

Системы счисления

§ 7. Системы счисления

§ 8. Двоичная система счисления

§ 9. Восьмеричная система счисления

§ 10. Шестнадцатеричная система счисления

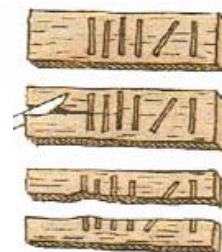
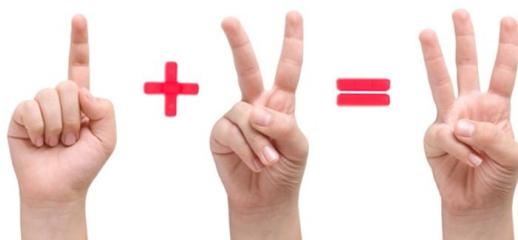
Системы счисления

§ 1. Кодирование чисел

Что такое система счисления?

Система счисления — это правила записи чисел с помощью специальных знаков — **цифр**, а также соответствующие правила выполнения операций с этими числами.

Счёт на пальцах:



Унарная (лат. *unus* – один) – одна цифра обозначает единицу (1 день, 1 камень, 1 баран, ...)



- только натуральные числа
- запись больших чисел – длинная (1 000 000?)

Непозиционные системы счисления

Непозиционная система счисления — это такая система, в которой значение цифры не зависит от её места (позиции) в записи числа.

- унарная
- египетская десятичная
- римская
- славянская
- и другие...

Египетская десятичная система

черта	– 1	лотос	 – 1000	 – 1000000
хомут	⌢ – 10	палец	 – 10000	человек
верёвка	Ⓢ – 100	лягушка	 – 100000	

$$\text{лотос} \text{ верёвка } \text{верёвка} \text{ хомут хомут хомут хомут } ||||| = 1235$$

$$2014 = \text{лотос лотос} \text{ хомут } |||||$$

Римская система счисления



Должн / Д. Е 1644 /
10/11-880.

- I** — 1 (палец)
- V** — 5 (раскрытая ладонь)
- X** — 10 (две ладони)
- L** — 50
- C** — 100 (*Centum*)
- D** — 500 (*Demimille*)
- M** — 1000 (*Mille*)



Спасская башня
Московского Кремля

Римская система счисления

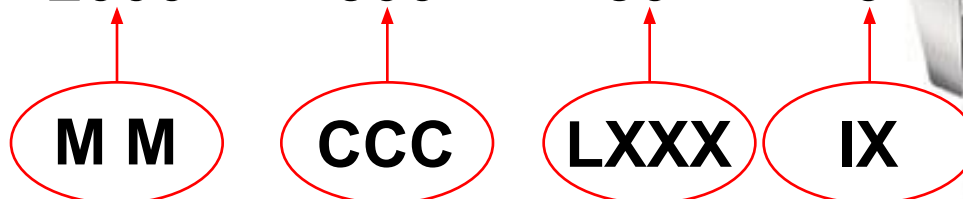
Правила:

- (обычно) не ставят больше **трех** одинаковых цифр подряд
- если **младшая** цифра (только **одна!**) стоит **слева** от старшей, она вычитается из суммы (*частично непозиционная!*)

Примеры:

$$\text{MDCXLIV} = 1000 + 500 + 100 - 10 + 50 - 1 + 5 = 1644$$

$$2389 = 2000 + 300 + 80 + 9$$



$$2389 = \text{М М С С С L X X X I X}$$



Римская система счисления

MCDLXVII =

MMDCXLIV =

MMMCCCLXXII =

CMXXVIII =

Римская система счисления

3768 =

2983 =

1452 =

1999 =

Римская система счисления



- только натуральные числа (*дробные?*
отрицательные?)
- для записи больших чисел нужно вводить новые цифры

■ слож



Какое максимальное число
можно записать?

Славянская система счисления

алфавитная система счисления (непозиционная)



Часы
Суздальского
Кремля

Определения

Позиционная система: значение цифры определяется ее позицией в записи числа.

тысячи сотни десятки единицы

3 2 1 0 разряды

6 3 7 5

6000 300 70 5

$$= 6 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

развёрнутая форма
записи числа

основание

Алфавит системы счисления — это используемый в ней набор цифр.

Основание системы счисления — это количество цифр в алфавите (мощность алфавита).

Разряд — это позиция цифры в записи числа. Разряды в записи целых чисел нумеруются с нуля справа налево.

Другие позиционные системы

- двоичная

4 3 2 1 0

$$10110_2 = 1 \cdot 2^4 + \cancel{0 \cdot 2^3} + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + \cancel{0 \cdot 2^0} = 22$$

- восьмеричная система

2 1 0

$$145_8 = 1 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0 = 101$$

! $N^0 = 1$

- шестнадцатеричная

2 1 0

$$123_{16} = 1 \cdot 16^2 + 2 \cdot 16^1 + 3 \cdot 16^0 = 291$$

- и другие...

2 1 0

$$123_5 = 1 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0 = 38$$

$$456_7 = \cancel{102_2} \quad 365_{12}$$

$$\cancel{578_8} \quad 172_9 \quad \cancel{521_4}$$

? Что неверно?

Позиционные системы счисления

Задача. В некоторой системе счисления число **58** записывается как **46_x** . Определите основание x этой системы счисления.

Переведём **46_x** в десятичную систему:

$$\overset{1}{4}\overset{0}{6}_x = 4 \cdot x^1 + \quad = 4x + 6$$

$$4x + \overset{6}{6}x^0 = 58$$

$$4x = 52$$

$$x = 13$$

Системы счисления

§ 2. Двоичная система счисления

Двоичная система счисления

Основание (количество цифр): 2

Алфавит: 0, 1



- нужны только устройства с **двумя состояниями**
- компьютеру проще выполнять **вычисления** (умножение сводится к сложению и т.п.)



- **длинная** запись чисел: $1024 = 100000000000_2$
- запись **однородна** (только 0 и 1)

Перевод в десятичную систему

$$2 \rightarrow 10$$

4 3 2 1 0 разряды

$$10011_2 = 1 \cdot 2^4 + \cancel{0 \cdot 2^3} + \cancel{0 \cdot 2^2} + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

$$10 \rightarrow 2$$

$$= 16 + 2 + 1 = 19$$

Выделение степеней числа 2:

$$21 = 16 + 5 = 16 + 4 + 1 = 10101_2$$

$$2^4 \quad 2^4 \quad 2^2 \quad 2^0$$

$$21 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 +$$

$$1 \cdot 2^0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1$$

Выделение степеней числа 2

77 **10** → **2**

2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
				1	0	0	1	1	0	1

$$77 = 64 + 8 + 4 + 1$$

$$77 = 1001101_2$$

Другой способ

$$\begin{array}{cccccc} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 10011_2 & = & 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + \\ & = & 1(2^0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) \cdot 2 + 1 \end{array}$$



Какое число?

делится на 2

остаток от
деления на 2

$$1001_2 = 10011_2 : 2$$

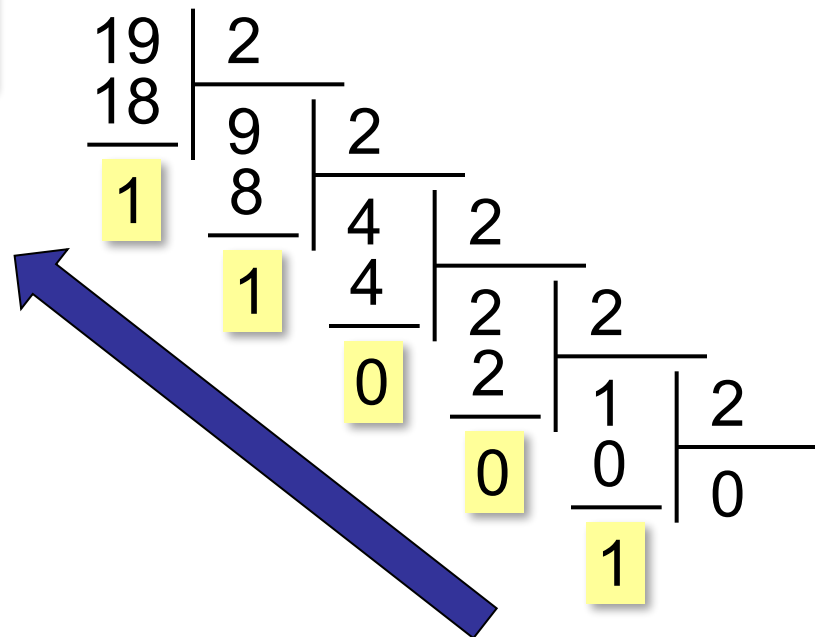
деление
нацело



Последняя цифра
двоичной записи
числа = остатку от
его деления на 2!

Другой способ

10 → 2



$$19 = 10011_2$$



Как определить, что число чётное?

Сложение в двоичной системе

10

$$\begin{array}{r}
 111 \\
 789 \\
 + 567 \\
 \hline
 1356
 \end{array}$$



Когда перенос?

2

$$\begin{array}{r}
 11111 \\
 10110_2 \\
 + 11101_2 \\
 \hline
 1010001_2
 \end{array}$$



Перенос, когда > 1 !

$$1 + 1 = 2 = 10_2$$

$$1 + 1 + 1 = 3 = 11_2$$

Сложение в двоичной системе

$$\begin{array}{r} 101101_2 \\ + 11111_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10111_2 \\ + 101110_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111011_2 \\ + 11011_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111011_2 \\ + 10011_2 \\ \hline \end{array}$$

Вычитание в двоичной системе

10

$$\begin{array}{r}
 \overset{\bullet}{0} \overset{\bullet}{9} 1 \\
 \cancel{1} \cancel{0} \cancel{2} 1 \\
 - 567 \\
 \hline
 0454
 \end{array}$$

+10

+10

?

Когда берем заём?
Чему он равен?

2

$$\begin{array}{r}
 \overset{\bullet}{0} \overset{\bullet}{1} \overset{\bullet}{1} \overset{\bullet}{0} \\
 \cancel{1} \cancel{0} \cancel{0} \cancel{0} \cancel{1} 0 1_2 \\
 - \quad \quad 11011_2 \\
 \hline
 0101010_2
 \end{array}$$

+2

+2

!

Заём равен 2!

Вычитание в двоичной системе

$$\begin{array}{r} 101101_2 \\ - 11111_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 110011_2 \\ - 10101_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11011_2 \\ - 110101_2 \\ \hline \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 110101_2 \\ - 11011_2 \\ \hline \end{array}$$

Системы счисления

§ 3. Восьмеричная система счисления

Восьмеричная система счисления

Основание: 8

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7



Что неправильно?

3275₈

6986₈

5482₈

319₈

Из восьмеричной в десятичную

8 → 10

2 1 0 разряды

$$144_8 = 1 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0 \\ = 64 + 32 + 4 = 100$$

Переведите:

$$12_8 =$$

$$57_8 =$$

$$64_8 =$$

$$77_8 =$$

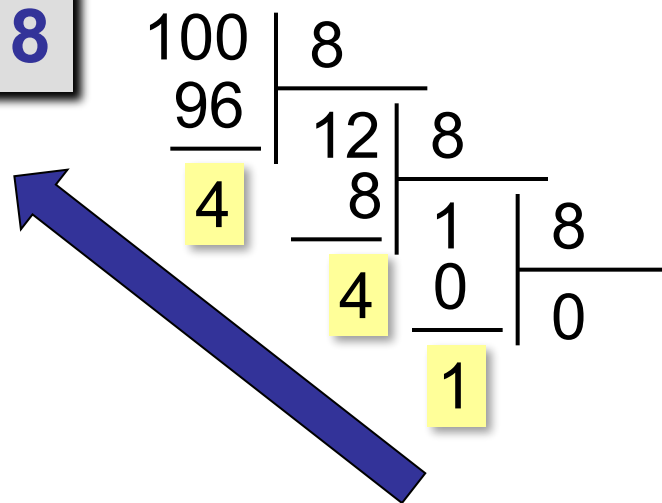


На что делится?

$$120_8 \\ 5700_8$$

Восьмеричная система счисления

10 → 8



$$100 = 144_8$$

Переведите:

$$31 =$$

$$91 =$$

$$126 =$$

$$172 =$$

СВЯЗЬ С ДВОИЧНОЙ СИСТЕМОЙ

$$753_8 = 7 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0$$

$$= 7 \cdot 2^6 + 5 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^0$$

$$8 = 2^3$$

$$\begin{matrix} \text{111} & \text{101} & \text{011} \\ 2 & 2 & 2 \end{matrix}$$

$$753_8 = (1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) \cdot 2^6$$

$$+$$

$$(1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) \cdot 2^3$$

$$753_8 = 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6$$

$$+ 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$



Каждая цифра
отдельно!

$$0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 111101011_2$$

СВЯЗЬ С ДВОИЧНОЙ СИСТЕМОЙ

$$8 = 2^3$$



Каждая восьмеричная цифра может быть записана как **три** двоичных (*триада*)!

$$1625_8 = \underbrace{001}_1 \underbrace{110}_6 \underbrace{010}_2 \underbrace{101}_5_2$$

0	1	2	3	4	5	6	7
000	001	010	011	100	101	110	111

Перевод из двоичной в восьмеричную

1001011101111_2

Шаг 1. Разбить на триады, начиная справа:

$001\ 001\ 011\ 101\ 111_2$

Шаг 2. Каждую триаду записать одной восьмеричной цифрой:

$001\ 001\ 011\ 101\ 111_2$
 $\boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{5}\ \boxed{7}$

Ответ: $1001011101111_2 = 11357_8$

СВЯЗЬ С ДВОИЧНОЙ СИСТЕМОЙ

Переведите в двоичную систему:

$$375_8 =$$

$$5246_8 =$$

Переведите в восьмеричную систему:

$$1010011_2 =$$

$$10101100_2 =$$

Сжатая запись двоичных кодов

PDP-11, ДВК, СМ ЭВМ, БЭСМ, БК

0	1	0	1	1	1	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---

136₈

1

3

6

Запишите в сжатой форме:

1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Сложение

сложение

$$\begin{array}{r}
 1 \ 1 \ 1 \\
 1 \ 5 \ 6_8 \\
 + \ 6 \ 6 \ 2_8 \\
 \hline
 1 \ 0 \ 4 \ 0_8
 \end{array}$$

1 в перенос

1 в перенос

$$6 + 2 = 8 = \mathbf{8} + 0$$

$$5 + 6 + \mathbf{1} = 12 = \mathbf{8} + 4$$

$$1 + 6 + \mathbf{1} = \mathbf{8} = \mathbf{8} + 0$$

1 в перенос

Вычитание

ВЫЧИТАНИЕ

■ ■

$$\begin{array}{r}
 456_8 \\
 - 277_8 \\
 \hline
 157_8
 \end{array}$$

заём

$$(6 + 8) - 7 = 7 \quad \text{заём}$$

$$(5 - 1 + 8) - 7 = 5$$

$$(4 - 1) - 2 = 1$$

Выполните сложение и вычитание

$$\begin{array}{r} 353_8 \\ + 736_8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1156_8 \\ - 662_8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1353_8 \\ + 777_8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 156_8 \\ - 662_8 \\ \hline \end{array}$$

Системы счисления

§ 4. Шестнадцатеричная система счисления

Шестнадцатеричная система

Основание: 16

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**
10 11 12 13 14 15



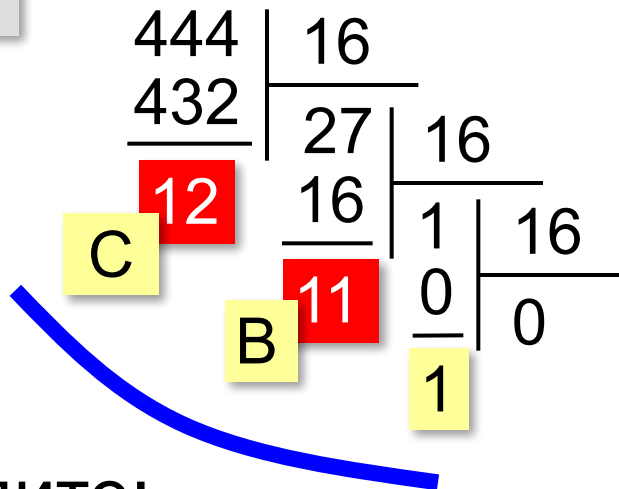
Что неправильно?

34AF5₁₆
9FF61₁₆

~~5BG6₁₆~~
~~ADH23₁₆~~

Перевод в шестнадцатеричную систему

10 → 16



$$444 = 1BC_{16}$$

Переведите:

$$31 =$$

$$91 =$$

$$126 =$$

$$172 =$$

Перевод из шестнадцатеричной системы

16 → 10

2 1 0 разряды

$$1BC_{16} = 1 \cdot 16^2 + B \cdot 16^1 + C \cdot 16^0$$

$$= 1 \cdot 256 + 12 \cdot 16 + 12 = 256 + 192 + 12 = 444$$

Переведите: $256 + 176 + 12 = 444$



На что делится?

$$12_{16} =$$

$$5A_{16} =$$

$$B9_{16} =$$

$$AB_{16} =$$

$$120_{16}$$

$$5700_{16}$$

СВЯЗЬ С ДВОИЧНОЙ СИСТЕМОЙ СЧИСЛЕНИЯ

$$16 = 2^4$$



Каждая шестнадцатеричная цифра может быть записана как **четыре** двоичных (*тетрада*)!

$$7F1A_{16} = \underbrace{0111}_7 \underbrace{1111}_{F(15)} \underbrace{0001}_1 \underbrace{1010}_{A(10)}_2$$

0	1	2	3	4	5	6	7
0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111

8	9	A(10)	B(11)	C(12)	D(13)	E(14)	F(15)
1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

Перевод из двоичной системы

1001011101111_2

Шаг 1. Разбить на тетрады, начиная справа:

$0001\ 0010\ 1110\ 1111_2$

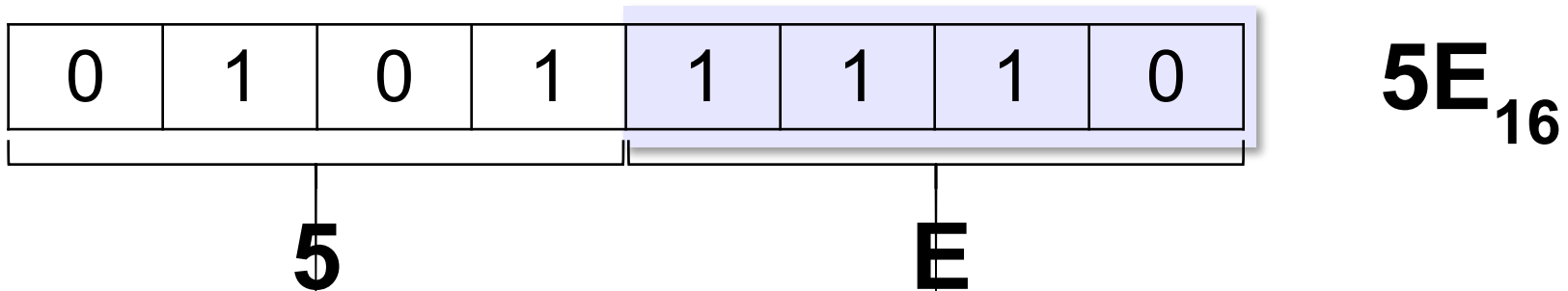
Шаг 2. Каждую тетраду записать одной шестнадцатеричной цифрой:

$0001\ 0010\ 1110\ 1111_2$
 $\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{E}\ \boxed{F}$

Ответ: $1001011101111_2 = 12EF_{16}$

Сжатая запись двоичных кодов

Intel, AMD, ARM

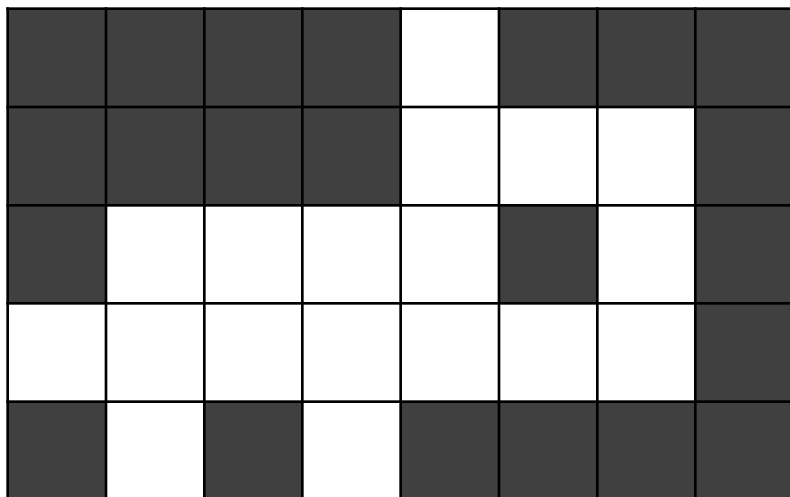


Запишите в сжатой форме:

1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Сжатая запись двоичных кодов

Закодируйте рисунок и запишите в сжатой форме:



0	0	0	0	1	0	0	0

СВЯЗЬ С ДВОИЧНОЙ СИСТЕМОЙ СЧИСЛЕНИЯ

Переведите в двоичную систему:

$$\mathbf{EA1238_{16} =}$$

Переведите в шестнадцатеричную систему :

$$\mathbf{11111010011_2 =}$$

Переведите в восьмеричную систему :

$$\mathbf{2FA_{16} =}$$

Переведите в шестнадцатеричную систему :

$$\mathbf{165_8 =}$$

Сложение

сложение

$$\begin{array}{r} \text{A } 5 \text{ B}_{16} \\ + \text{C } 7 \text{ E}_{16} \\ \hline 1 \text{ 6 D } 9_{16} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \\ \text{10 } 5 \text{ 11} \\ + \text{12 } 7 \text{ 14} \\ \hline 1 \text{ 6 } 13 \text{ 9} \end{array}$$

1 в перенос

$$11 + 14 = 25 = 16 + 9$$

$$5 + 7 + 1 = 13 = \text{D}_{16}$$

1 в перенос

$$10 + 12 = 22 = 16 + 6$$

Вычитание

ВЫЧИТАНИЕ

заём

$$\begin{array}{r} \text{C } 5 \text{ B}_{16} \\ - \text{A } 7 \text{ E}_{16} \\ \hline 1 \text{ D } \text{D}_{16} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{12 } 5 \text{ 11} \\ - \text{10 } 7 \text{ 14} \\ \hline 1 \text{ 13 } 13 \end{array}$$

заём

$$(11 + \textcolor{blue}{16}) - 14 = \textcolor{red}{13} = \text{D}_{16}$$

$$(5 - \textcolor{red}{1}) + \textcolor{blue}{16} - 7 = \textcolor{red}{13} = \text{D}_{16}$$

$$(12 - \textcolor{red}{1}) - 10 = 1$$

Арифметические действия

$$\begin{array}{r} \text{C B A}_{16} \\ + \text{A 5} \\ \hline \text{9}_{16} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{1 B A}_{16} \\ - \text{A 5 9}_{16} \\ \hline \end{array}$$

Конец фильма

ПОЛЯКОВ Константин Юрьевич

д.т.н., учитель информатики

ГБОУ СОШ № 163, г. Санкт-Петербург

kpolyakov@mail.ru

ЕРЕМИН Евгений Александрович

к.ф.-м.н., доцент кафедры мультимедийной

дидактики и ИТО ПГГПУ, г. Пермь

eremin@pspu.ac.ru

Источники иллюстраций

1. itfoundations.com
2. museum.comp-school.ru
3. иллюстрации художников издательства «Бином»
4. авторские материалы