

Тема: *Определенный интеграл и его свойства.*
Формула Ньютона - Лейбница

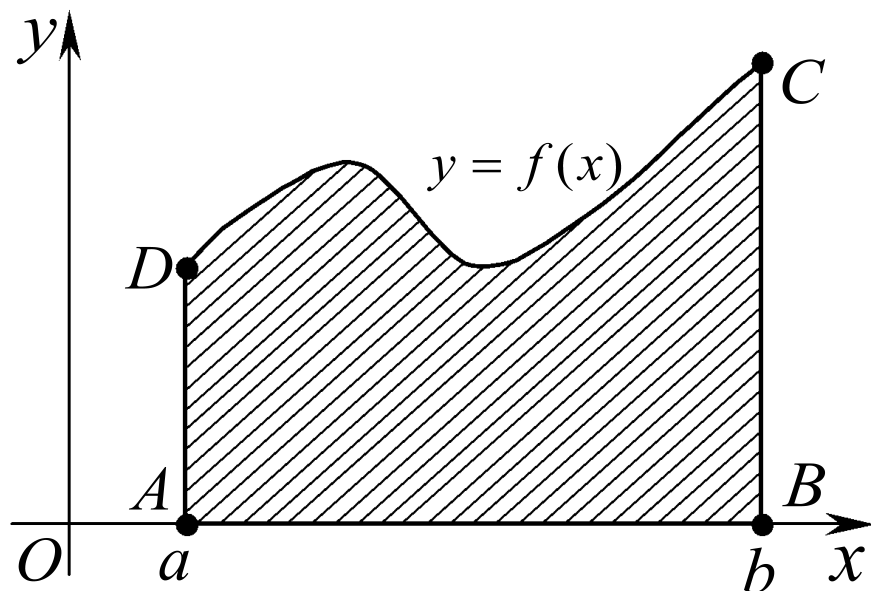
ГЛАВА I. Определенный интеграл и его приложения

§1. Определенный интеграл и его свойства

1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла

Пусть $f(x)$ – непрерывная на отрезке $[a;b]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Область $(\sigma) \in xOy$, ограниченная отрезком $[a;b]$ оси Ox , прямыми $x = a$, $x = b$ и кривой $y = f(x)$, называется **криволинейной трапецией с основанием $[a;b]$** .

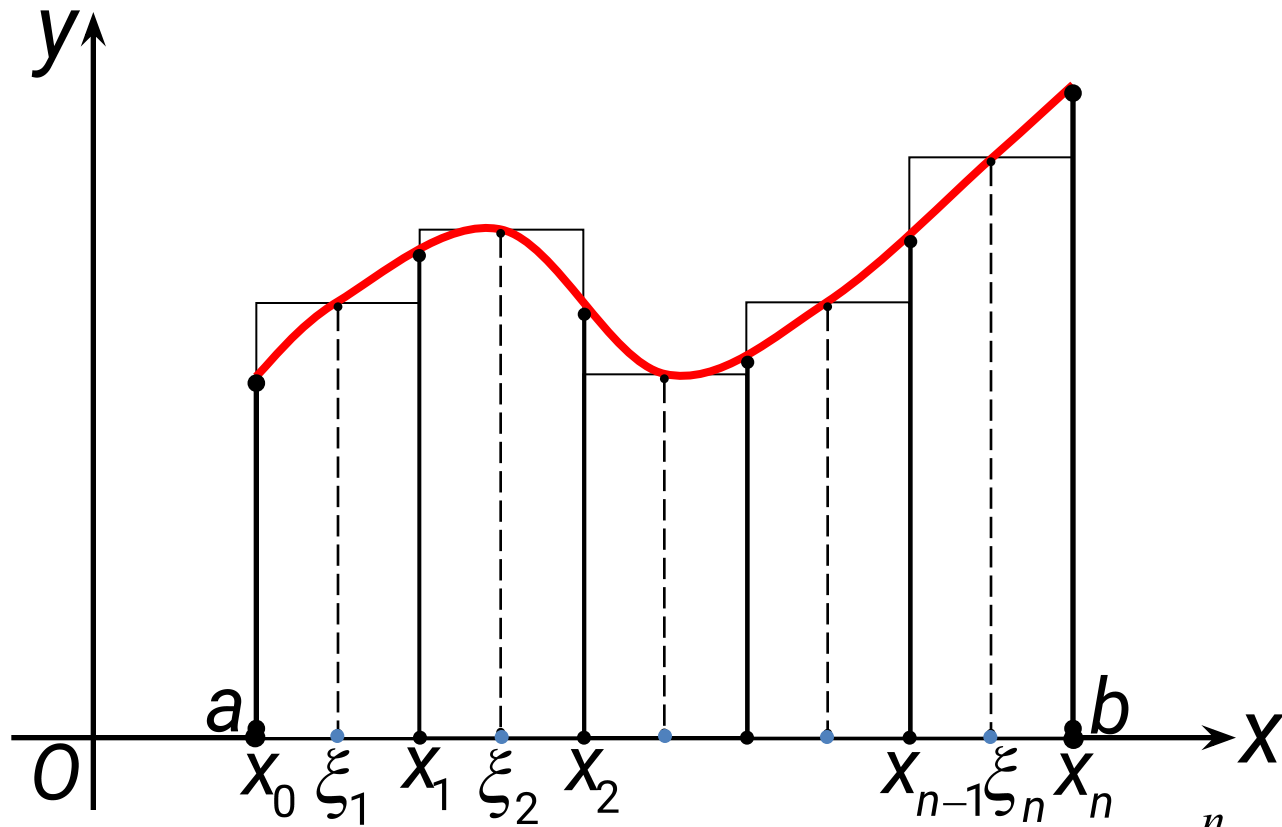


Замечание. Прямые $x = a$ и $x = b$ могут вырождаться в точки

ЗАДАЧА 1 (о площади криволинейной трапеции).

Пусть $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a; b]$.

Найти площадь S криволинейной трапеции (σ).



Если $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ — длина отрезка $[x_{i-1}; x_i]$, то $S \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$

Пусть $\lambda = \max | [x_{i-1}; x_i] |$. Тогда

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

ЗАДАЧА 2 (о пройденном пути).

Пусть точка движется по кривой и ее скорость изменяется по закону $v = f(t)$.

Найти путь S , пройденный точкой за промежуток времени $[T_1; T_2]$.

РЕШЕНИЕ.

1) Разобьем $[T_1; T_2]$ на n частей точками

$$t_0 = T_1, t_1, t_2, \dots, t_n = T_2 \quad (\text{где } t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n)$$

2) Выберем на $[t_{i-1}; t_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$) произвольную точку τ_i .

Если $[t_{i-1}; t_i]$ мал, то можно считать, что точка двигалась в течение этого времени равномерно со скоростью $f(\tau_i)$.

\Rightarrow пройденное расстояние: $f(\tau_i) \cdot \Delta t_i$, где $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.

$$\Rightarrow S \approx \sum_{i=1}^n f(\tau_i) \Delta t_i$$

3) Пусть $\lambda = \max | [t_{i-1}; t_i] |$. Тогда

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\tau_i) \Delta t_i$$

2. Определенный интеграл: определение и условие его существования

Пусть $f(x)$ задана на отрезке $[a;b]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

1) Разобьем $[a;b]$ на n частей точками

$$x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b,$$

где $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$.

2) На каждом отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$) выберем произвольную точку ξ_i и найдем произведение

$$f(\xi_i) \cdot \Delta x_i,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ — длина отрезка $[x_{i-1}; x_i]$.

Сумма

$$I_n(x_i, \xi_i) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

называется **интегральной суммой** для функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Пусть $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} |x_{i-1} - x_i|$

Число I называется **пределом интегральных сумм** $I_n(x_i, \xi_i)$ при $\lambda \rightarrow 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения отрезка $[a; b]$ у которого $\lambda < \delta$, при любом выборе точек ξ_i выполняется неравенство

$$|I_n(x_i, \xi_i) - I| < \varepsilon.$$

Если существует предел интегральных сумм $I_n(x_i, \xi_i)$ при $\lambda \rightarrow 0$, то его называют **определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$** (или **в пределах от a до b**).

ОБОЗНАЧАЮТ:

Называют: $[a; b]$ – **промежуток интегрирования**,
 a и b – **нижний и верхний предел интегрирования**,
 $f(x)$ – **подынтегральная функция**,
 $f(x)dx$ – **подынтегральное выражение**,
 x – **переменная интегрирования**.

Функция $f(x)$, для которой на $[a;b]$ существует определенный интеграл, называется **интегрируемой** на этом отрезке.

ТЕОРЕМА 1 (необходимое условие интегрируемости функции на $[a;b]$).

Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, то она на этом отрезке ограничена.

ТЕОРЕМА 2 (достаточное условие интегрируемости функции на $[a;b]$).

Для интегрируемости функции $f(x)$ на $[a;b]$, достаточно выполнения одного из условий:

- 1) $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$;
- 2) $f(x)$ ограничена на $[a;b]$ и имеет на $[a;b]$ конечное число точек разрыва;
- 3) $f(x)$ монотонна и ограничена на $[a;b]$.

Замечание. Определяя определенный интеграл, полагали $a < b$.

Полагаем, что:

1) если $a > b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$$

2) если $a = b$, то

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Такое расширение определения согласуется с определением определенного интеграла и его геометрическим (физическим) смыслом.

3. Свойства определенного интеграла

1) Геометрический смысл определенного интеграла.

Если $f(x)$ – непрерывна на $[a;b]$ и $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = S,$$

где S – площадь криволинейной трапеции с основанием $[a;b]$ и ограниченной сверху кривой $y = f(x)$.

2) Физический смысл определенного интеграла

Если функция $v = f(t)$ задает скорость движущейся точки в момент времени t , то

$$\int_{T_1}^{T_2} v(t)dt$$

определяет путь S , пройденный точкой за промежуток времени $[T_1; T_2]$.

$$3) \int_a^b dx = b - a.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

4) Постоянный множитель k ($k \neq 0$) можно выносить за знак определенного интеграла, т.е.

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

5) Определенный интеграл от алгебраической суммы двух (конечного числа) функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\int_a^b (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b \varphi(x)dx$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

6) Если отрезок интегрирования $[a;b]$ разбит точкой c на две части $[a;c]$ и $[c;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (1)$$

Замечание. Формула (1) будет иметь место и в том случае, когда точка c лежит не внутри отрезка $[a;b]$, а вне его.

7) Если $f(x) > 0$ ($f(x) \geq 0$) $\forall x \in [a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx > 0 \quad \left(\int_a^b f(x)dx \geq 0 \right)$$

8) Если $f(x) \leq \phi(x)$ $\forall x \in [a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \phi(x)dx$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО — самостоятельно

9) Следствие свойств 8 и 3.

Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, то

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a).$$

10) Если $f(x)$ – нечетная функция, то $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

Если $f(x)$ – четная функция, то $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

11) Теорема о среднем.

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то в интервале $(a;b)$ найдется такая точка c , что справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a) \cdot f(c)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

§2. Вычисление определенных интегралов

1. Интеграл с переменным верхним пределом.

Формула Ньютона-Лейбница

Пусть $f(t)$ непрерывна на $[a;b]$.

Тогда $f(t)$ непрерывна на $\forall [a;x]$, где $a \leq x \leq b$.

$\Rightarrow f(t)$ интегрируема на $\forall [a;x]$, где $a \leq x \leq b$.

Рассмотрим интеграл $\int_a^x f(t)dt$

Имеем: $\int_a^x f(t)dt = \Phi(x)$, $D(\Phi(x)) = [a;b]$.

ТЕОРЕМА 1 (о производной определенного интеграла по переменному верхнему пределу).

Функция $\Phi(x)$ дифференцируема на $[a;b]$, причем

$$\Phi'(x) = f(x) .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

СЛЕДСТВИЕ 2. Любая непрерывная на $[a;b]$ функция имеет на $[a;b]$ первообразную.

Имеем: $\Phi(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на $[a;b]$.

Пусть $F(x)$ – еще одна первообразная для $f(x)$ на $[a;b]$.

Тогда $F(x)$ и $\Phi(x)$ будут отличаться постоянным слагаемым (см. §23 теорема 2, I семестр), т.е.

$$(1) \quad \int_a^x f(t)dt = F(x) + C,$$

где $a \leq x \leq b$, ${}^a C$ – некоторое число.

Полагаем $x = a$. Тогда из (1) получим

$$\begin{aligned} \int_a^a f(t)dt &= F(a) + C, \\ a \Rightarrow 0 &= F(a) + C, \\ \Rightarrow C &= -F(a). \end{aligned}$$

Следовательно, (1) можно переписать в виде

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Полагая $x = b$ получаем:

$$(2) \quad \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Формула (2) называется **формулой Ньютона – Лейбница**.

Разность $F(b) - F(a)$ принято сокращенно записывать в виде

Символ \int_a^b называют **знаком двойной подстановки**.
 $F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$.

Используя это обозначение, формулу (2) можно переписать в виде

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

Замечание. В формуле (2) можно взять любую из первообразных функции $f(x)$, так как $F(b) - F(a)$ не зависит от выбора первообразной.