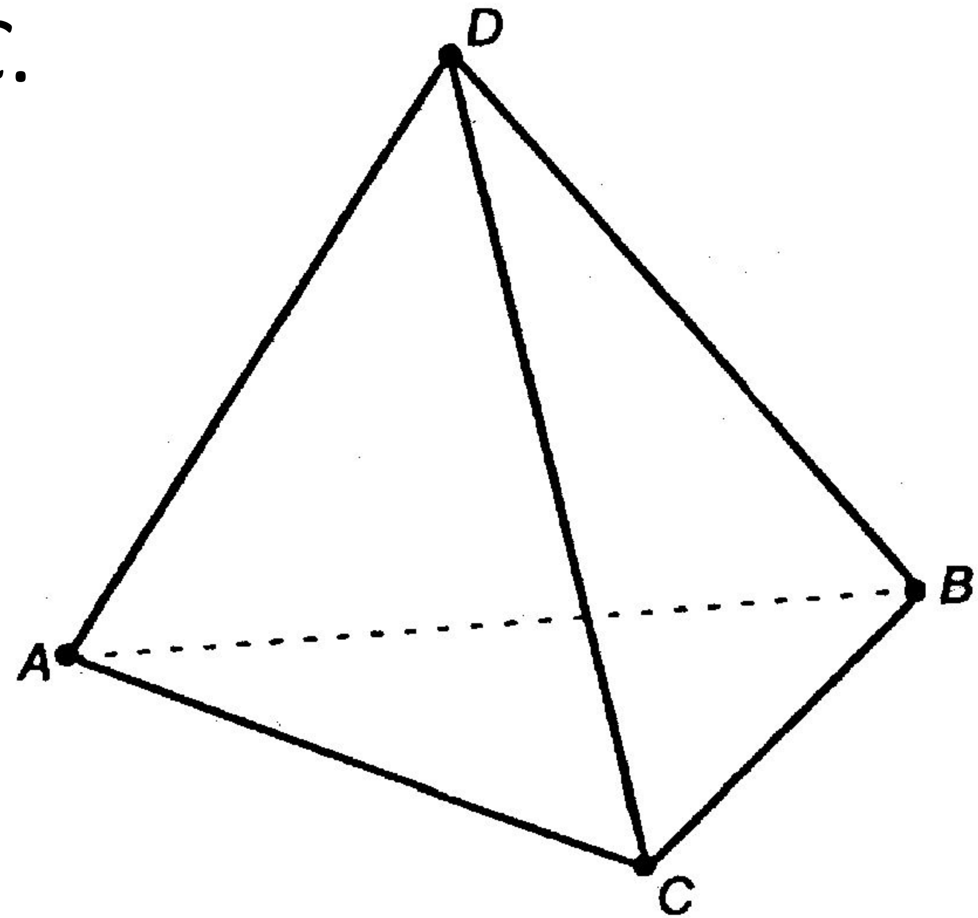
Теорема.

Через каждую из 2 скрещивающихся прямых можно проходит плоскость, параллельная другой прямой , и притом только одна.



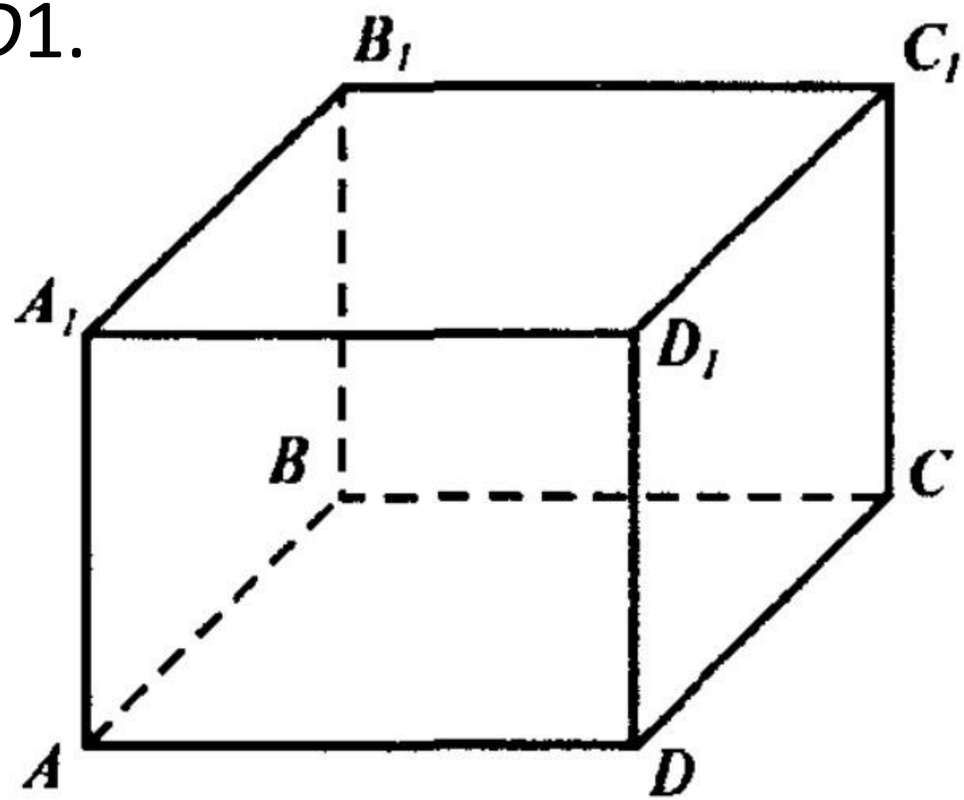
Примеры скрещивающихся прямых

Назовите три пары скрещивающихся прямых, на которых лежат ребра тетраэдра *DABC*.

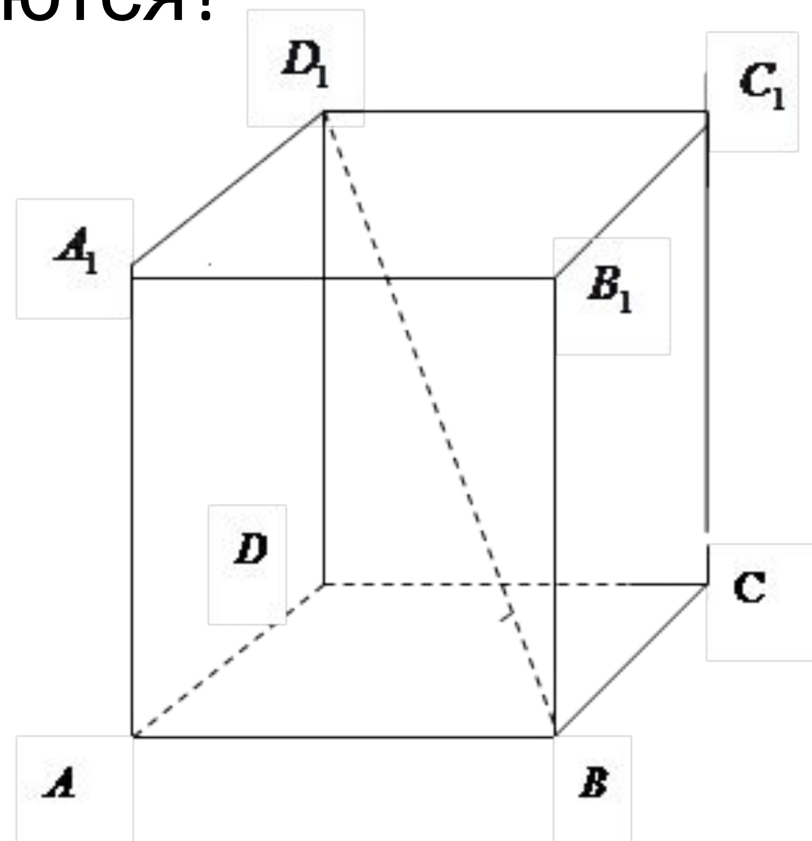


Решение задач.

Укажите все пары параллельных прямых, на которых лежат ребра параллелепипеда *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1.



В параллелепипеде выбрана диагональ. Рассмотрим диагонали граней, которые скрещиваются с ней. А какие пересекаются?

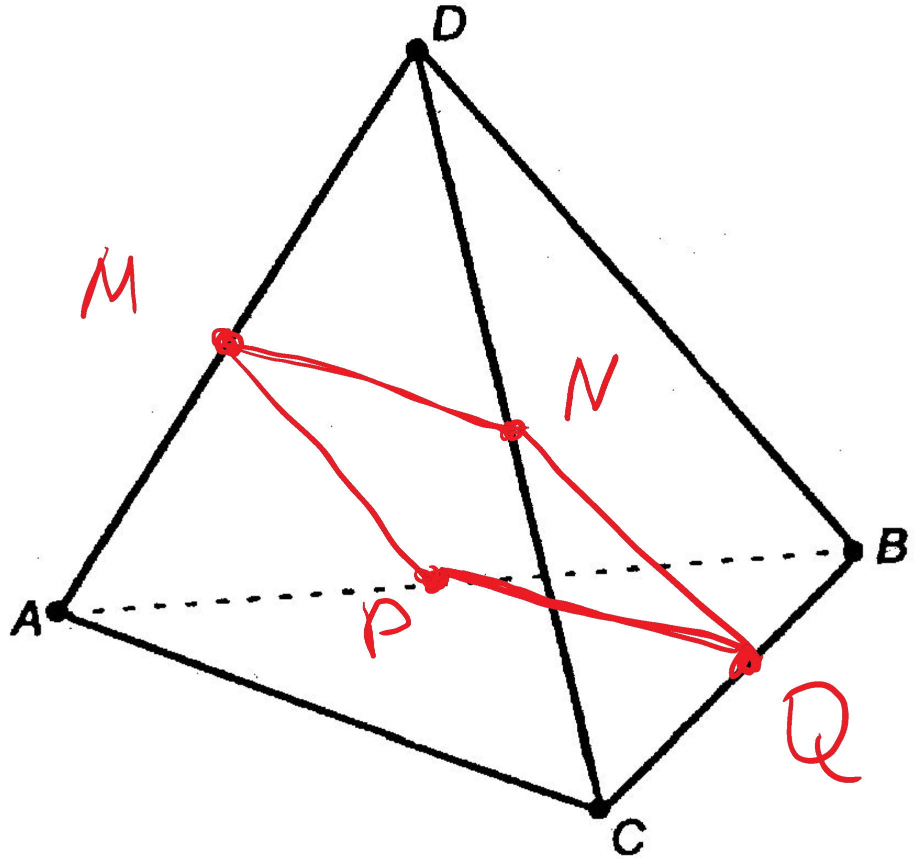


Параллельные прямые a и b лежат в плоскости □. Докажите, что прямая с, пересекающая прямые а и , также лежит в плоскости □.

Докажите, что прямые a, b, c лежат в одной плоскости, если прямые c и b пересекаются, а прямая a пересекает прямую b и параллельна прямой c.

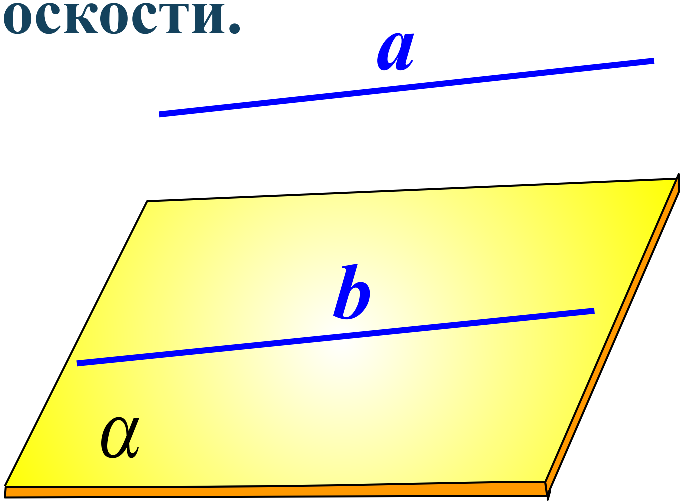
На рисунке точки M,N, Q,P – середины отрезков DA, DC, BC и AB

Найдите периметр четырёхугольника MNQP, если AD = 12 см, BC = 14см



ТЕОРЕМА

Если прямая не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна этой плоскости.



Через сторону АС треугольника АВС проведена плоскость □. Докажите, что прямая, проходящая через середины сторон АВ и ВС, параллельна плоскости

Задача: Плоскость α проходит через середины боковых сторон AB и CD трапеции ABCD — точки M и N.

а) Докажите, что AD II α.

б) Найдите BC, если AD = 10 см, MN= 8 см

Дано: $ABCD$ – трапеция; α – плоскость; $\alpha \cap AB$ в точке M; $\alpha \cap$ (в точке N; $AM = MB$; $CN = ND$; $MN = 8$ см; $AD = 10$ см (рис. 2).

а) *Доказать:* $AD \parallel \alpha$.

б) *Найти:* BC.

Доказательство: а) $MN \in \alpha$; MN – средняя линия трапеции $ABCD$; $MN \parallel BC$ и $MN \parallel AD$ по свойству средней линии. Значит, $AD \parallel \alpha$.

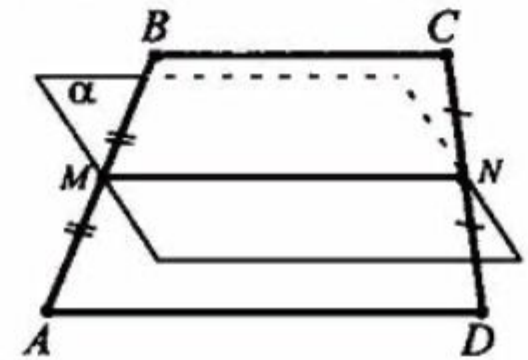
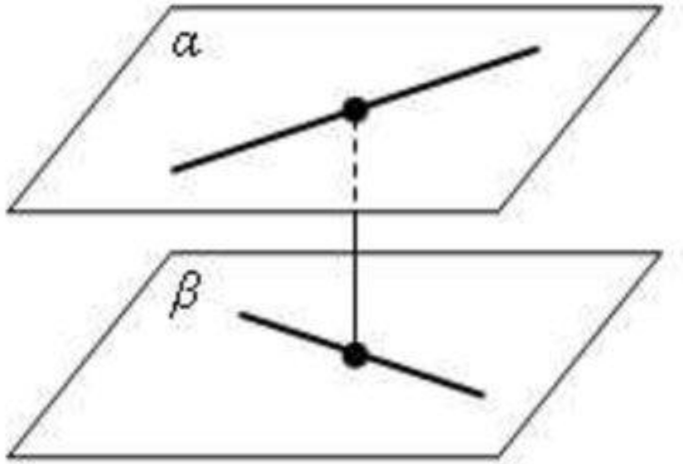


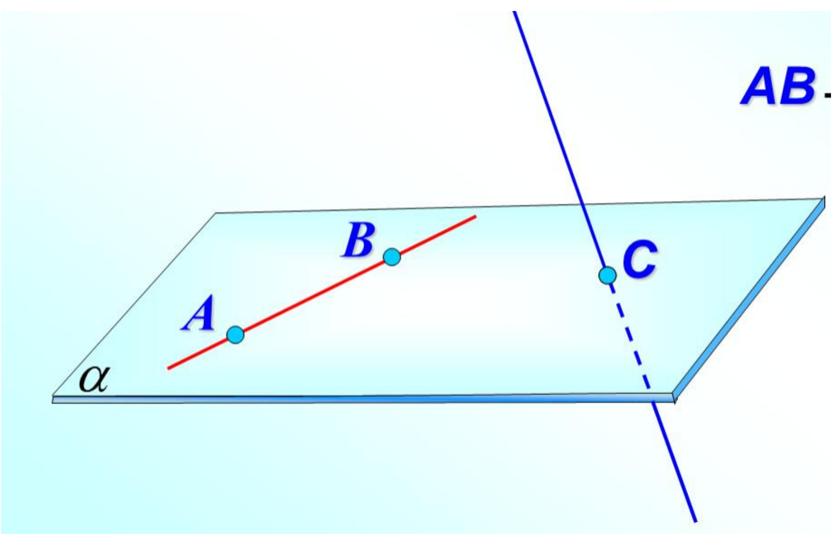
Рис. 2

Решение: б) $MN = \frac{1}{2}(BC + AD) \Rightarrow BC = 2MN - AD = 16 - 10 = 6$ (см).



Теорема о скрещивающихся прямых

Признак: Если одна из двух прямых лежит в плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то эти прямые скрещиваются.



Точка P лежит вне плоскости трапеции ABCD. Каково взаимное расположение прямых AP и DC? Сделайте рисунок.

Домашнее задание

Стр 13-14 № 18(а), 22, 24,

Стр 18 №34 (г,е)