

§ 4. Прямая в пространстве

1. Уравнения прямой в пространстве

Пусть $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ – уравнения любых двух различных плоскостей, содержащих прямую ℓ . Тогда координаты любой точки прямой ℓ удовлетворяют одновременно обоим уравнениям, т.е. являются решениями системы

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Систему (1) называют *общими уравнениями прямой в пространстве*.

Другие формы записи уравнений прямой в пространстве – ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ и КАНОНИЧЕСКИЕ уравнения.

ЗАДАЧА 1. Записать уравнение прямой в пространстве, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, параллельно вектору $\vec{s} = \{m; n; p\}$

Вектор, параллельный прямой в пространстве, называют *направляющим вектором* этой прямой.

систему уравнений

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot m, \\ y = y_0 + t \cdot n, \\ z = z_0 + t \cdot p. \end{cases} \quad (2)$$

называют *параметрическими уравнениями прямой в пространстве* (в векторной и координатной форме соответственно).

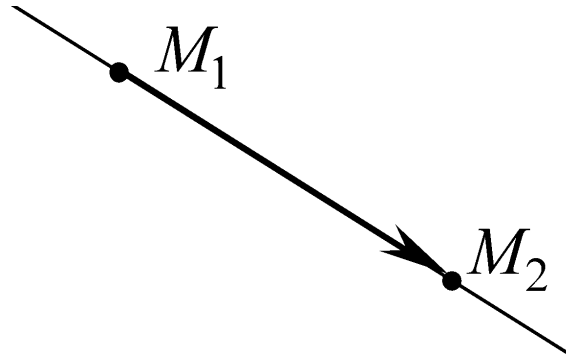
Пусть в задаче 1 вектор $\vec{\Delta}$ не параллелен ни одной из координатных осей (т.е. $m \neq 0$, $n \neq 0$ и $p \neq 0$).

Уравнения
$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad (3)$$

называют *каноническими уравнениями прямой в пространстве*.

Частным случаем канонических уравнений являются
УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДВЕ
ЗАДАННЫЕ ТОЧКИ.

Пусть прямая проходит через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.



Уравнения

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (4)$$

называют *уравнениями прямой, проходящей через две точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

2. Переход от общих уравнений прямой к каноническим

Пусть прямая ℓ задана общими уравнениями:

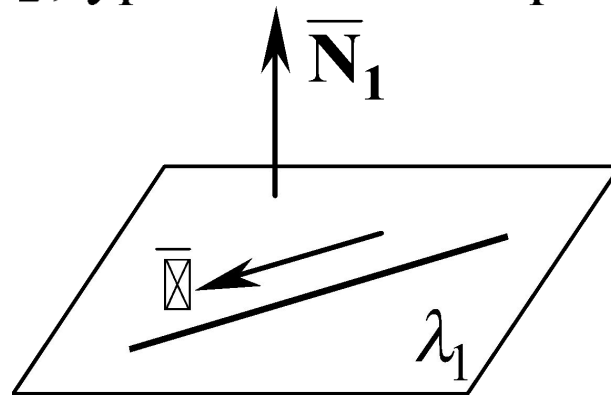
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Чтобы записать канонические (параметрические) уравнения этой прямой, необходимо найти ее направляющий вектор и координаты какой-нибудь точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ на прямой.

а) Координаты точки M_0 – это одно из решений системы (1).

б) Направляющий вектор $\vec{s} = [\vec{N}_1, \vec{N}_2]$

где $\vec{N}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ и $\vec{N}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$ – нормальные векторы к плоскостям λ_1 и λ_2 , уравнения которых входят в общие уравнения прямой.



3. Взаимное расположение прямых в пространстве

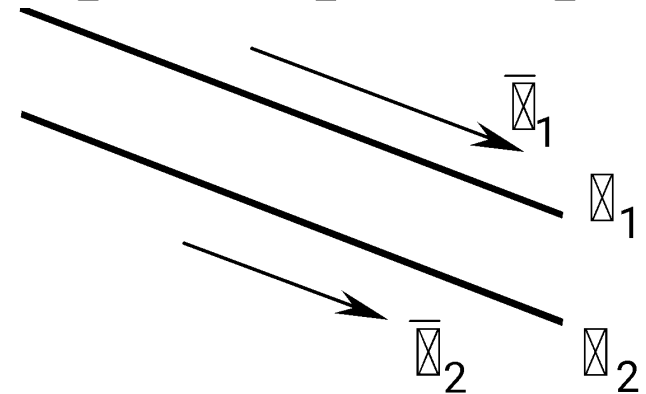
В пространстве две прямые могут:

а) быть параллельны, б) пересекаться, в) скрещиваться.

Пусть прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы каноническими уравнениями:

$$\boxtimes_1: \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \quad \boxtimes_2: \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

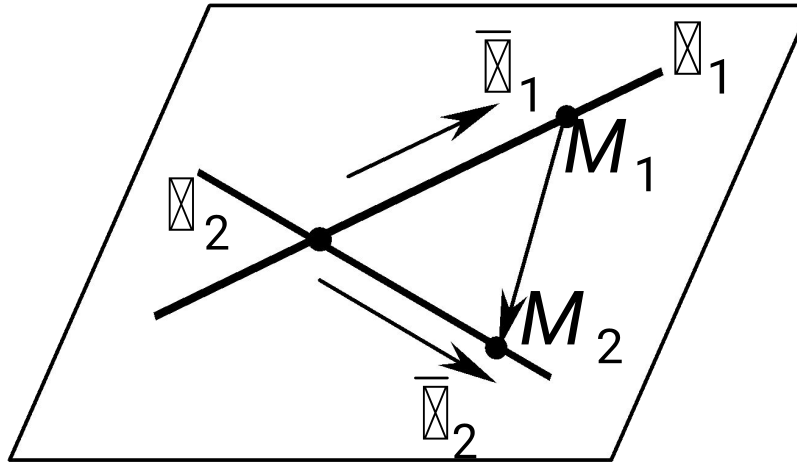
1) Пусть прямые ℓ_1 и ℓ_2 параллельны:



Получаем: *прямые параллельны* $\Leftrightarrow$ *их направляющие векторы* $\bar{\boxtimes}_1 = \{m_1; n_1; p_1\}$ *и* $\bar{\boxtimes}_2 = \{m_2; n_2; p_2\}$ *коллинеарные, т.е. выполняется условие:*

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}. \quad (6)$$

2) Пусть прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются:



Получили: прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются $\Leftrightarrow$ они не параллельны и для них выполняется условие

$$(\overline{\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2}, \bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2) = 0, \quad (7^*)$$

или, в координатной форме,

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

3) Если для прямых ℓ_1 и ℓ_2 не выполняется условие (6) и (7) ((7*)), то прямые скрещиваются.

4. Задачи, связанные с возможным взаимным расположением прямых

Возможное расположение прямых в пространстве приводит к следующим задачам:

- 1) параллельные прямые $\rightarrow$ расстояние между прямыми
(т.е. расстояние от точки до прямой)?
- 2) пересекающиеся прямые $\rightarrow$ а) угол между прямыми?
б) точка пересечения прямых?
- 3) скрещивающиеся прямые $\rightarrow$ а) угол между прямыми?
б) расстояние между прямыми?

Пусть даны две прямые:

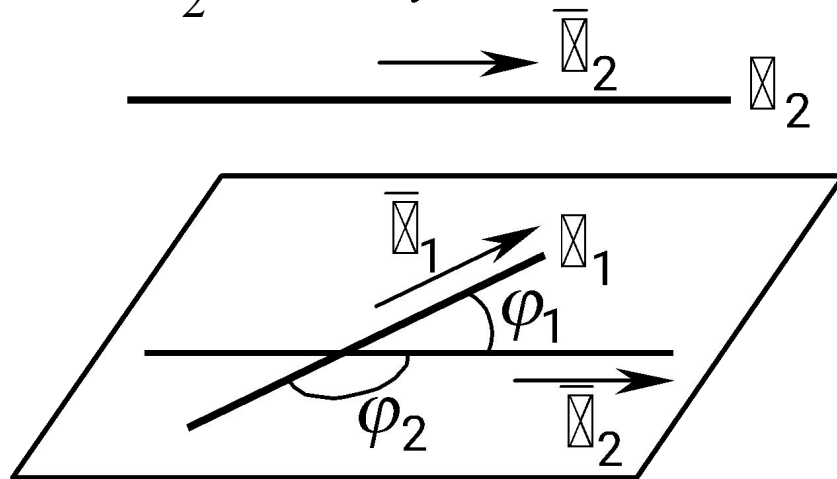
$$\boxtimes_1: \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \boxtimes_2: \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

$\bar{\boxtimes}_i = \{m_i; n_i; p_i\}$ – направляющий вектор прямой $\boxtimes_i$,

$$M_i(x_i, y_i, z_i) \in \boxtimes_i \quad (i = 1, 2).$$

ЗАДАЧА 2. Найти угол между пересекающимися (скрещивающимися) прямыми в пространстве.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Углом между двумя скрещивающимися прямыми ℓ_1 и ℓ_2 называется угол между прямой ℓ_1 и проекцией прямой ℓ_2 на любую плоскость, проходящую через прямую ℓ_1 .



Т.е., угол между скрещивающимися прямыми – это угол между двумя пересекающимися прямыми, параллельными данным.

Получаем:

$$\cos \varphi_{1,2} = \pm \frac{|(\bar{\ell}_1, \bar{\ell}_2)|}{|\bar{\ell}_1| \cdot |\bar{\ell}_2|} = \pm \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

где знак плюс берется для острого угла, а знак минус – для тупого.

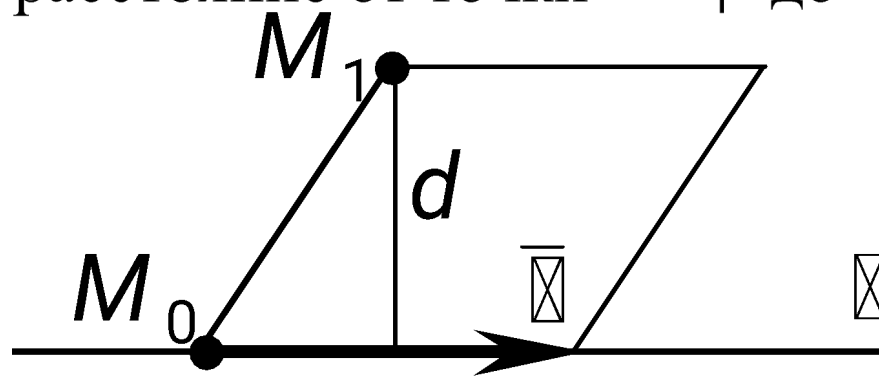
Пусть дана прямая $\ell: \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$ – точка, не принадлежащая этой прямой.

ЗАДАЧА 3. Найти расстояние от точки до прямой в пространстве.

Обозначим: $\vec{\ell} = \{m; n; p\}$ – направляющий вектор прямой ℓ ,

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка на прямой ℓ ,

d – расстояние от точки M_1 до ℓ .



Получаем:

$$d = \frac{|\vec{\ell}, \overrightarrow{M_0M_1}|}{|\vec{\ell}|}.$$

Пусть даны две скрещивающиеся прямые:

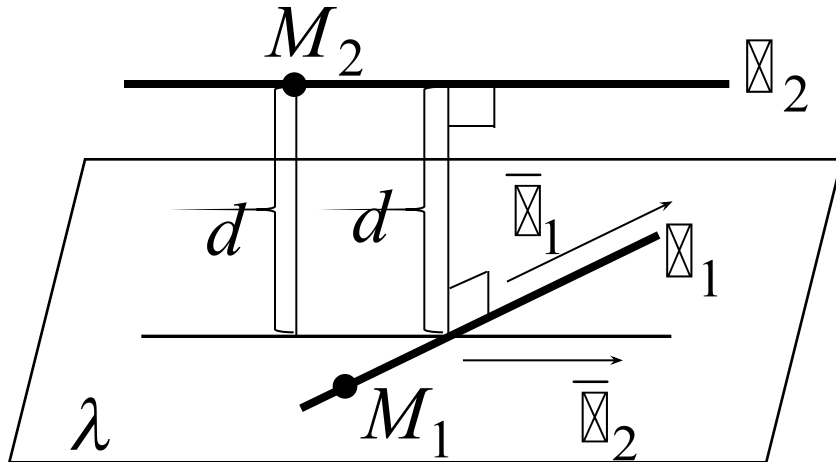
$$\boxtimes_1: \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \boxtimes_2: \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

$\bar{\boxtimes}_i = \{m_i; n_i; p_i\}$ – направляющий вектор $\boxtimes_i$,

$$M_i(x_i, y_i, z_i) \in \boxtimes_i$$

ЗАДАЧА 4. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра.*

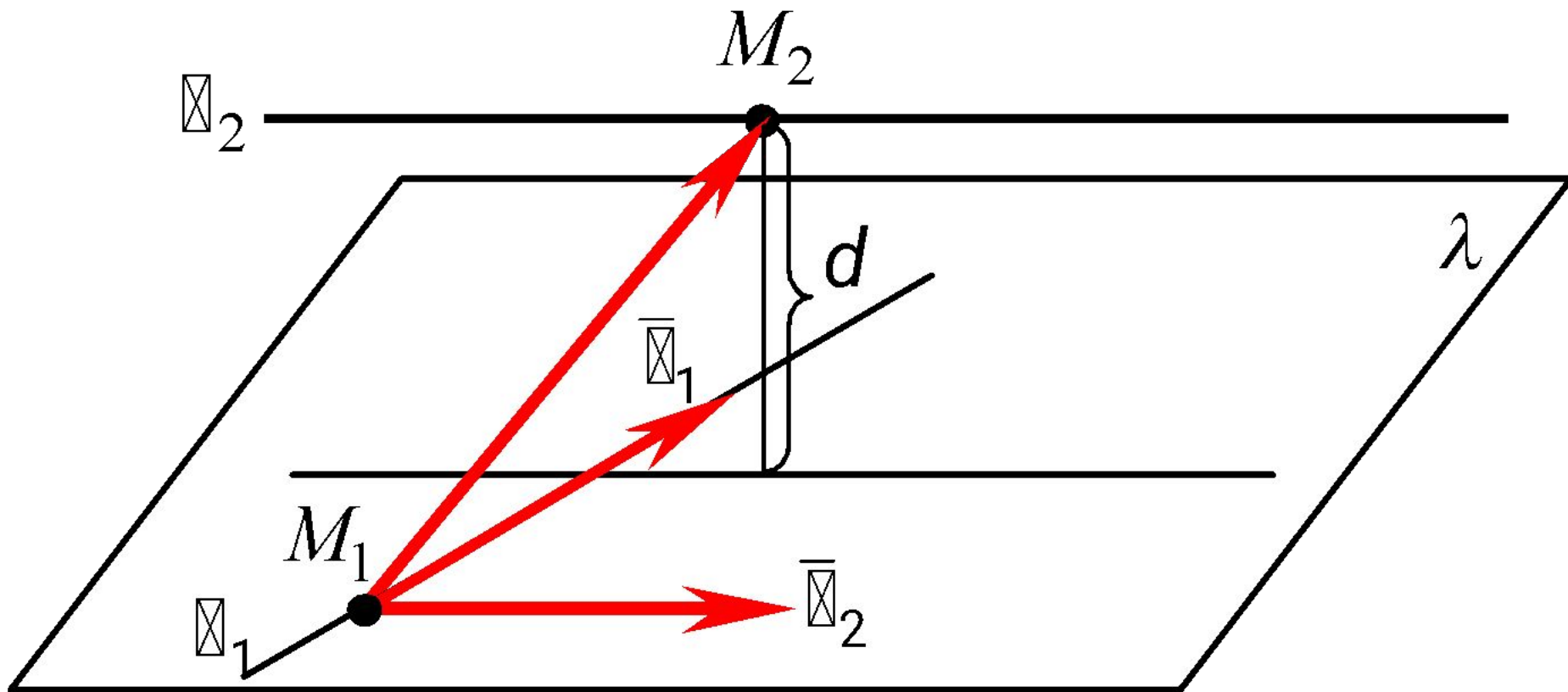


Получаем:

$$d = \frac{|Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

где $Ax + By + Cz + D = 0$ – общее уравнение плоскости λ ,

$M_2(x_2; y_2; z_2)$ – любая точка на прямой ℓ_2 .



Тогда d – высота пирамиды, опущенная из точки M_2 .
Следовательно:

$$d = \frac{3 \cdot V_{\text{пир}}}{S_{\text{осн}}} = \frac{3 \cdot \frac{1}{6} \cdot |(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \overline{M_1M_2})|}{\frac{1}{2} \cdot |[\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2]|} = \frac{|(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \overline{M_1M_2})|}{|[\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2]|}$$

Пусть даны две пересекающиеся прямые

$$\boxtimes_1: \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \boxtimes_2: \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

ЗАДАЧА 5. Найти точку пересечения прямых.

Пусть $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – точка пересечения прямых. Тогда $(x_0; y_0; z_0)$ – решение системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \\ \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x_1 + t \cdot m_1, \\ y = y_1 + t \cdot n_1, \\ z = z_1 + t \cdot p_1, \\ x = x_2 + \tau \cdot m_2, \\ y = y_2 + \tau \cdot n_2, \\ z = z_2 + \tau \cdot p_2. \end{cases}$$

5. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Пусть в пространстве заданы плоскость λ и прямая ℓ . Они могут

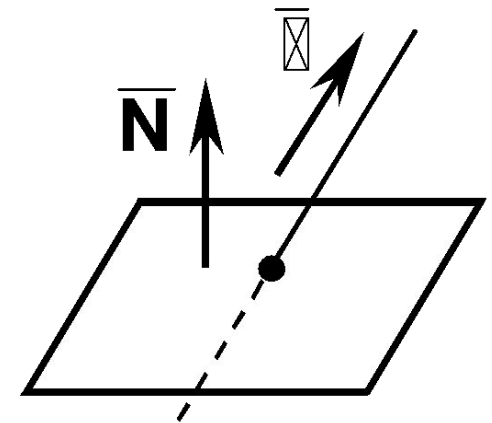
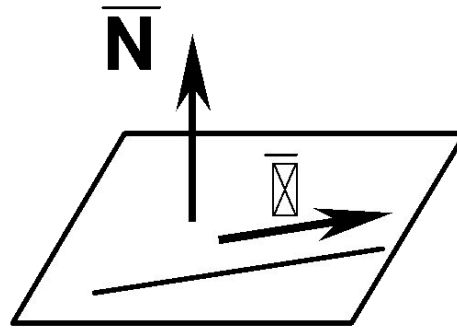
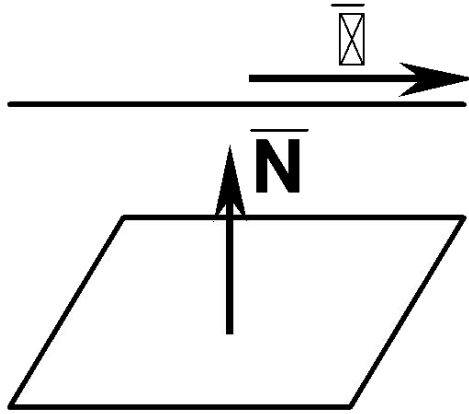
- 1) быть параллельны;

- 2) прямая может лежать в плоскости;

- 3) прямая и плоскость могут пересекаться в одной точке.

Пусть $\lambda: Ax + By + Cz + D = 0$ и $\ell: \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$.

Тогда $\vec{N} = \{A; B; C\}$ – нормальный вектор плоскости,
 $\vec{s} = \{m; n; p\}$ – направляющий вектор прямой.



а) Если прямая параллельна плоскости или прямая принадлежит плоскости, то

$$(\bar{\mathbf{N}}, \bar{\square}) = 0 \quad (10)$$

или в координатной форме

$$Am + Bn + Cp = 0. \quad (11)$$

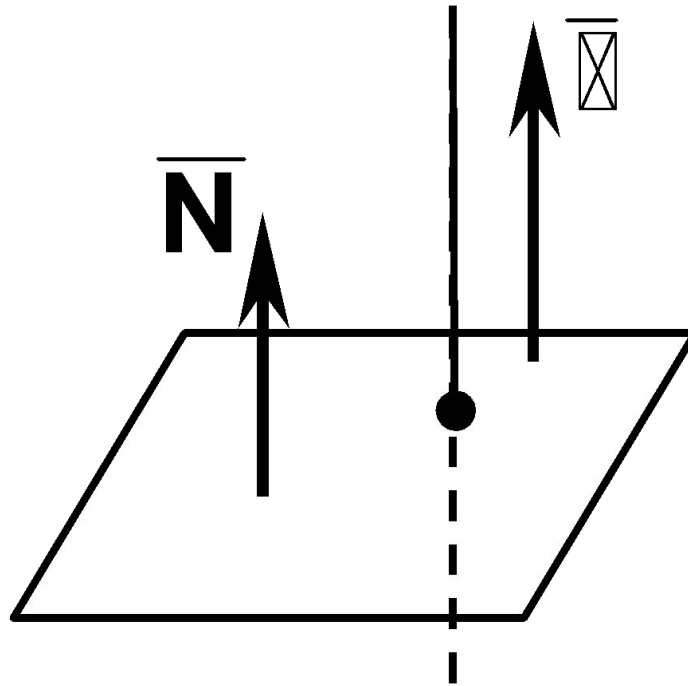
Если условие (10) (условие (11)) не выполняется, то прямая и плоскость пересекаются в одной точке.

б) Если прямая принадлежит плоскости, то координаты любой ее точки удовлетворяют уравнению плоскости, и, следовательно, кроме условия (10) ((11)) выполняется условие

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0,$$

где $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – любая точка прямой.

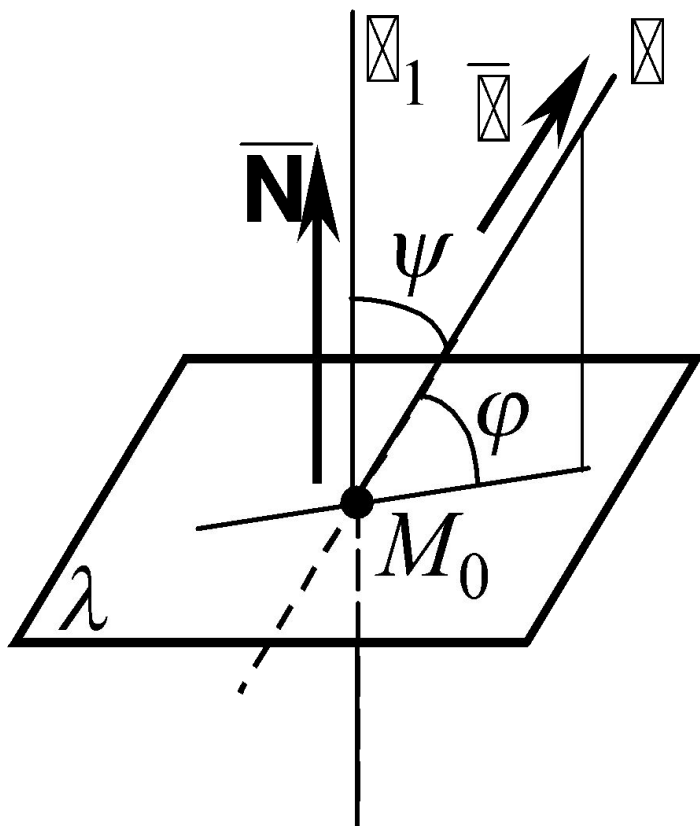
Частным случаем пересечения прямой и плоскости в одной точке является перпендикулярность прямой и плоскости



В этом случае $\overline{N} \parallel \boxed{}$ т.е. $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Углом между прямой ℓ и плоскостью λ называется угол φ между прямой ℓ и ее проекцией на плоскость λ .

Из определения следует, что угол между прямой и плоскостью всегда острый.



Следовательно,

$$\sin \varphi = \cos \psi = \frac{|(\bar{\mathbf{N}}, \bar{\ell})|}{|\bar{\mathbf{N}}| \cdot |\bar{\ell}|}$$