



Решение задач с помощью квадратных уравнений



Необходимость решать квадратные еще в древности была вызвана потребностью решать задачи, связанные с нахождением площадей земельных участков и с земляными работами военного характера, а также с развитием астрономии и самой математики. Квадратные уравнения вавилоняне умели решать еще около 2000 лет до н. э. правило решения этих уравнений, изложенное в Вавилонских текстах, совпадает по существу с современными, однако неизвестно, каким образом дошли вавилоняне до этого правила.

Диофант (ок.3 в до н.э.)

древнегреческий математик из Александрии

Он собирал известные и придумывал новые задачи, а позднее объединил их в большом труде под названием «Арифметика». Из тринадцати книг, входивших в состав «Арифметики», только шесть пережили хаос Средних веков и стали источником вдохновения для математиков эпохи Возрождения. Остальные семь книг погибли в результате цепочки трагических событий, которые отбросили математику к временам древних вавилонян.

Κ^τ η̄ Λ Δ^τ ιϛ̄ ισ Κ^τ ᾱ.

Καθεὶ τῶν, ὁ μὲν ὀ. δύναμις, καὶ ἐστὶν αὐτῆς σημεῖον ο. λ. ὁ δὲ ἐπίσημον ἔχει τ. α. ο. ο. ὁ δὲ κύβος, καὶ ἐστὶν αὐτῆς σημεῖον κ. ἐπίσημον ἔχει τ. κ. ο. ο. ὁ δὲ ἐκ τετραῶν ἐφέαυτ' ἀπλοπλάσιαδιῶσ, διωμοδύναμις, καὶ ἐστὶν αὐτῆς σημεῖον δ. ἐπίσημον ἔχει τ. α. α. ο. ο. ὁ δὲ ἐκ πέντε ἀπλοπλάσιαδιῶσ, διωμοκύβος καὶ ἐστὶν αὐτῆς σημεῖον ε. ἐπίσημον ἔχει τ. α. α. ο. ο. ὁ δὲ ἐκ ἑξαπλοπλάσιαδιῶσ, κυβόκυβος, καὶ ἐστὶν αὐτῆς σημεῖον ς. ἐπίσημον ἔχει τ. κ. ο. ο.

В верхней строке записано уравнение

$$x^3 \cdot 8 - x^2 \cdot 16 = x^3$$

Лист из Арифметики

Фибоначчи-1170г



Формулы решения квадратных уравнений в Европе были впервые изложены в "Книге об абаке", написанной в 1202 году итальянским математиком Леонардо Фибоначчи.

Его книга способствовала распространению алгебраических знаний не только в Италии, но и Германии, Франции и других странах Европы.

Этот вывод и был сформулирован впервые французским математиком Франсуа Виетом, который все знают как **теорема Виета**



В приведенном квадратном уравнении сумма корней уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение его корней равно свободному коэффициенту

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

М. Штифель



Но общее правило решения квадратных уравнений, при всевозможных комбинациях коэффициентов b и c было сформулировано в Европе лишь в 1544 году немецким математиком М. Штифелем.

$$2x^2 - x = 0$$

$$x^2 - 16 = 0$$

$$3) \quad 4x^2 + x - 3 = 0$$

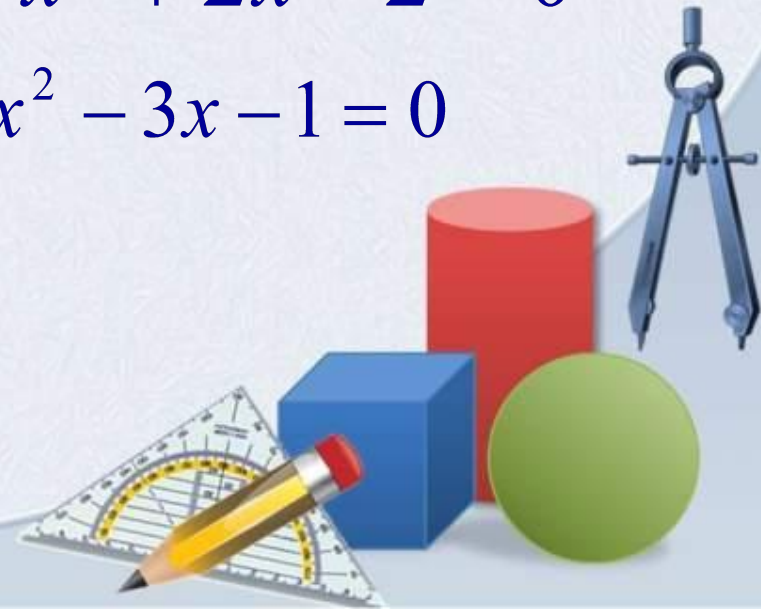
$$2x^2 = 0$$

$$x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$2) \quad 9x^2 - 6x + 10 = 0$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$x^2 - 3x - 1 = 0$$



$$34x^2 = 0$$

$$x^2 = 36$$

$$x^2 = -25$$

$$x^2 - 5x = 0$$

$$2x^2 - 96 = 0$$



$$x = 0$$

$$x = 6 \text{ и } x = -6$$

нет корней

$$x = 0 \text{ и } x = 5$$

$$x = 4\sqrt{3} \text{ и } x = -4\sqrt{3}$$



Задача №1

Спортивная площадка площадью 1800 кв.м имеет форму прямоугольника, длина которого на 5м больше ширины. Найдите размеры площадки.

решение

x м- ширина площадки,

$(x+5)$ м- длина площадки,

$$S=x(x+5).$$

$$x(x+5)=1800,$$

$$x^2+5x-1800=0,$$

$$D=25+7200=7225>0,$$

$$x=(-5\pm 85):2,$$

$x_1=-45$ не удовлетворяет условию задачи,

$$x_2=40, x+5=45$$

Ответ: 40м и 45м

Задача №2

Найти два последовательных натуральных числа, произведение которых равно 132.

Пусть x и $x+1$ – неизвестные числа, тогда

$$x(x+1)=132,$$

$$x^2 + x - 132 = 0,$$

$$D=1+528=529>0,$$

$$x=(-1\pm 23):2,$$

$x_1=-12$ - не удовлетворяет условию задачи,

$$x_2=11, x+1=12.$$

Ответ: 11 и 12.

Справка.

Натуральные числа: 1,2,3,4,5,6,7,...

Задача №3

Найти два последовательных нечетных числа, если их произведение равно 195.

Пусть x и $x+2$ – искомые числа, тогда

$$x(x+2)=195,$$

$$x^2+2x-195=0,$$

$$D=1+195=196>0,$$

$$x=-1\pm 14,$$

$x_1=-15$ -не удовлетворяет условию задачи,

$$x_2=13, x+2=15.$$

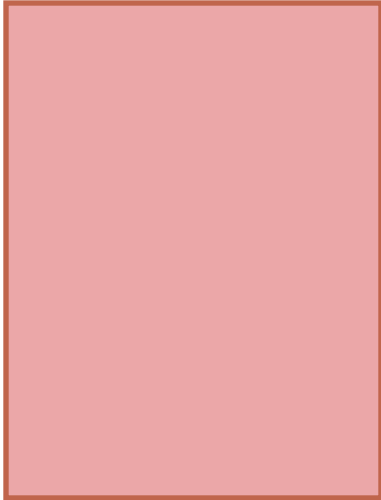
Ответ: 13и15.

Справка.

Нечетные числа: 1,3,5,7,9,11,...

Задача №4

Периметр прямоугольника равен 10 м, площадь-6 м². Найти его стороны.



Пусть a и b – стороны прямоугольника, тогда $P=2(a+b)$,

$$2(a+b)=10, a+b=5, a=5-b;$$

$$S=b(5-b),$$

$$5b-b^2=6,$$

$$b^2-5b+6=0,$$

$$D=25-24=1>0,$$

$$b=(5\pm 1):2,$$

$$b_1=3, b_2=2;$$

$$a_1=2, a_2=3.$$

Ответ: 2м и 3м.

Задача 5. Индусская задача

«На две партии разбившись

Забавлялись обезьяны.

Часть восьмая их в квадрате

В роще весело резвилась

Криком радостным двенадцать

Воздух свежий оглашали...

Вместе сколько ты мне скажешь,

Обезьян там было в роще?»

решение

Решение. Общая численность стаи x , то

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x$$

$$x^2 - 64x + 12 \cdot 64 = 0$$

$$x^2 - 64x + 768 = 0$$

по теореме, обратной теореме Виета,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 64; \\ x_1 \cdot x_2 = 768; \end{cases} \quad x_1=48 \text{ и } x_2=16.$$

Задача имеет два решения

Задача №6

Определите стороны прямоугольного поля площадью 140 га, если одна его сторона на 400 м больше другой.

Справка

$$1\text{га} = 10000\text{м}^2$$

решение

x м – сторона поля;

$(x+400)$ м – другая сторона.

По условию площадь 1400000 м².

Составим уравнение.

$$x(x+400)=1400\ 000,$$

$$x^2 + 400x - 1400\ 000=0,$$

$$D = 160000 + 5600\ 000 = 5760000$$

$$x_1 = 1000,$$

$$x_2 = 1400.$$

Ответ. 1000 м, 1400 м.



Задача №6

Расстояние между городами скорый поезд, идущий со скоростью 90 км/ч, проходит на $1,5$ ч быстрее товарного, который идет со скоростью 60 км/ч. Каково расстояние между городами?

решение

x км/ч-расстояние между городами;

$x/90$ ч-время скорого поезда;

$x/60$ ч-время товарного поезда;

$x/90$ меньше $x/60$ на 1,5 часа.

Составим уравнение:

$$x/60 - x/90 = 3/2;$$

$$3x-2x=270;$$

$$x=270.$$

Ответ. 270 км.

Задача №7

Ученику и мастеру дано задание изготовить одинаковое количество деталей. Мастер, изготавливая 18 деталей в час, затратил на выполнение задания на 3 ч меньше, чем ученик, который изготавливал лишь 12 деталей в час. Сколько деталей было заказано?

Решение.

x -вся работа;

$x/18$ ч.- время затраченное мастером;

$x/12$ ч.- время затраченное учеником;

$x/18$ меньше $x/12$ на 3 часа.

Составим уравнение:

$$x/12 - x/18 = 3;$$

$$3x - 2x = 108;$$

$$x = 108.$$

Ответ. 108 деталей.

Задача №8

Автобус-экспресс отправился от вокзала в аэропорт, находящийся на расстоянии 60 км от вокзала. Пассажир, опоздавший на 5 минут на автобус, решил добраться до аэропорта на такси. Скорость такси на 10 км/ч больше скорости автобуса. С какой скоростью ехал автобус, если он приехал в аэропорт одновременно с такси?

решение

	Скорость (км/ч)	Время (ч)	Путь (км)
Автобус	X	$60/X$	60
Такси	$X+10$	$60/(X+10)$	60

$60/(x+10)$ меньше $60/x$ на $1/12$.

Составим уравнение:

$$60/x - 60/(x+10) = 1/12;$$

$$720(x+10) - 720x = x(x+10);$$

$$720x + 7200 - 720x = x^2 + 10x;$$

$$x^2 + 10x - 7200 = 0;$$

$$D = 28900;$$


$x_1 = -90$ не удовлетворяет условию задачи;

$$x_2 = 80.$$

Ответ. 80 км/час.

Задача №9

Для вывоза песка из карьера в автопарке было заказано несколько одинаковых грузовых автомобилей. Руководство автопарка решило, что на каждую машину можно погрузить на одну тонну груза больше, чем рассчитывали, и поэтому прислало на 4 машины меньше. В итоге все 80 тонн песка были вывезены. Сколько машин было заказано в автопарке?



	Тоннаж машин (т)	Число Машин (шт)	Общий груз (т)
Заказано	$80/x$	x	80
На самом деле	$80/(x-4)$	$x-4$	80

$80/(x-4)$ больше $80/x$ на 1 тонну.

Составим уравнение:

$$80/(x-4) - 80/x = 1;$$

$$80x - 80x + 320 = x^2 - 4x;$$

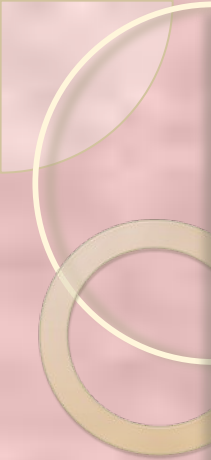
$$x^2 - 4x - 320 = 0;$$

$$D = 1296;$$

$x_1 = -16$ — не удовлетворяет
условию задачи;

$$x_2 = 20.$$

Ответ. 20 машин.



1. Ученик решил прочитать книгу, содержащую 480 страниц, за несколько дней. Но каждый день он читал на 20 страниц больше, чем предполагал, и поэтому прочитал книгу на 4 дня раньше. За сколько дней была прочитана книга?

2. Теплоход прошёл 18 км по озеру и 40 км по течению реки за 2 ч. Найдите скорость теплохода при движении по озеру, если скорость течения реки равна 3 км/ч.

3. Расстояние между городами скорый поезд, идущий со скоростью 90 км/ч, проходит на 1,5 ч быстрее товарного, который идет со скоростью 60 км/ч. Каково расстояние между городами?

ОТВЕТЫ:

1. $480/(x-4) - 480/x = 20; x = 8$

2. $18/x + 40/(x+3) = 2, x = 27$

3. 270км

Решение задач.

№1.

x страниц предполагал читать ученик в день,

$480/x$ дней предполагал ученик читать книгу,

$(x+20)$ страниц читал ученик в день,

$480/(x+20)$ дней читал ученик книгу,

$$480/x - 480/(x+20) = 4,$$

$$480(x+20) - 480x = 4x(x+20),$$

$$120(x+20) - 120x = x(x+20),$$

$$120x + 2400 - 120x = x^2 + 20x,$$

$$x^2 + 20x - 2400 = 0,$$

$$D_1 = 100 + 2400 = 2500 > 0,$$

$$x = -10 \pm 50,$$

$x_1 = -60$ не удовлетворяет условию задачи,

$x_2 = 40$, $x+20=60$, $480:60=8$ (дней) читал ученик книгу.

Ответ: 8 дней.

№2

x км/ч-скорость теплохода по озеру,

$18/x$ ч шёл теплоход по озеру,

$(x+3)$ км/ч – скорость теплохода по течению реки,

$40/(x+3)$ ч шёл теплоход по реке,

$$18/x + 40/(x+3) = 2,$$

$$18(x+3) + 40x = 2x(x+3),$$

$$9(x+3) + 20x = x(x+3),$$

$$9x + 27 + 20x = x^2 + 3x,$$

$$x^2 - 26x - 27 = 0,$$

$$D_1 = 169 + 27 = 196 > 0,$$

$$x = 13 \pm 14,$$

$x_1 = -1$ не удовлетворяет условию задачи,

$$x_2 = 27.$$

Ответ: 27 км/ч

№3.

x км- расстояние между городами;

$x/90$ ч затратил скорый поезд на весь путь;

$x/60$ ч затратил грузовой поезд на весь путь;

$x/60 > x/90$ на 1,5;

$x/60 - x/90 = 1,5$;

умножим обе части уравнения на 180, получим

$3x - 2x = 270$;

$x = 270$.

Ответ: 270км