Математический анализ

Раздел: Определенный интеграл

Тема: ***Определенный интеграл и его свойства. Формула Ньютона - Лейбница***

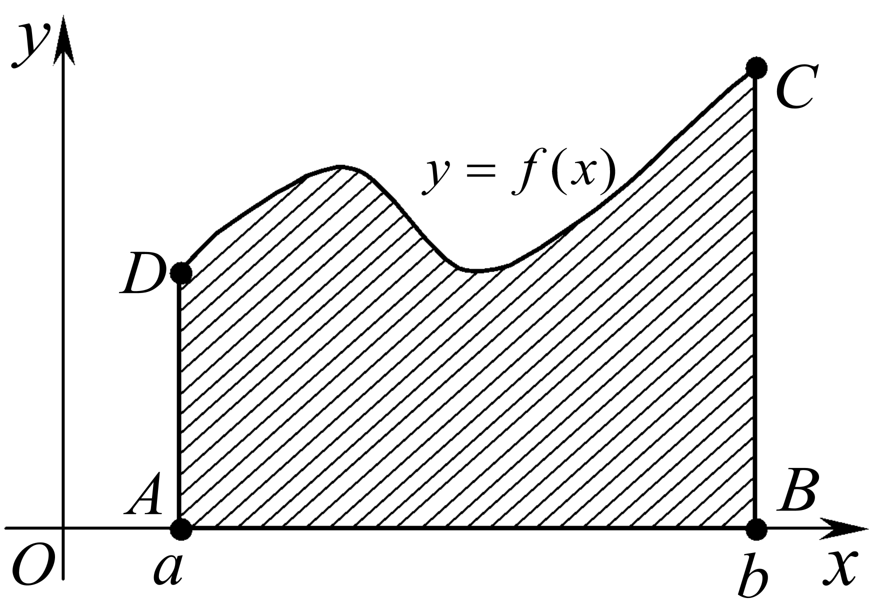
ГЛАВА I. Определенный интеграл и его приложения

§1. Определенный интеграл и его свойства

1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла

Пусть $f(x)$ – непрерывная на отрезке $[a;b]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Область* $(\sigma) \in xOy$, *ограниченная отрезком* $[a;b]$ *оси* Ox, *прямыми* $x = a$, $x = b$ *и кривой* $y = f(x)$, *называется* ***криволинейной трапецией с основанием*** $[a;b]$.

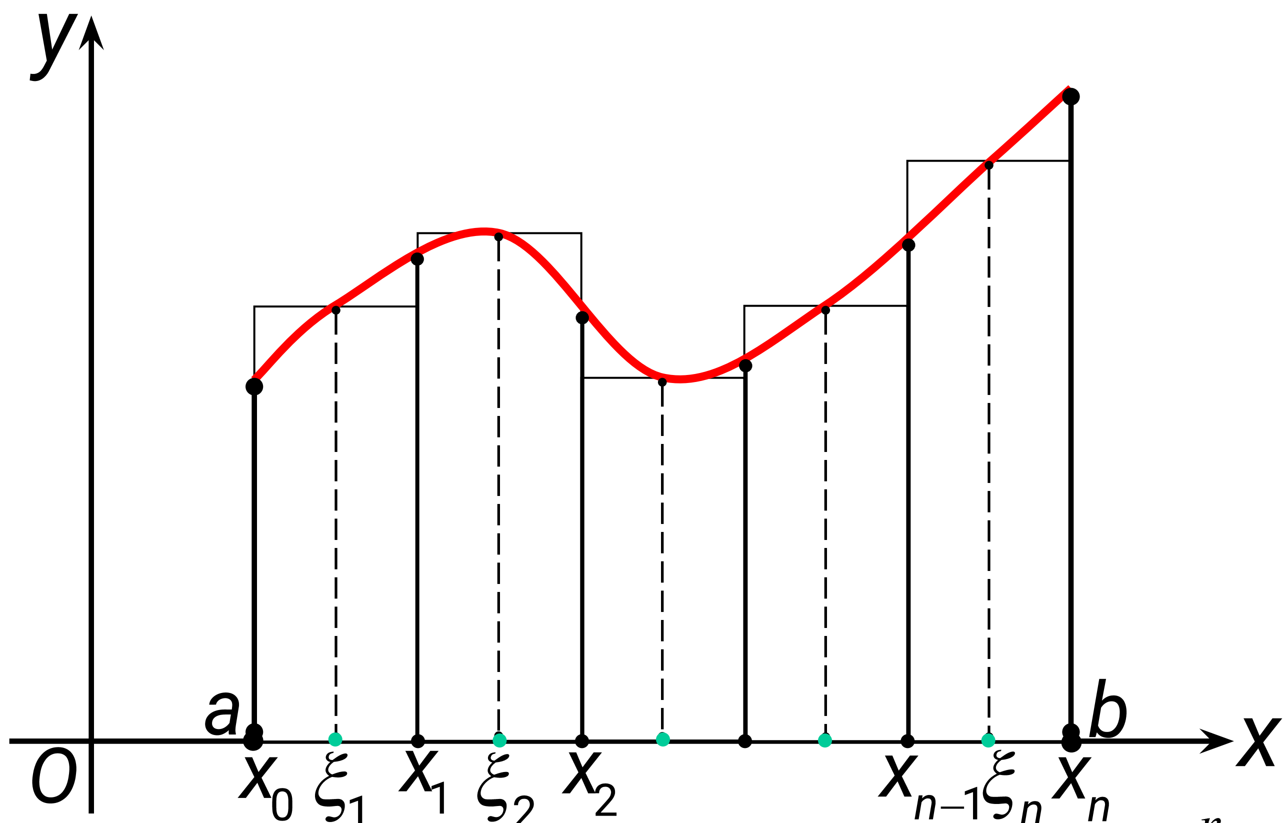


Замечание. Прямые $x = a$ и $x = b$ могут вырождаться в точки

ЗАДАЧА 1 (о площади криволинейной трапеции).

Пусть $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a;b]$.

Найти площадь S криволинейной трапеции (σ) .



Если $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ – длина отрезка $[x_{i-1} ; x_i]$, то $S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

Пусть $\lambda = \max |\,[x_{i-1} ; x_i]\,|$. Тогда

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

ЗАДАЧА 2 (о пройденном пути).

Пусть точка движется по кривой и ее скорость изменяется по закону $v = f(t)$.

Найти путь S, пройденный точкой за промежуток времени $[T_1\,;\,T_2]$.

РЕШЕНИЕ.

1) Разобьем $[T_1\,;\,T_2]$ на n частей точками

$$t_0 = T_1\,,\ t_1\,,\ t_2\,,\ \ldots\,,\ t_n = T_2 \quad (\text{где } t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n\,)$$

2) Выберем на $[t_{i-1}\,;\,t_i]$ $(i = 1,2,\ldots n)$ произвольную точку τ_i.

Если $[t_{i-1};\,t_i]$ мал, то можно считать, что точка двигалась в течение этого времени равномерно со скоростью $f(\tau_i)$.

$\Rightarrow$ пройденное расстояние: $f(\tau_i)\cdot\Delta t_i$, где $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.

$$\Rightarrow \quad S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)\Delta t_i$$

3) Пусть $\lambda = \max|\,[t_{i-1};\,t_i]\,|$. Тогда

$$S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)\Delta t_i$$

2. Определенный интеграл: определение и условие его существования

Пусть $f(x)$ задана на отрезке $[a;b]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

1) Разобьем $[a;b]$ на n частей точками

$$x_0 = a\ ,\ x_1\ ,\ x_2\ ,\ \ldots\ ,\ x_n = b\ ,$$

где $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

2) На каждом отрезке $[x_{i-1}\ ;x_i]$ $(i = 1,2,\ldots n)$ выберем произвольную точку ξ_i и найдем произведение

$$f(\xi_i)\cdot\Delta x_i\ ,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ – длина отрезка $[x_{i-1}\ ;x_i]$.

Сумма

$$I_n(x_i,\xi_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

называется ***интегральной суммой*** для функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Пусть $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \left| [x_{i-1}; x_i] \right|$

Число I *называется* ***пределом интегральных сумм*** $I_n(x_i, \xi_i)$ *при* $\lambda \to 0$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что для любого разбиения отрезка* $[a;b]$ *у которого* $\lambda < \delta$, *при любом выборе точек* ξ_i *выполняется неравенство*

$$| I_n(x_i, \xi_i) - I | < \varepsilon .$$

Если существует предел интегральных сумм $I_n(x_i, \xi_i)$ *при* $\lambda \to 0$, *то его называют* ***определенным интегралом от функции*** $f(x)$ ***на отрезке*** $[a;b]$ (*или* ***в пределах от a до b***).

ОБОЗНАЧАЮТ: $\int\limits_a^b f(x)dx$

Называют: $[a;b]$ – ***промежуток интегрирования***,

a и b – ***нижний*** и ***верхний предел интегрирования***,

$f(x)$ – ***подынтегральная функция***,

$f(x)dx$ – ***подынтегральное выражение***,

x – ***переменная интегрирования***.

Функция $f(x)$, для которой на $[a;b]$ существует определенный интеграл, называется ***интегрируемой*** на этом отрезке.

ТЕОРЕМА 1 (необходимое условие интегрируемости функции на $[a;b]$).

Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, то она на этом отрезке ограничена.

ТЕОРЕМА 2 (достаточное условие интегрируемости функции на $[a;b]$).

Для интегрируемости функции $f(x)$ на $[a;b]$, достаточно выполнения одного из условий:

1) $f(x)$ *непрерывна на* $[a;b]$;
2) $f(x)$ *ограничена на* $[a;b]$ *и имеет на* $[a;b]$ *конечное число точек разрыва*;
3) $f(x)$ *монотонна и ограничена на* $[a;b]$.

Замечание. Определяя определенный интеграл, полагали $a < b$.

Полагаем, что:

1) если $a > b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$$

2) если $a = b$, то

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Такое расширение определения согласуется с определением определенного интеграла и его геометрическим (физическим) смыслом.

3. Свойства определенного интеграла

1) Геометрический смысл определенного интеграла.

Если $f(x)$ – непрерывна на $[a;b]$ и $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = S,$$

где S – площадь криволинейной трапеции с основанием $[a;b]$ и ограниченной сверху кривой $y = f(x)$.

2) Физический смысл определенного интеграла

Если функция $v = f(t)$ задает скорость движущейся точки в момент времени t , то

$$\int_{T_1}^{T_2} v(t)dt$$

определяет путь S, пройденный точкой за промежуток времени $[T_1 ; T_2]$.

3) $\int_a^b dx = b - a$.

4) Постоянный множитель k $(k \neq 0)$ можно выносить за знак определенного интеграла, т.е.

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

5) Определенный интеграл от алгебраической суммы двух (конечного числа) функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\int_a^b (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b \varphi(x)dx$$

6) Если отрезок интегрирования $[a;b]$ разбит точкой c на две части $[a;c]$ и $[c;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad (1)$$

Замечание. Формула (1) будет иметь место и в том случае, когда точка c лежит не внутри отрезка $[a;b]$, а вне его.

7) Если $f(x) > 0$ $(f(x) \geq 0)$ $\forall x \in [a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx > 0 \quad \left(\int_a^b f(x)dx \geq 0 \right)$$

8) Если $f(x) \leq \phi(x)$ $\forall x \in [a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

9) Следствие свойств 8 и 3.

Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

10) Если $f(x)$ – нечетная функция, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$

Если $f(x)$ – четная функция, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

11) Теорема о среднем.

Если функция $f(x)$ *непрерывна на* $[a;b]$, *то в интервале* $(a;b)$ *найдется такая точка* c, *что справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\cdot f(c)$$

§2. Вычисление определенных интегралов

1. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница

Пусть $f(t)$ непрерывна на $[a;b]$.

Тогда $f(t)$ непрерывна на $\forall [a;x]$, где $a \le x \le b$.

$\Rightarrow$ $f(t)$ интегрируема на $\forall [a;x]$, где $a \le x \le b$.

Рассмотрим интеграл $\int\limits_a^x f(t)dt$

Имеем: $\int\limits_a^x f(t)dt = \Phi(x)$, $\quad D(\Phi(x)) = [a;b]$.

ТЕОРЕМА 1 (о производной определенного интеграла по переменному верхнему пределу).

Функция $\Phi(x)$ дифференцируема на $[a;b]$, причем

$$\Phi'(x) = f(x).$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Любая непрерывная на $[a;b]$ функция имеет на $[a;b]$ первообразную.

Имеем: $\Phi(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на $[a;b]$.
Пусть $F(x)$ – еще одна первообразная для $f(x)$ на $[a;b]$.
Тогда $F(x)$ и $\Phi(x)$ будут отличаться постоянным слагаемым (см. §23 теорема 2, I семестр), т.е.

(1) $$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C,$$

где $a \le x \le b$, C – некоторое число.

Полагаем $x = a$. Тогда из (1) получим

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C,$$

$$\Rightarrow \ 0 = F(a) + C ,$$

$$\Rightarrow \ C = -F(a) .$$

Следовательно, (1) можно переписать в виде

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Полагая $x = b$ получаем:

(2) $$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Формула (2) называется ***формулой Ньютона – Лейбница***.

Разность $F(b) - F(a)$ принято сокращенно записывать в виде

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Символ $\Big|_a^b$ называют *знаком двойной подстановки*.

Используя это обозначение, формулу (2) можно переписать в виде

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Замечание. В формуле (2) можно взять любую из первообразных функции $f(x)$, так как $F(b) - F(a)$ не зависит от выбора первообразной.