

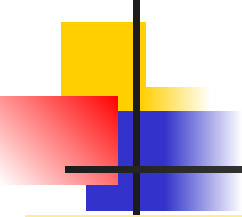
Дисциплина:

Теоретические

ОСНОВЫ

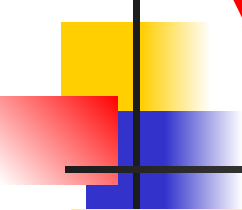
электротехники





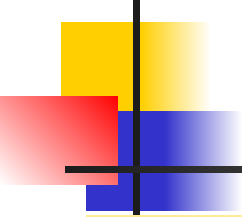
Лекция №2

**Тема: «Основные
законы
электрических
цепей»**



Учебные вопросы

- 1. Идеализированные элементы цепи и их математические модели.**
- 2. Основные понятия топологии электрических цепей.**
- 3. Понятие о компонентных и топологических уравнениях. Законы Кирхгофа.**
- 4. Основные задачи теории цепей.**



Литература

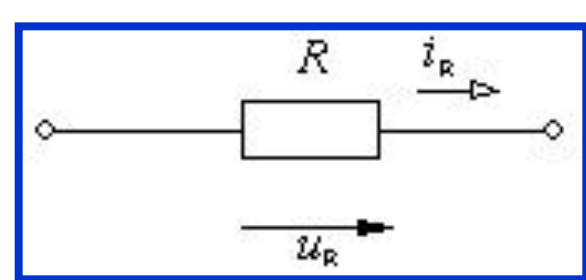
- 1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: учебник для бакалавров. – М. : Издательство Юрайт, 2012, с. 27-36
- 2. Попов В.П. Основы теории цепей: Учебник для вузов спец. "Радиотехника".-М.: Высшая школа, 2007, с. 36-59.

1. Идеализированные элементы цепи и их математические модели.

1.1 Резистивный элемент

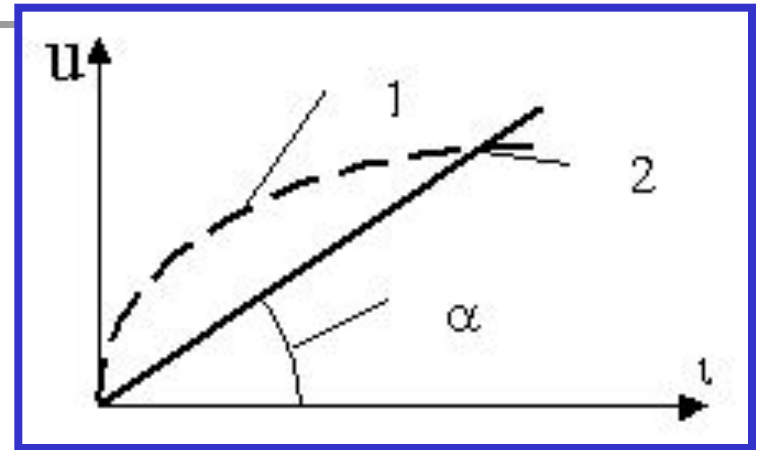
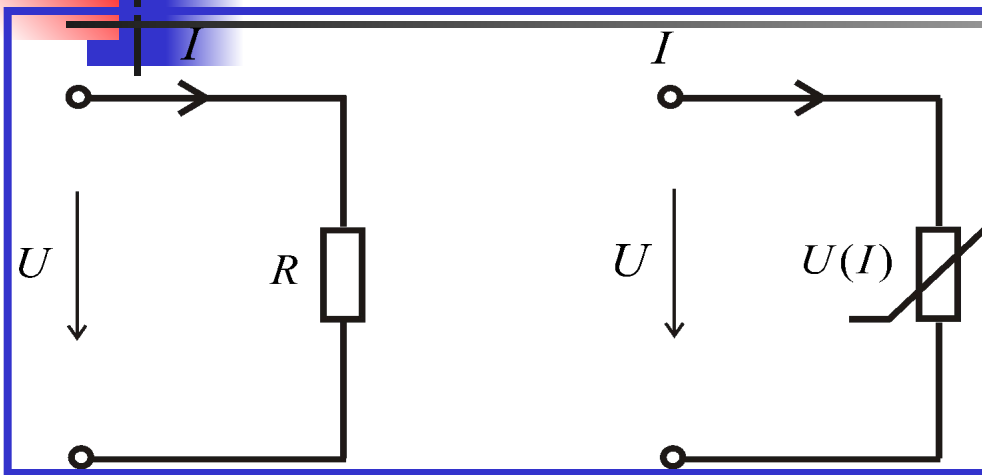


Резистивный элемент (или идеальный резистор) - это идеализированный пассивный двухполюсный элемент, в котором электрическая энергия необратимо преобразуется в другие виды энергии, например в тепловую, световую или механическую при этом запасания энергии электрического или магнитного полей в резистивном элементе не происходит.



Резистивный элемент – это упрощенная модель резистора, в которой абстрагируется только его основной параметр – **сопротивление**.

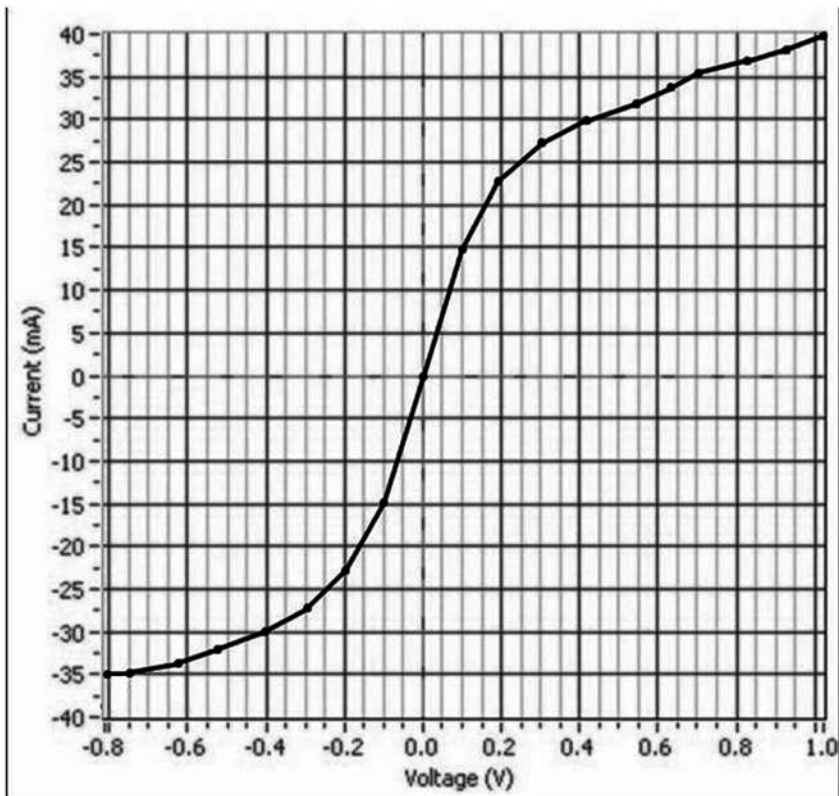
Условное графическое обозначение и ВАХ линейного и нелинейного резистивных элементов



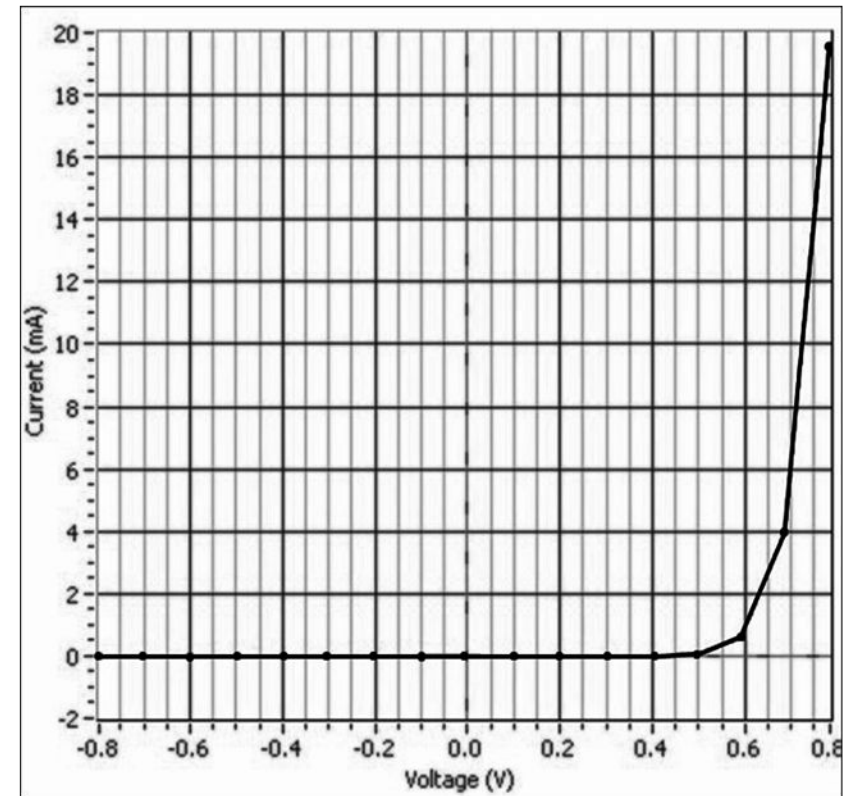
Уравнение, определяющее зависимость напряжения на зажимах резистора от тока $u=u(i)$ или тока от напряжения $i=i(u)$ и называется вольт-амперной характеристикой (ВАХ) резистора.

Вольт-амперные характеристики нелинейных резистивных элементов

Лампа накаливания



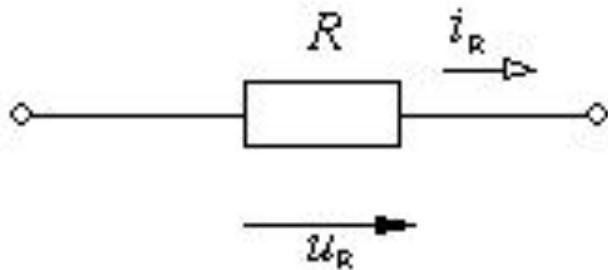
Полупроводниковый диод



Математическая модель резистивного элемента

Если ВАХ – прямая, проходящая через начало координат, то резистор называют линейным.

Закон Ома:



$$u_R = Ri_R$$

$$i_R = Gu_R$$

R – сопротивление



Георг Симон Ом
1789 – 1854

$$u = Ri$$

Единица измерения сопротивления – Ом.

Резистивный элемент

Закон Ома:

$$i = Gu$$

Проводимость:

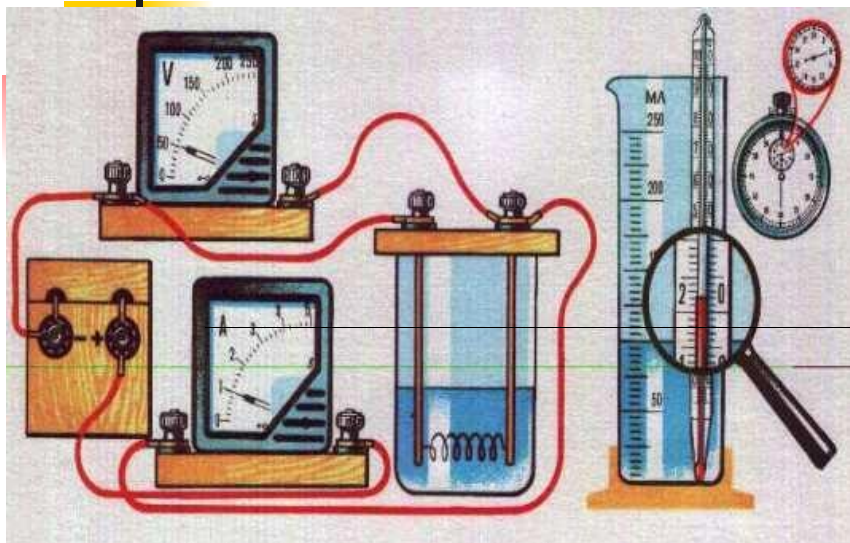
$$G = \frac{1}{R}$$

Единица измерения проводимости – Сименс (См).



Вернер фон Сименс
1816-1892

Нагревание проводников электрическим током. Закон Джоуля-Ленца.



ДЖОУЛЬ ДЖЕЙМС ПРЕСКОТТ
(1818–1889), английский физик



Ленц Эмилий Христианович
(1804–1865 гг.), российский физик

$$U = I \cdot R$$

$$A = IUt = I \cdot IRt = I^2 Rt$$

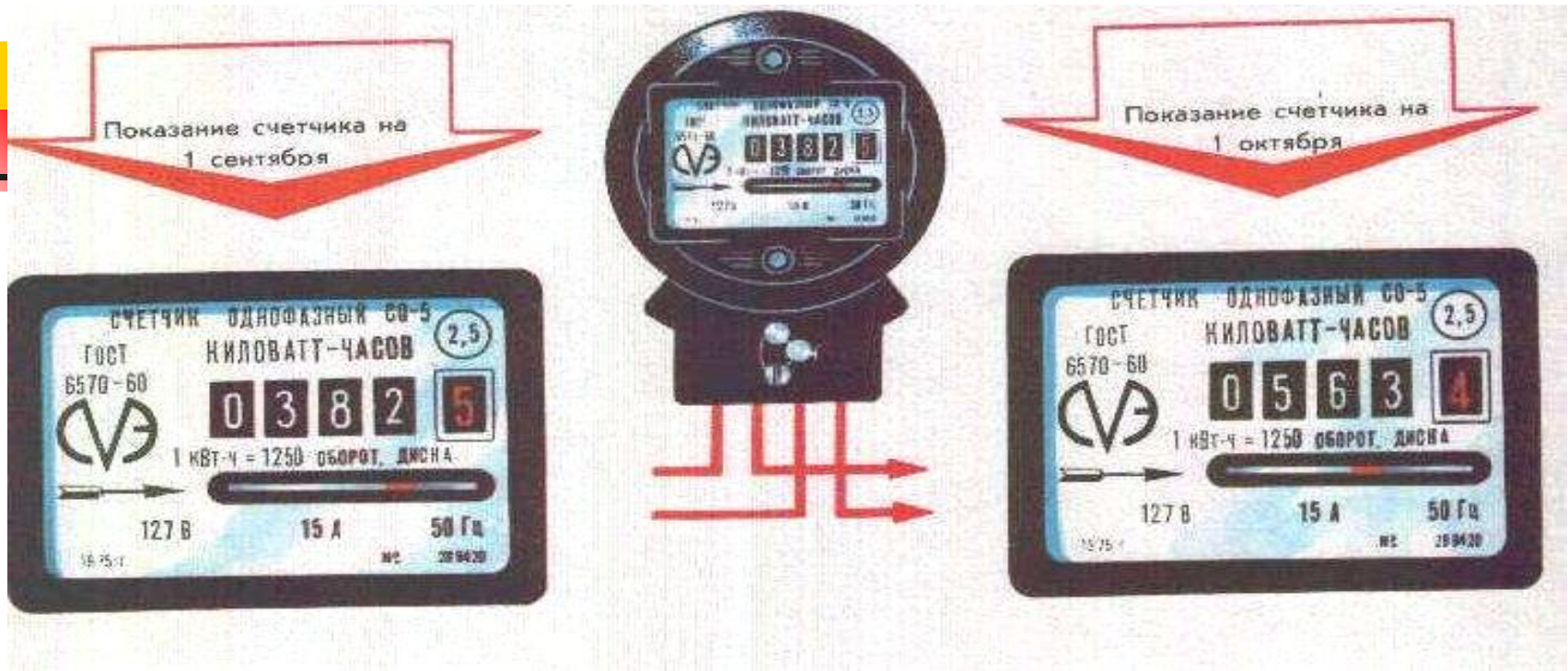
$$P_R = u_R i_R = Ri_R^2 = Gu_R^2$$

Мгновенная мощность резистивного элемента всегда больше нуля, так как он только потребляет энергию, преобразуя ее в тепло или другие виды энергии.

$$W_R(t) = \int_{-\infty}^t P_R dt = R \int_{-\infty}^t i_R^2 dt = G \int_{-\infty}^t u_R^2 dt > 0$$

В любой момент времени резистивный элемент может только потреблять энергию от источников и ни в какие моменты времени он не может отдавать электрическую энергию другим элемента цепи.

Работа электрического тока



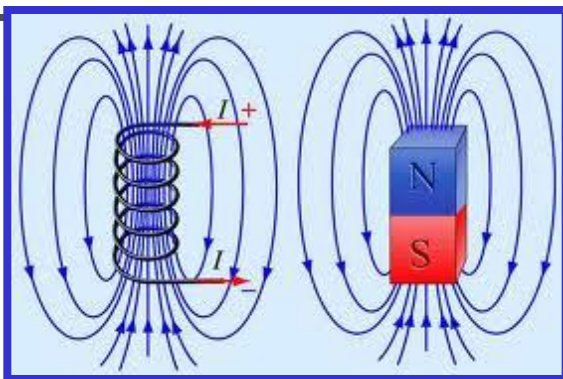
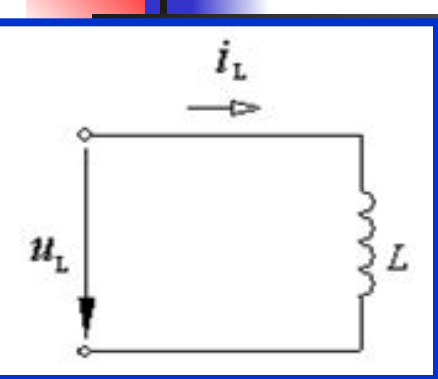
$$A = Pt$$

$$1 \text{ Дж} = 1 \text{ Вт} \cdot \text{с}$$

$$1 \text{ Вт} \cdot \text{ч} = 3600 \text{ Дж}$$

$$1 \text{ кВт} \cdot \text{ч} = 1000 \text{ Вт} \cdot \text{ч} = 3600000 \text{ Дж}$$

1.2 Индуктивный элемент



Индуктивным элементом, идеальной индуктивной катушкой или индуктивностью называют идеализированный двухполюсный пассивный элемент цепи, единственным электромагнитным процессом в котором является запасание энергии магнитного поля, при этом запасание энергии электрического поля или преобразование электрической энергии в другие виды энергии в индуктивном элементе не происходит.

Вебер-амперная характеристика индуктивного элемента – зависимость потокоцепления катушки от тока

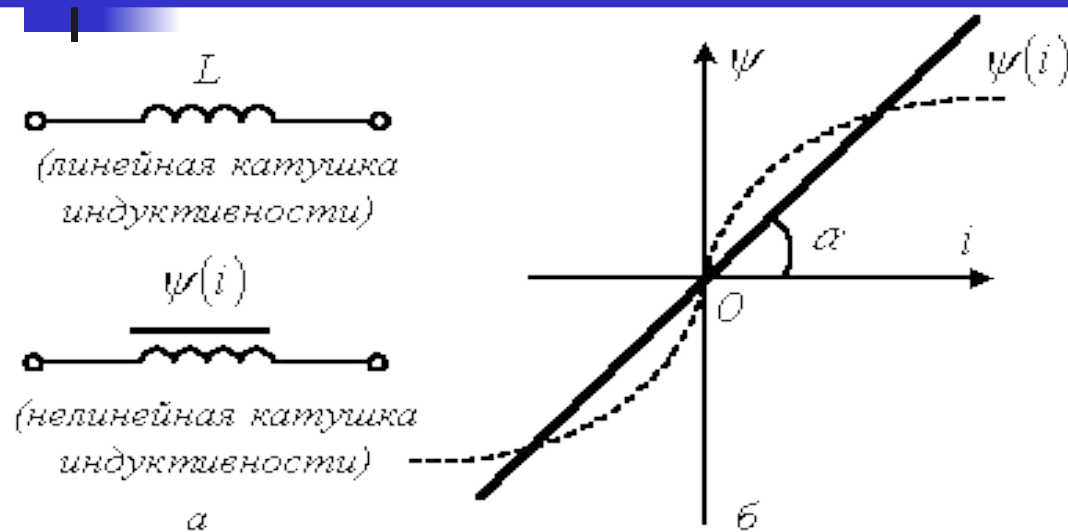


Рис.2

$$\psi = Li$$

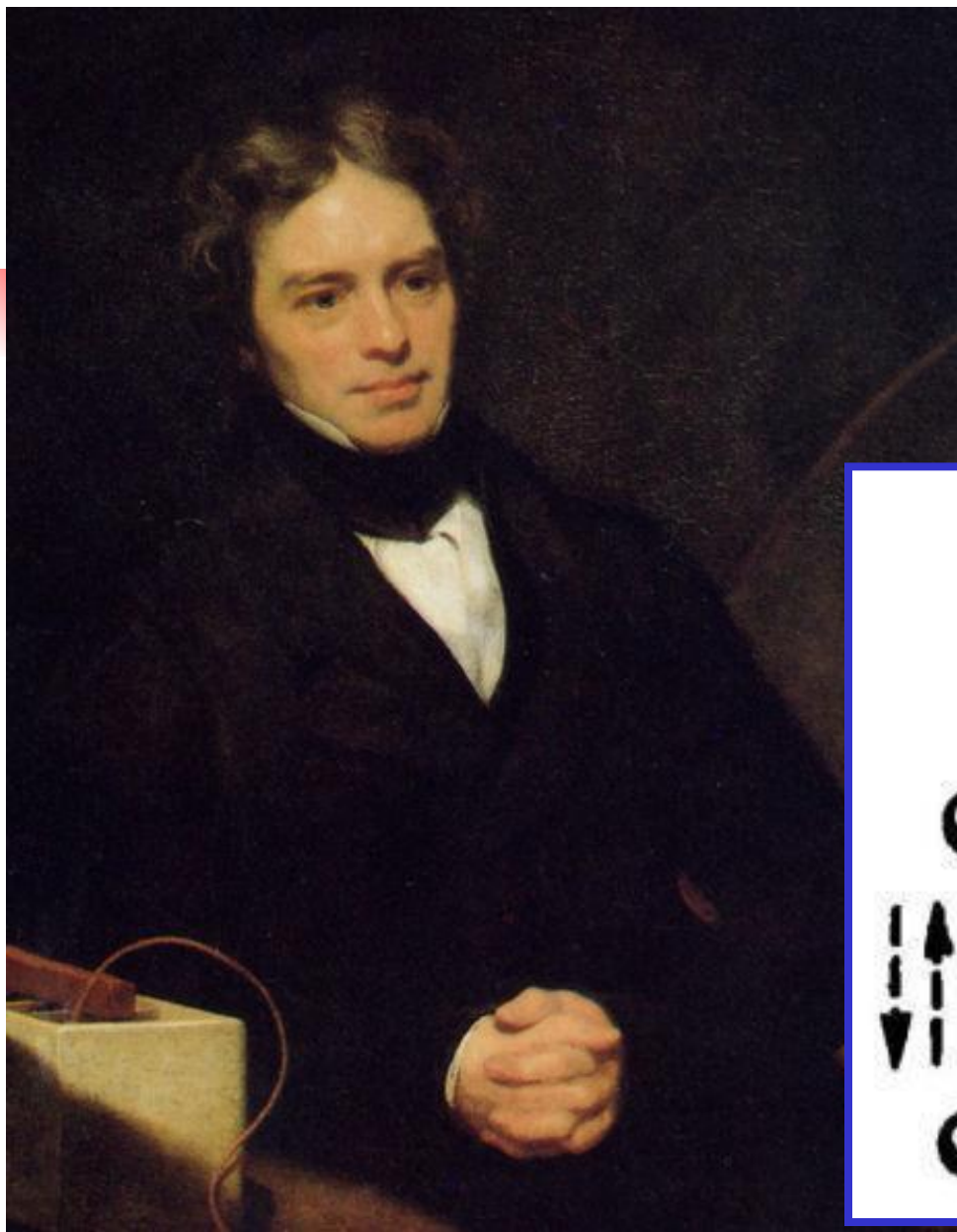
*

Вебер-амперная характеристика

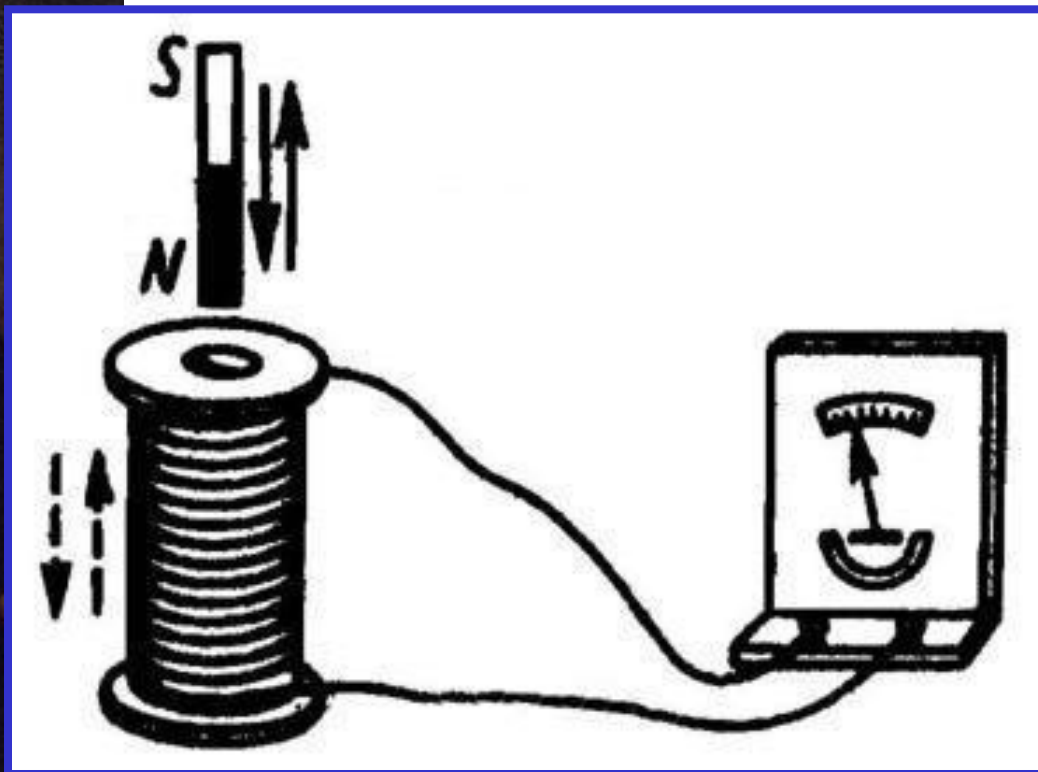
$$\psi = \sum_{k=1}^N \Phi_k$$

$$\psi = N\Phi$$

Коэффициент пропорциональности L в формуле (*) называется **индуктивностью**. Он имеет положительное значение и является количественной характеристикой индуктивного элемента. Измеряется индуктивность L в генри (Гн), а магнитный поток Φ – в веберах (Вб).

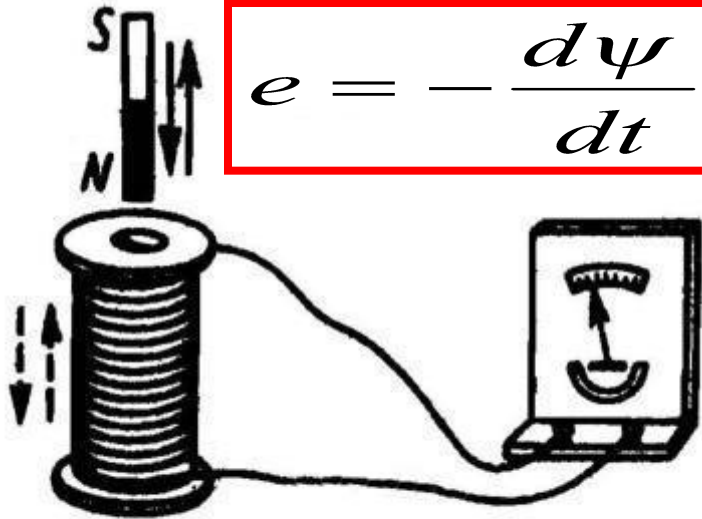


$$e = - \frac{d\psi}{dt}$$



Майкл Фарадей (1791-1867)

Закон электромагнитной индукции Майкла Фарадея (открыт в 1831 г.)



$$e = - \frac{d\psi}{dt}$$

$$u_L = -e = L \frac{di_L}{dt}$$

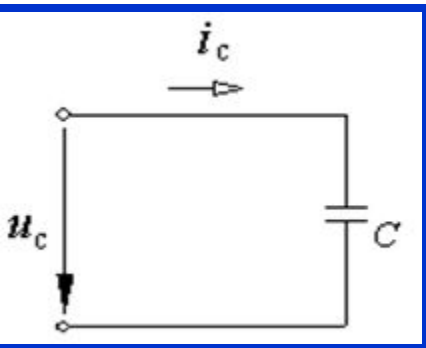
$$i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L dt$$

$$P_L = u_L i_L = L i_L \frac{di_L}{dt}$$

Это закон устанавливает взаимосвязь между магнитными и электрическими явлениями.

Формулировка: ЭДС электромагнитной индукции, в контуре численно равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную этим контуром.

1.3 Ёмкостной элемент



Ёмкостным элементом, идеальным конденсатором или емкостью называют идеализированный двухполюсный элемент цепи, обладающий только свойством запасать энергию электрического поля, причем запасания энергии магнитного поля или преобразования электрической энергии в другие виды энергии в нем не происходит.

Математическая модель, описывающая свойства емкостного элемента, определяется вольт-кулонной характеристикой

$$q = CU_c$$

$$i_C = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{du_C} \cdot \frac{du_C}{dt}$$

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C dt$$

Коэффициент пропорциональности C в формуле (*) называется емкостью и является количественной характеристикой емкостного элемента. При согласованных направлениях тока и напряжения величин C всегда положительна. Измеряется C в фарадах (Ф).

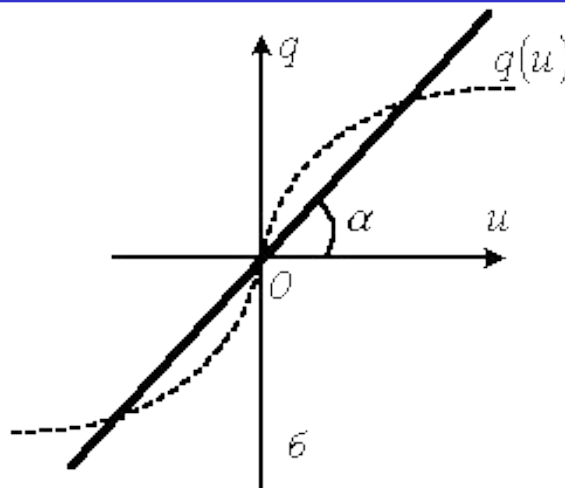
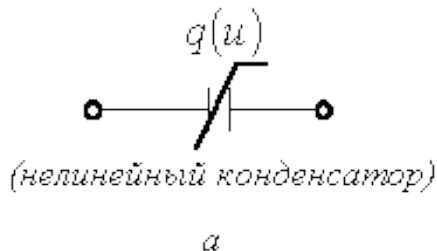
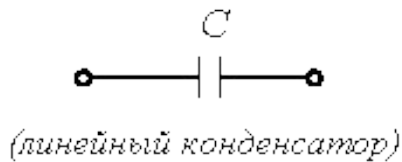
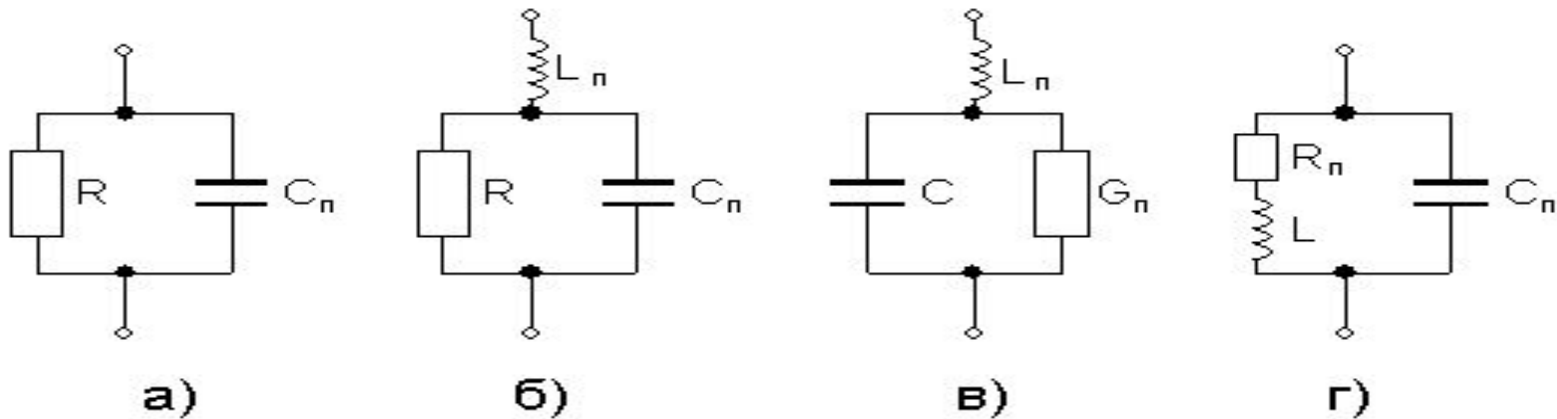


Рис.3

$$P_C = u_C i_C = cu_C \frac{du_C}{dt}$$

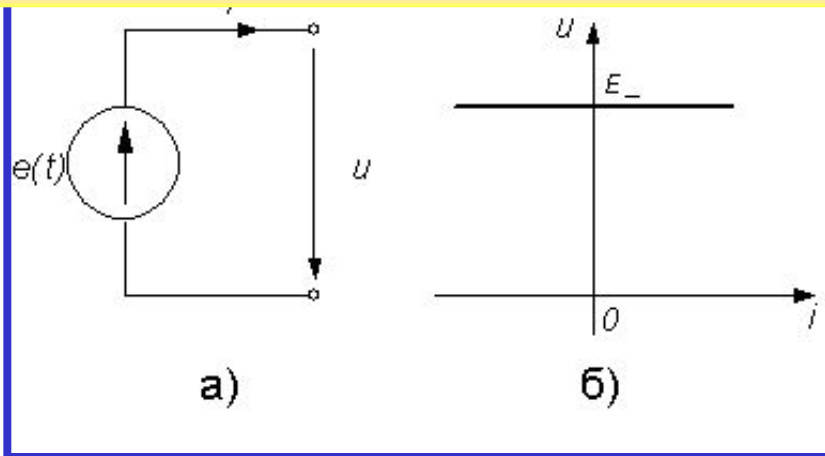
1.4 Схемы замещения реальных элементов электрической цепи



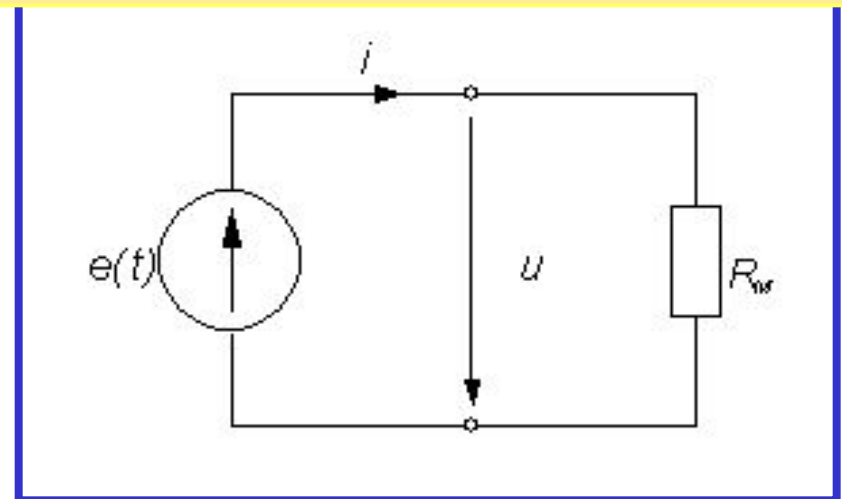
- ВЫВОДЫ:**
1. Чем выше требуемая точность, тем большее число факторов принимается во внимание, и тем сложнее будет схема замещения каждого элемента.
 2. С целью снижения трудоемкости расчетов стремятся использовать упрощенные схемы замещения, содержащие минимально допустимое число элементов.
 3. Схемы замещения одного и того же элемента могут иметь различный вид в зависимости от рассматриваемого диапазона частот.

1.5. Идеализированные активные элементы

Идеальный источник напряжения (источник напряжения, источник ЭДС) представляет собой идеализированный активный элемент, напряжение на зажимах которого не зависит от тока через эти зажимы.



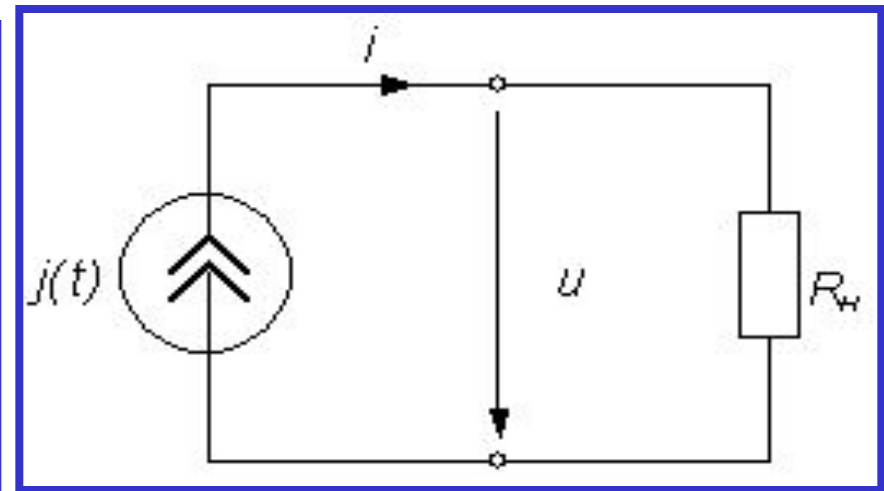
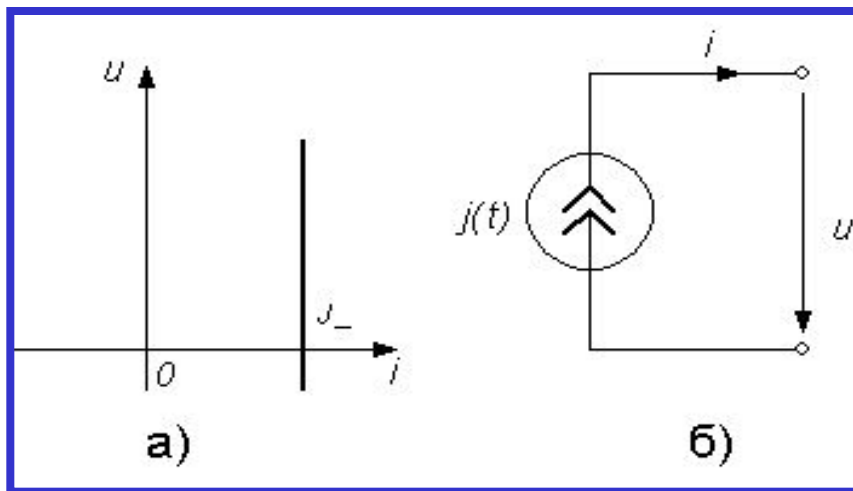
$$u = e(t)$$



$$i = u / R_w = (1 / R_w) e(t) \quad p = (1 / R_w) u^2 = (1 / R_w) e^2(t)$$

Идеальный источник напряжения можно рассматривать как источник энергии, внутреннее сопротивление которого равно нулю.

Идеальный источник тока (источник тока) — это идеализированный активный элемент, ток которого не зависит от напряжения на его зажимах.

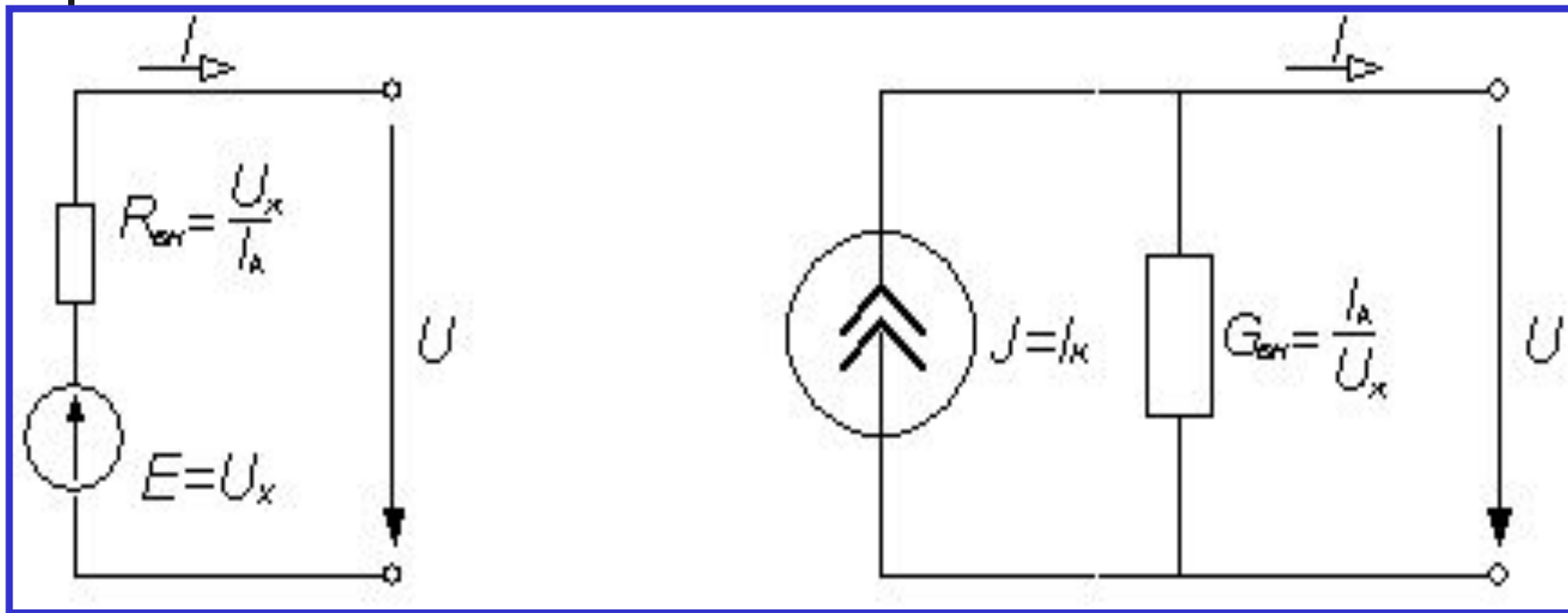


$$i = j(t)$$

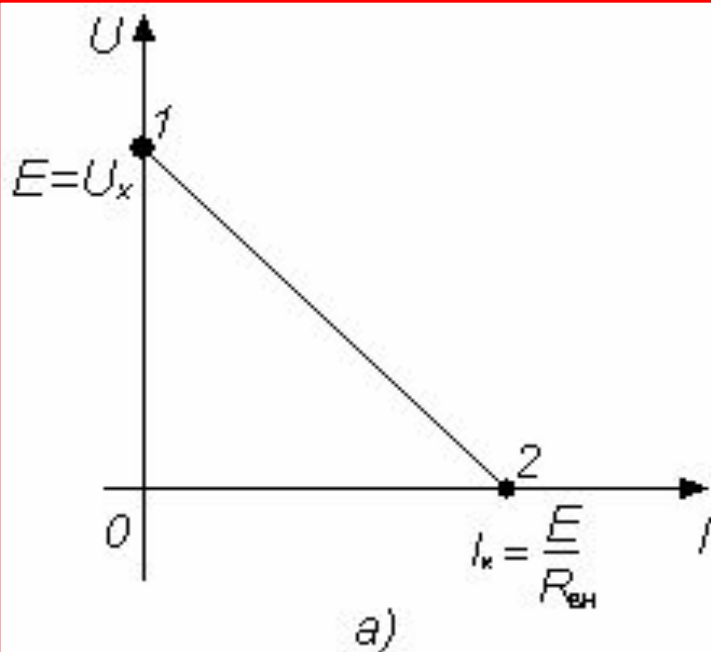
$$u = R_H i = R_H j(t) \quad p = R_H i^2 = R_H j^2(t)$$

Идеальный источник тока можно рассматривать как источник энергии с бесконечно малой внутренней проводимостью (бесконечно большим внутренним сопротивлением).

Схемы замещения реальных ИСТОЧНИКОВ

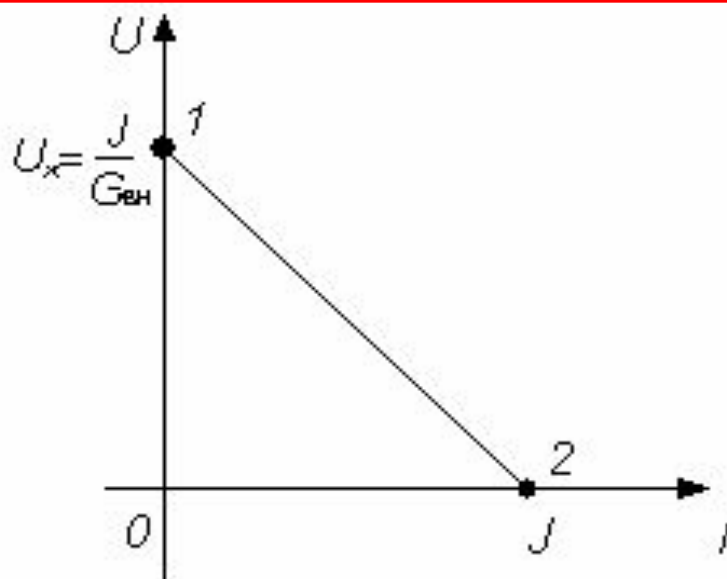


Внешние характеристики реальных источников



а)

$$U = E - R_{\text{вн}} I$$



б)

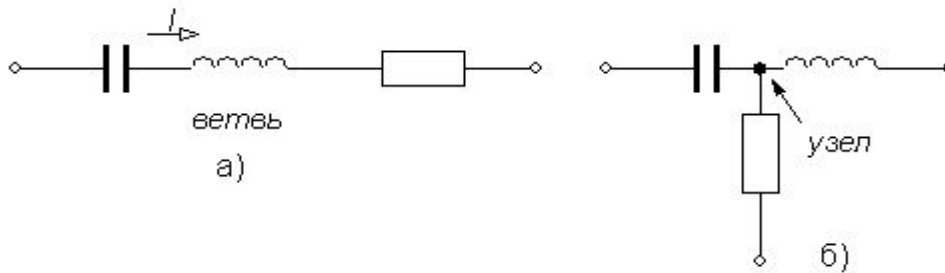
$$I = J - G_{\text{вн}} U$$

$$J = \frac{E}{R_{\text{вн}}}$$

$$G_{\text{вн}} = \frac{1}{R_{\text{вн}}}$$

$$E = \frac{J}{G_{\text{вн}}} \quad R_{\text{вн}} = \frac{1}{G_{\text{вн}}}$$

2. Основные понятия топологии цепей

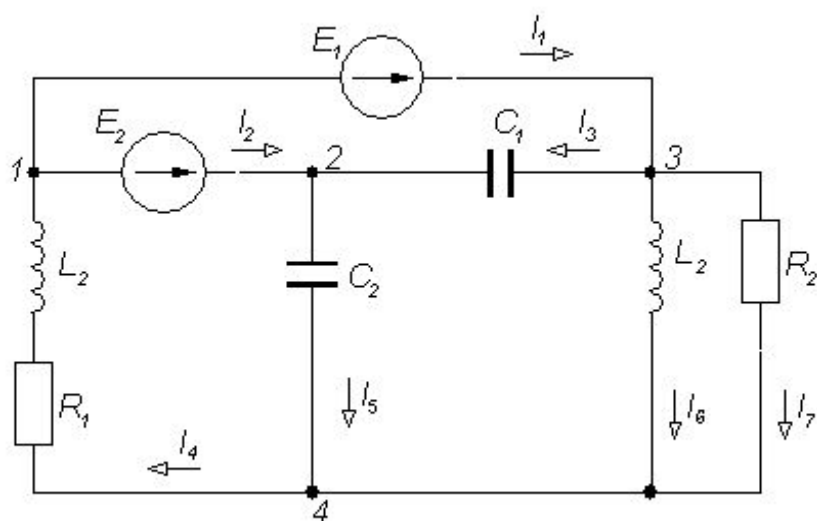


Топология – раздел математики, в котором исследуются геометрические свойства фигур, не зависящие от их размеров и прямолинейности..

Ветвь – участок электрической цепи, состоящий из одного или нескольких последовательно соединенных элементов, через которые в любой момент времени проходит один и тот же ток.

Узел электрической цепи – место соединения ее ветвей. На схемах узлы изображаются точкой.
Контуром электрической цепи называется любой замкнутый путь в цепи.

Независимый узел и независимый контур



Узел цепи является независимым, если к нему присоединена хотя бы одна новая ветвь, не подходящая к ранее рассматриваемым узлам.

Контур цепи является независимым, если он содержит хотя бы одну новую ветвь, не входящую в ранее рассматриваемые контуры.

3. Понятие о компонентных и топологических уравнениях.

3.1 Компонентные уравнения (уравнения ветвей) – это математические модели соответствующих ветвей, которые выражают ток или напряжение каждой ветви через параметры элементов этой ветви.

При записи компонентных уравнений используются следующие **уравнения связи**:

а) уравнения, составленные **на основании закона Ома** и представляющие собой математическую модель идеализированного резистивного элемента:

- $u_R = Ri_R$
- $i_R = Gu_R$

$$i_R = \frac{u_R}{R}$$

$$u_R = \frac{i}{G}$$

б) уравнения, составленные **на основании закона электромагнитной индукции** и представляющие собой математическую модель идеализированного индуктивного элемента:

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}$$

$$i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L dt$$

Уравнения связи для составления компонентных уравнений:

в) уравнения, представляющие собой математическую модель идеализированного емкостного элемента:

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C dt$$

г) уравнения, описывающие математическую модель идеального источника напряжения (ЭДС) и идеального источника тока соответственно

$$u = e(t)$$

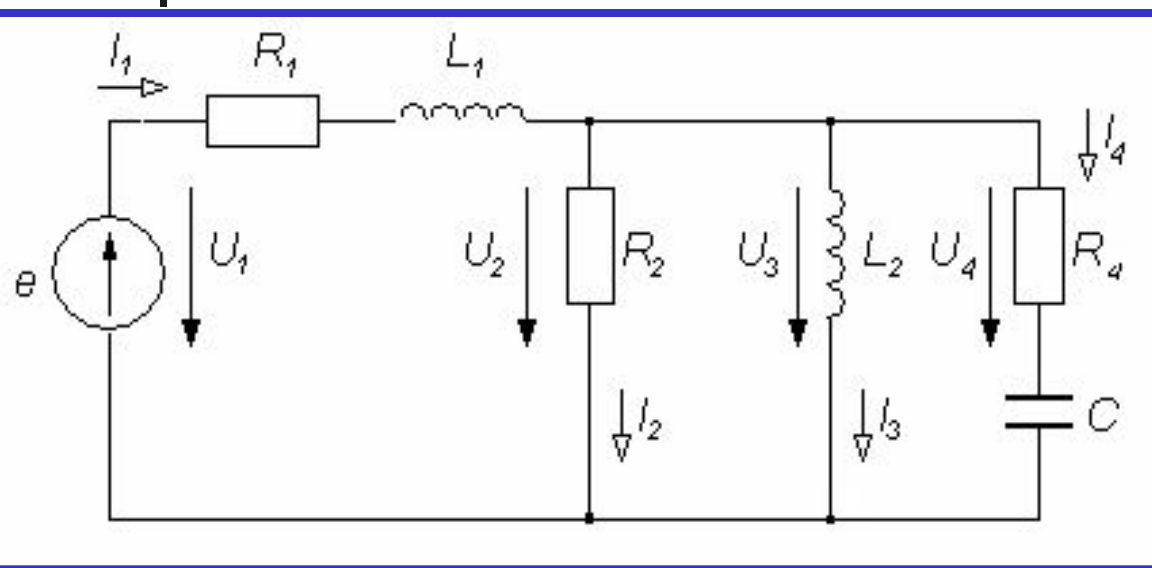
$$i = j(t)$$

д) уравнения линеаризованных источника напряжения (ЭДС) и источника тока соответственно:

$$u = E - R_i i$$

$$i = J - G_i u$$

Пример составления компонентных уравнений



$$u_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - e;$$

$$u_2 = R_2 i_2;$$

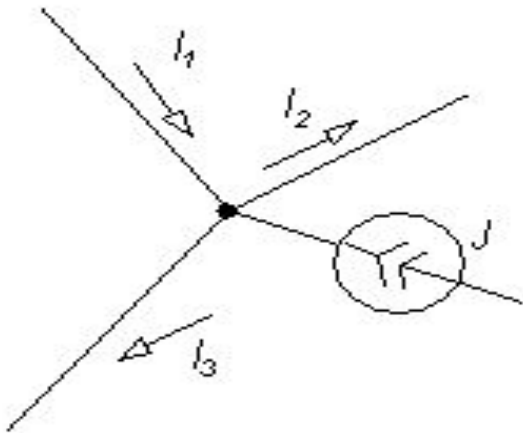
$$u_3 = L_2 \frac{di_3}{dt};$$

$$u_4 = R_4 i_4 + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_4 dt.$$

3.2 Законы Кирхгофа

Первый закон Кирхгофа

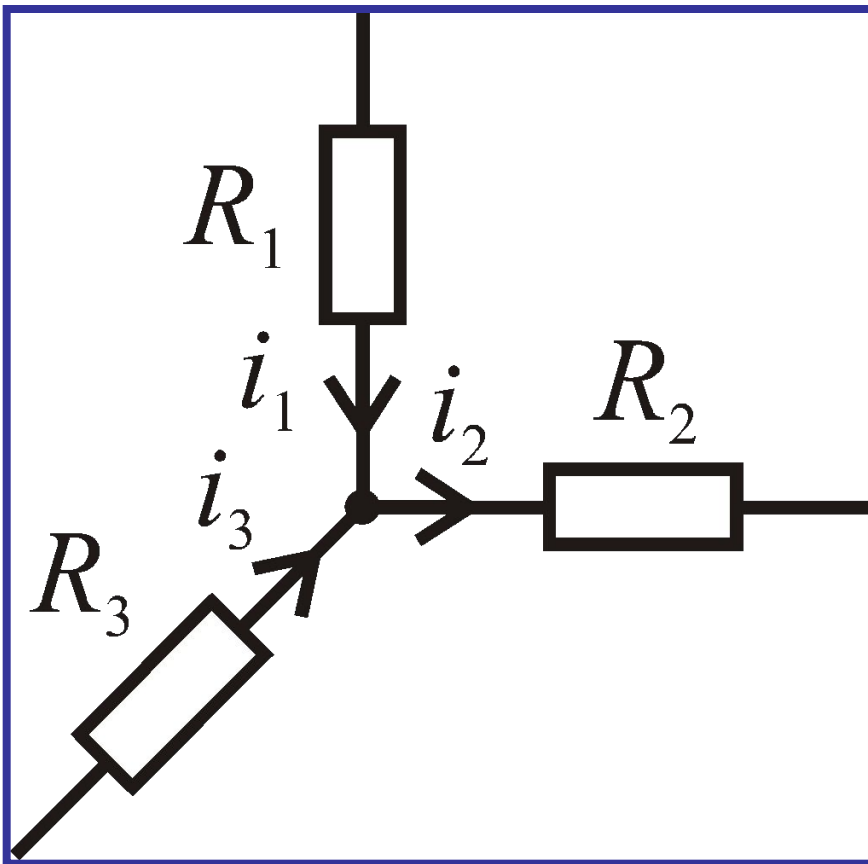
- **Первый закон Кирхгофа** – это закон баланса токов в разветвленной цепи, формулируется для узлов электрической цепи.
- Он гласит: алгебраическая сумма токов в любом узле электрической цепи в любой момент времени равна нулю, т.е.



$$\sum_{k=1}^m i_k(t) = 0$$

$$I_1 - I_2 - I_3 + J = 0.$$

Пример. Составление уравнения по первому закону Кирхгофа



Пусть токи, входящие в узел берутся со знаком «-», а токи, выходящие из узла, берутся со знаком «+».

$$-i_1 + i_2 - i_3 = 0$$



Кирхгоф Густав Роберт (1824 – 1887) – немецкий физик. Работы посвящены электричеству, механике, гидродинамике, математической физике, оптике, гидродинамике.

Построил общую теорию движению тока в проводниках. Развил строгую теорию дифракции. Установил один из основных законов теплового излучения, согласно которому отношение испускательной способности тела к поглощательной не зависит от природы излучающего тела (закон Кирхгофа).

Второй закон Кирхгофа

- *Второй закон Кирхгофа – это закон баланса напряжений на замкнутых участках цепи, формулируется для контуров электрической цепи.*
- *Он гласит: алгебраическая сумма напряжений в любом замкнутом контуре в любой момент времени равна нулю:*

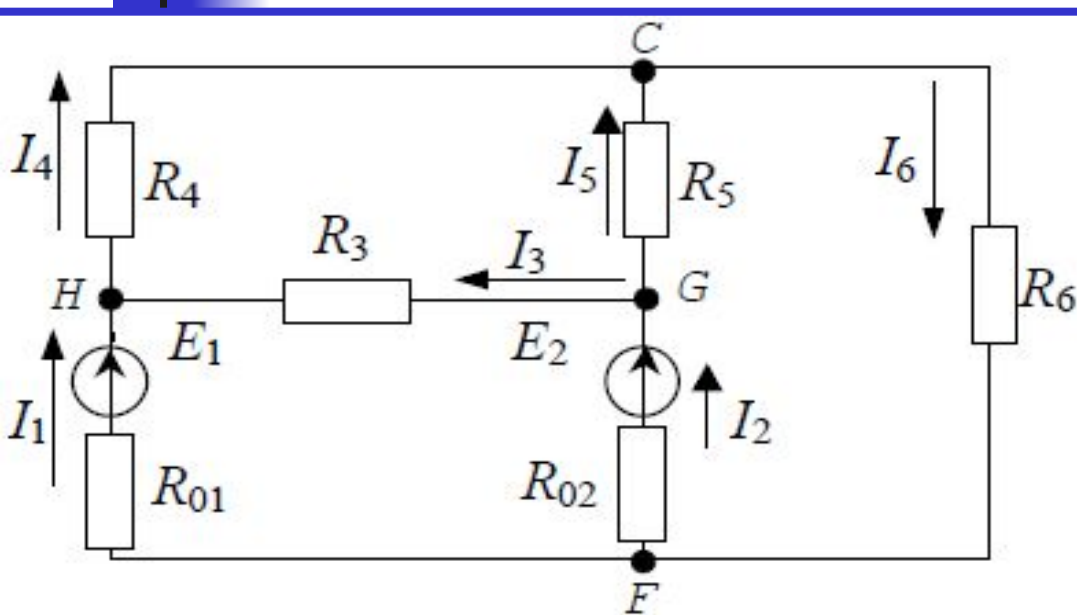
$$\sum_{k=1}^n u_k(t) = 0$$

Второй закон Кирхгофа

- Вторая формулировка второго закона Кирхгофа: алгебраическая сумма ЭДС в любом замкнутом контуре цепи в любой момент времени равна алгебраической сумме падений напряжений на элементах этого контура:

$$\sum_{k=1}^m e_k(t) = \sum_{k=1}^n u_k(t)$$

Пример составления уравнений по 1 и 2 законам Кирхгофа



для узла $H \rightarrow I_1 + I_3 - I_4 = 0$,
для узла $C \rightarrow I_4 + I_5 - I_6 = 0$,
для узла $G \rightarrow I_2 - I_3 - I_5 = 0$.

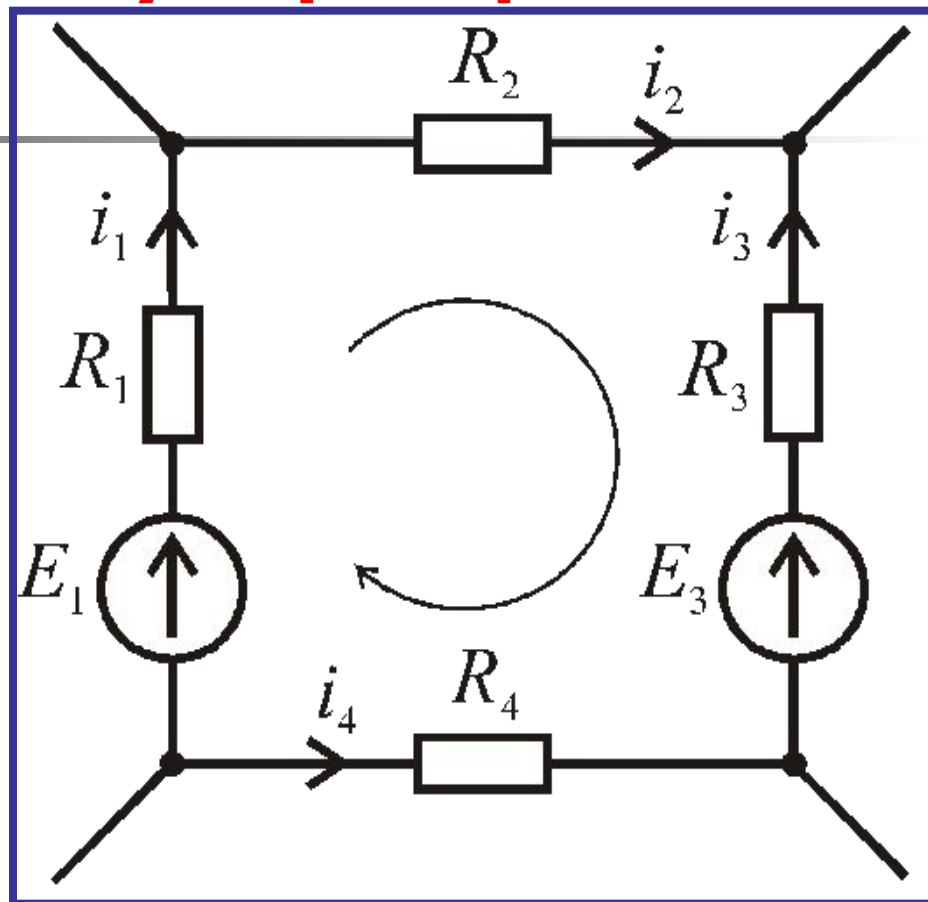
для контура $HCGH \rightarrow R_3 \cdot I_3 + R_4 \cdot I_4 - R_5 \cdot I_5 = 0$,

для контура $HGFH \rightarrow R_01 \cdot I_1 - R_3 \cdot I_3 - R_02 \cdot I_2 = E_1 - E_2$

для контура $CFGC \rightarrow R_5 \cdot I_5 + R_6 \cdot I_6 + R_02 \cdot I_2 = E_2$.

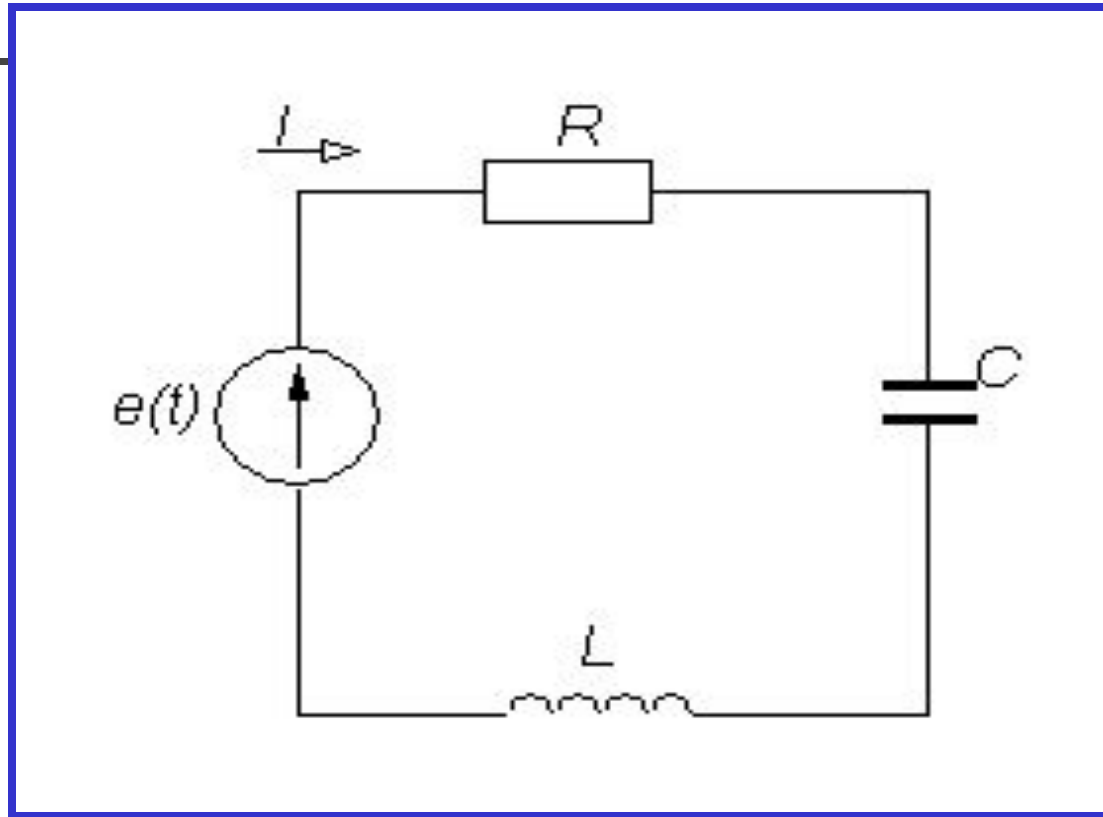
Пример. Составление уравнения по второму закону Кирхгофа

Направлениями токов в ветвях и условным положительным направлением обхода контура задаются произвольно !



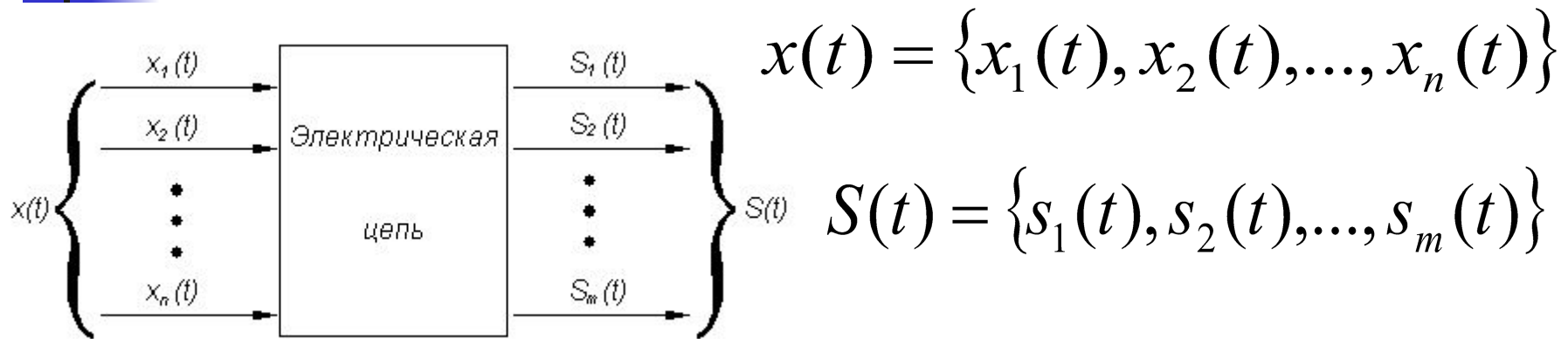
$$R_1 i_1 + R_2 i_2 - R_3 i_3 - R_4 i_4 = E_1 - E_3$$

Уравнение последовательной RLC-цепи на основании второго закона Кирхгофа



$$Ri + \frac{1}{C} \int i dt + L \frac{di}{dt} = e(t)$$

4. Основные задачи теории цепей



Задачи анализа цепи – это задачи, в которых по известным внешнему воздействию $x(t)$, конфигурации и параметрам цепи определяют реакцию цепи $S(t)$.

Задачи синтеза цепи – это задачи, в которых требуется определить структуру и параметры цепи по заданной реакции цепи $S(t)$ на некоторое внешнее воздействие $x(t)$.

