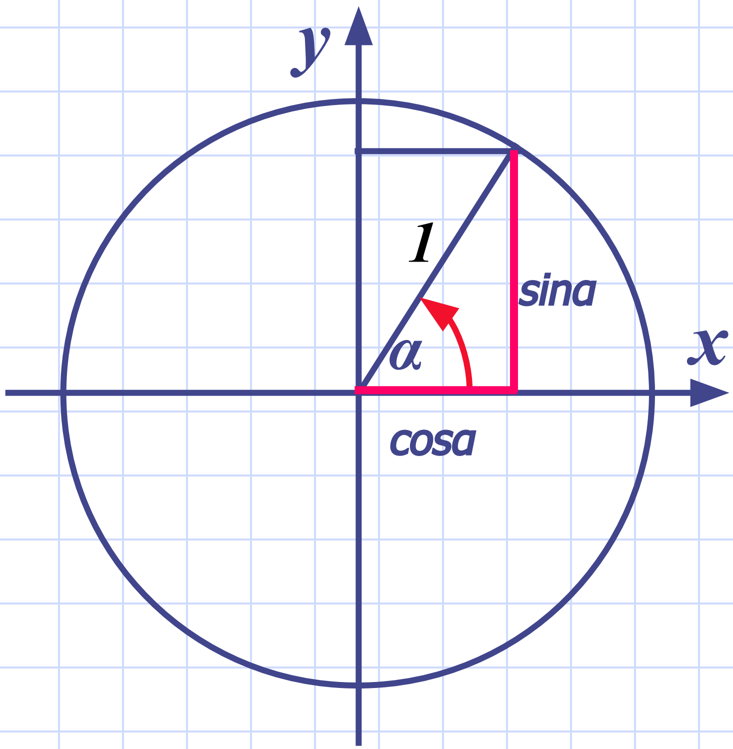
Преобразование тригонометрических выражений

Формулы Тригонометрии

Содержание

Зависимость между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом одного и того же угла



По теореме Пифагора:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Разделим обе части равенства на $\sin^2\alpha \neq 0$

$$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Разделим обе части равенства на $\cos^2\alpha \neq 0$

$$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Зависимость между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом одного и того же угла

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \\[2ex] \operatorname{ctg}\alpha &= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \end{aligned}\right\} \quad \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = ?\;1$$

содержание

Пример 1

$\sin t = \frac{3}{5}$ и $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Найти $\cos t$, $tg t$, $ctg t$.

$$\boxed{\sin^2 t + \cos^2 t = 1}$$

$$\cos^2 t = 1 - \sin^2 t = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

$$\cos t = \frac{4}{5} \quad \text{или} \quad \cos t = -\frac{4}{5}$$

т.к. $0 < t < \frac{\pi}{2}$ (I четверть, $\cos t > 0$), то $\cos t = \frac{4}{5}$

$$\boxed{tg t = \frac{\sin t}{\cos t}} \qquad \boxed{ctg t = \frac{1}{tg t}}$$

$$tg t = \frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{3}{4} \qquad ctg t = \frac{4}{3}$$

Пример 2 $tgt = -\frac{5}{12}$ и $\frac{\pi}{2} < t < \pi$. *Найти* $sint,\ cost,\ ctgt.$

$$\boxed{tg^2 t + 1 = \frac{1}{\cos^2 t}}$$

$$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \left(-\frac{5}{12}\right)^2 = \frac{169}{144}$$

$$\cos t = \frac{12}{13} \quad \text{или} \quad \cos t = -\frac{12}{13}$$

$$\text{т.к. } \frac{\pi}{2} < t < \pi \ (\text{II четверть}, \ cost < 0), \text{то } \ cost = -\frac{12}{13}$$

$$\boxed{tgt = \frac{\sin t}{\cos t}}$$

$$\sin t = tgt \cdot \cos t = \left(-\frac{5}{12}\right) \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) = \frac{5}{13}$$

$$\boxed{ctgt = \frac{1}{tgt}}$$

$$ctgt = -\frac{12}{5}$$

Синус и косинус суммы и разности аргументов

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y \quad \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y \quad \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y \quad \sin x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y \quad \sin x \sin y$$

содержание

Синус и косинус суммы и разности аргументов

Решить уравнение : $\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\sqrt{3}$

$$\boxed{\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y}$$

$$\boxed{\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y}$$

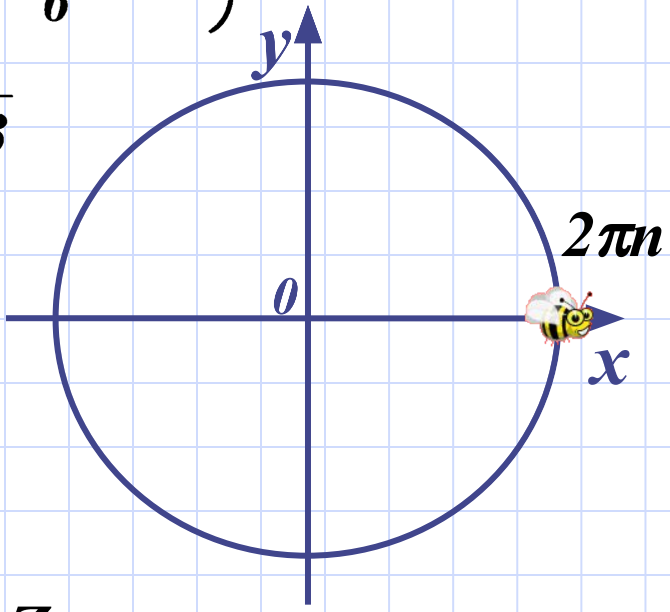
$$\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos x-\cos\frac{\pi}{3}\sin x\right)+\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x+\sin\frac{\pi}{6}\sin x\right)=\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x=\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3}\cos x=\sqrt{3}$$

$$\cos x=1$$

$$x=2\pi n,n\in Z$$



Ответ : $2\pi n,n\in Z$

Тангенс суммы и разности аргументов

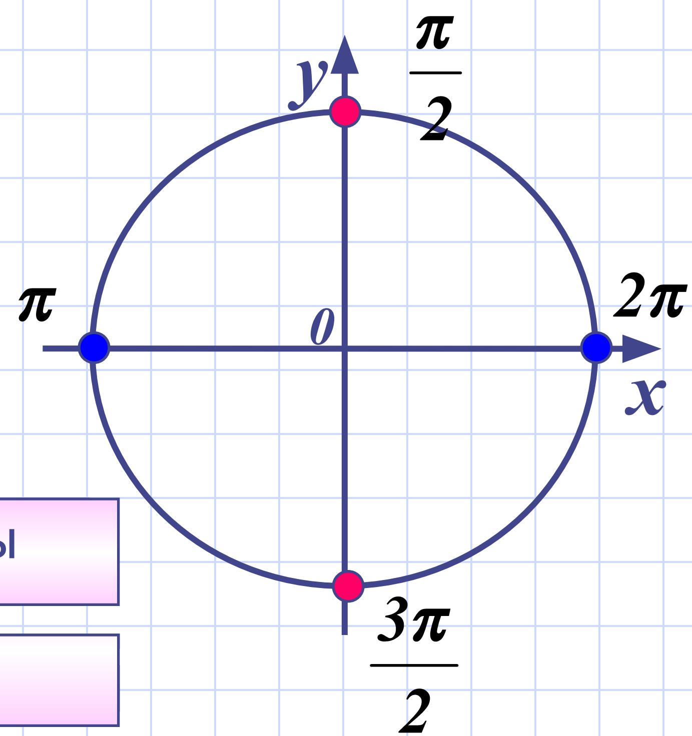
$$tg(x+y)=\frac{tgx+tgy}{1-tgxtgy}$$

$$tg(x-y)=\frac{tgx-tgy}{1+tgxtgy}$$

Формулы приведения

«Правило»

Определить знак функции в той четверти, которой принадлежит аргумент (угол $\boxed{\alpha}$ считаем острым)



«Горизонтальные» – «спящие» углы

«Вертикальные» – «рабочие» углы

Не изменяем функцию, если аргумент $\boxed{(\pi\pm\alpha)}$ $\boxed{(2\pi\pm\alpha)}$

Название функции меняем на кофункцию, если аргумент $\boxed{\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)}$ $\boxed{\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)}$

содержание

Формулы двойного угла

$$\sin 2x = \sin(x + x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos(x + x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$tg 2x = tg(x + x) = \frac{tgx + tgx}{1 - tgx tgx} = \frac{2tgx}{1 - tg^2 x}$$

$$tg 2x = \frac{2tgx}{1 - tg^2 x}$$

Формулы двойного угла

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

Формулы понижения степени

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \qquad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

Выразим $\sin^2 x$

Выразим $\cos^2 x$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Преобразование сумм тригонометрических функций в произведение

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение

Решите уравнение: **sin17x=sin7x**

$$\sin 17x - \sin 7x = 0$$

Применим формулу

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

$$2\sin 5x \cos 12x = 0$$

$$\sin 5x = 0$$

или

$$\cos 12x = 0$$

$$5x = \pi n, n \in Z$$

$$12x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

Ответ:

$$x = \frac{\pi n}{5}, n \in Z$$

$$x = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{12}, n \in Z$$

Преобразование произведений тригонометрических функций в суммы

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y)+\cos(x+y)\right)$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y)-\cos(x+y)\right)$$

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\left(\sin(x-y)+\sin(x+y)\right)$$

Преобразование выражения Asinx+Bcosx

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right) =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\left(\cos t \sin x + \sin t \cos x\right) = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x+t)$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos t = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \sin t = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{array}\right| \Rightarrow tgt = \frac{b}{a}, \quad t = arctg\frac{b}{a}$$

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin\left(x + arctg\frac{b}{a}\right)$$

Преобразование выражения Asinx+Bcosx

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin\left(x + \operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right)$$

Найдите наибольшее и наименьшее значение функции

$$y = 5\sin x - 12\cos x$$

Применим формулу:

$$y = 13\sin\left(x + \operatorname{arctg}\frac{-12}{5}\right)$$

$$y = 13\sin(x - \operatorname{arctg} 2{,}4)$$

$$\text{т.к.}\quad -1 < \sin\alpha < 1,\quad y_{\text{наим}} = -13,\quad y_{\text{наиб}} = 13.$$

$$\text{Ответ}:\ y_{\text{наим}} = -13,\quad y_{\text{наиб}} = 13.$$