Замена переменной в определенном интеграле

ТЕОРЕМА 3 (о замене переменной в определенном интеграле). *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a;b]$ (или $[b;a]$) *и функция* $x = \phi(t)$ *удовлетворяет условиям*

1) $\phi(t)$ *непрерывно дифференцируема на отрезке с концами* α *и* β;
2) $\phi(\alpha) = a$, $\phi(\beta) = b$ *и значения* $\phi(t)$ *при изменении* t *от* α *до* β *не выходят за пределы отрезка с границами* a *и* b.

Тогда функция $f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)$ *интегрируема на* $[\alpha;\beta]$ (или $[\beta;\alpha]$) *и справедлива формула*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (3)$$

Формула (3) называется ***формулой замены переменной в определенном интеграле***.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

3. Формула интегрирование по частям в определенном интеграле

ТЕОРЕМА 4.

Пусть функции $u(x)$ *и* $v(x)$ *непрерывно дифференцируемы на* $[a;b]$ *. Тогда существуют интегралы*

$$\int_a^b u\,dv \quad \text{и} \quad \int_a^b v\,du$$

и справедливо равенство

(4)

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du .$$

Формула (4) называется ***формулой интегрирования по частям в определенном интеграле***.

§3. Приложения определенных интегралов

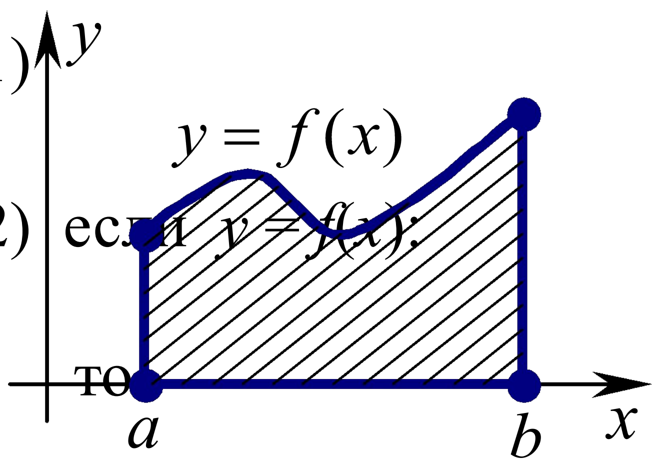
<u>1. Площадь плоской области</u>

I) ***Плоская область в декартовой системе координат***

В ДСК основная область, площадь которой находят с помощью определенного интеграла – ***криволинейная трапеция***.

Возможны 3 случая ее расположения на плоскости:

а) 1)



$$S = \int_a^b f(x)dx;$$

2) если $y = f(x)$;

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

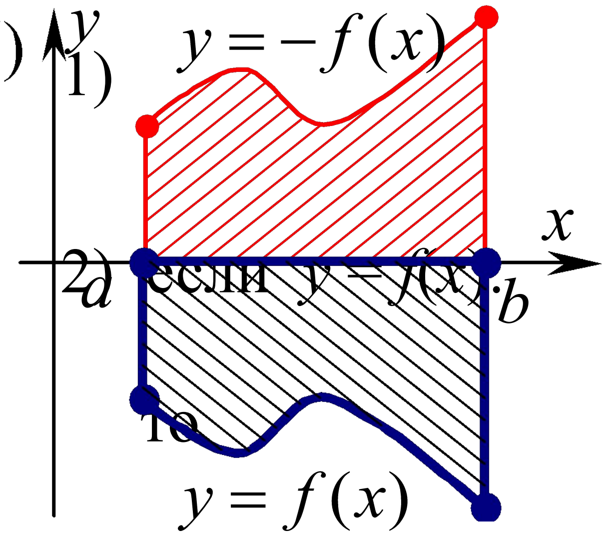
то

$$S = \int_\alpha^\beta y(t) \cdot x'(t)dt,$$

где $x(\alpha) = a,\ x(\beta) = b$.

б)

1)



$$S = -\int_a^b f(x)dx,$$

2) если $y = f(x)$

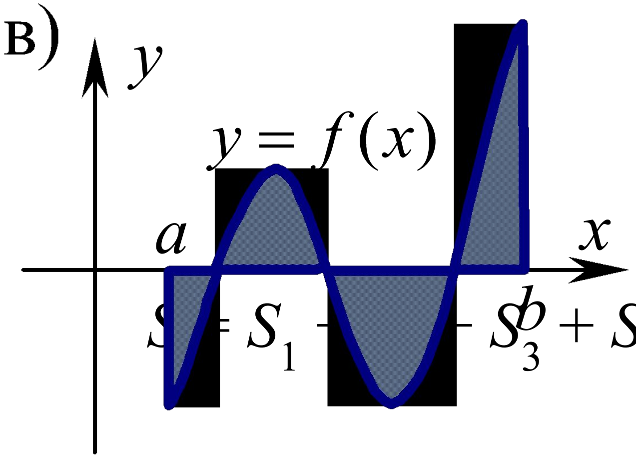
то

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

$$S = -\int_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t)dt,$$

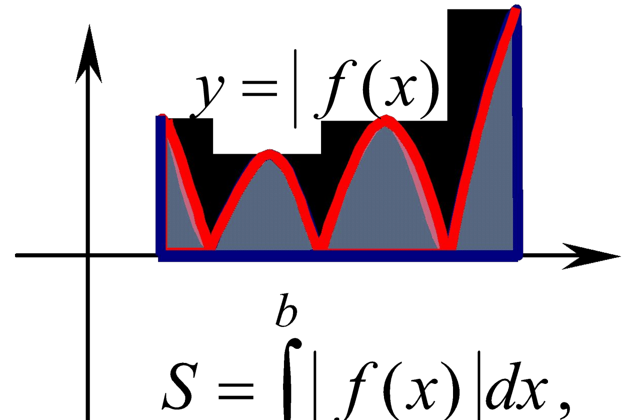
где $x(\alpha) = a, \;\; x(\beta) = b$.

в)



$S = S_1 - \ldots - S_3 + S_4$

$\Rightarrow$



$$S = \int_a^b |\,f(x)|dx,$$

Кроме того, в ДСК с помощью определенного интеграла можно найти площадь области, правильной в направлении оси Oy .

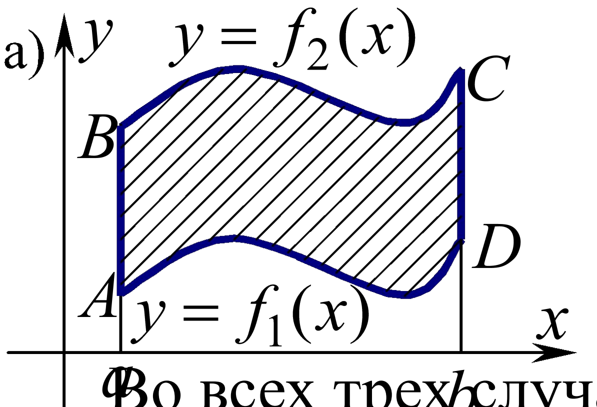
Правильной в направлении оси Oy является область (σ), ограниченная линиями

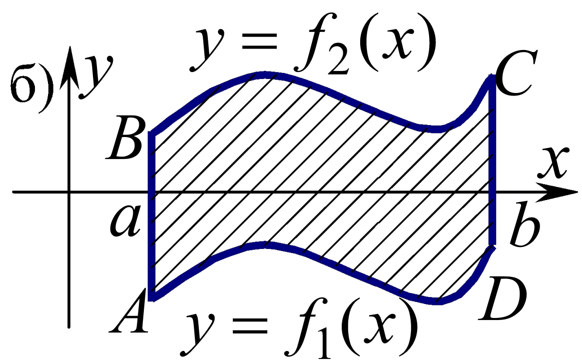
$$x = a\ , x = b\ , y = f_1(x)\ ,\ y = f_2(x)\ ,$$

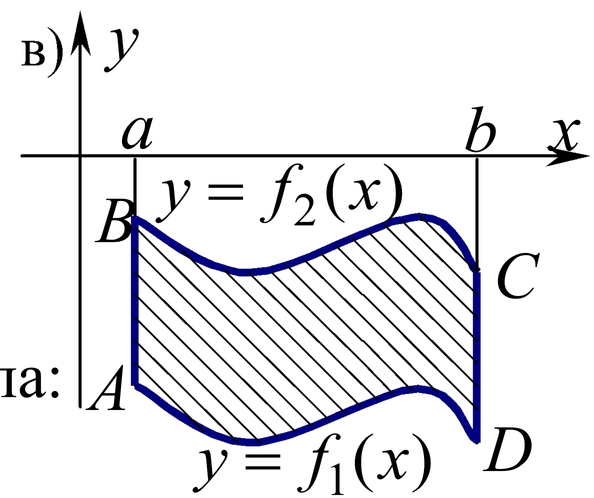
где $a < b$ и $f_1(x) \le f_2(x)\ ,\ \ \forall x \in [a;b]$.

Замечание. Прямые $x = a$ и $x = b$ могут вырождаться в точки.

Возможны 3 случая расположения области (σ) на плоскости:







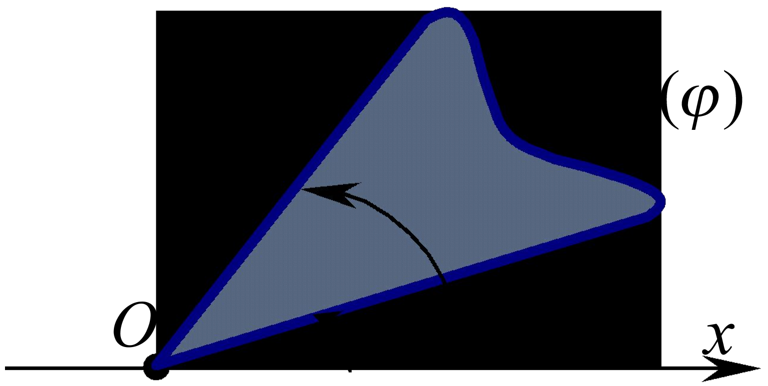
Во всех трех случаях справедлива формула:

$$S = \int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x) \right] dx \, .$$

II) ***Плоская область в полярной системе координат***

В ПСК основная область, площадь которой находят с помощью определенного интеграла – ***криволинейный сектор***.

Криволинейным сектором называется область, ограниченная двумя лучами $\phi = \alpha$, $\phi = \beta$ и кривой $r = f(\phi)$.



Его площадь находится по формуле:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left[f(\varphi)\right]^2 d\varphi .$$

2. Длина плоской кривой

I) ***Плоская кривая в декартовой системе координат***

Пусть $y = f(x)$ – непрерывно дифференцируема на $[a;b]$.

ЗАДАЧА: найти длину ℓ кривой $y = f(x)$, где $x \in [a;b]$.

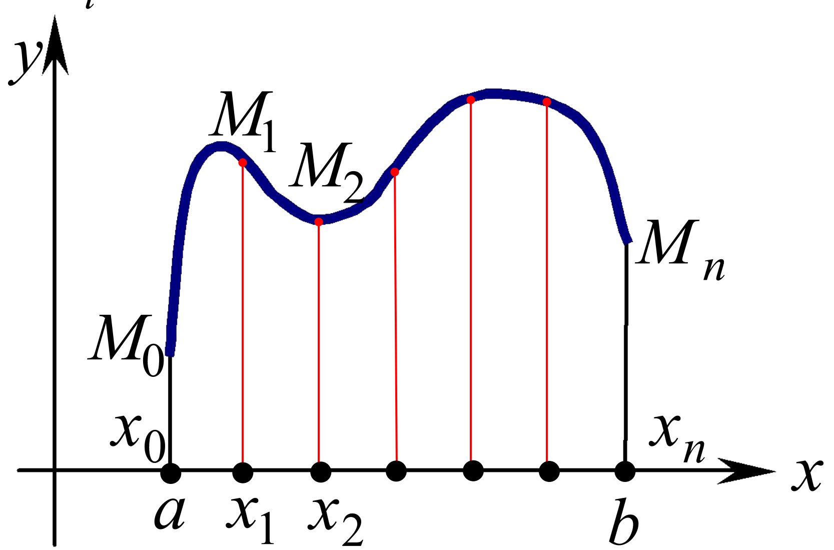
РЕШЕНИЕ

Разобьем $[a;b]$ на n частей точками

$$x_0 = a\ ,\ x_1\ ,\ x_2\ ,\ \ldots\ ,\ x_n = b \quad (\text{где } x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n\ )$$

$\Rightarrow$ (ℓ) разобьется на части $(\ell_1),(\ell_2),\ldots,(\ell_n)$ точками $M_0, M_1,\ldots, M_n$

$\Rightarrow$ $\ell = \sum \ell_i$, где ℓ_i – длина (ℓ_i)



Рассмотрим дугу (ℓ_i).

Если (ℓ_i) мала, то $\quad \ell_i \approx |M_{i-1}M_i| = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$.

По теореме Лагранжа

$$\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i) \cdot \Delta x_i ,$$

где ξ_i – точка между x_{i-1} и x_i.

$$\Rightarrow \quad \ell_i \approx \sqrt{[\Delta x_i]^2 + [f'(\xi_i)\Delta x_i]^2} = \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i$$

$$\Rightarrow \quad \ell \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i$$

$$\Rightarrow \quad \ell = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i , \quad \lambda = \max_{1 \le i \le n} \Delta t_i .$$

$$\Rightarrow \quad \ell = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx .$$