Степенная функция

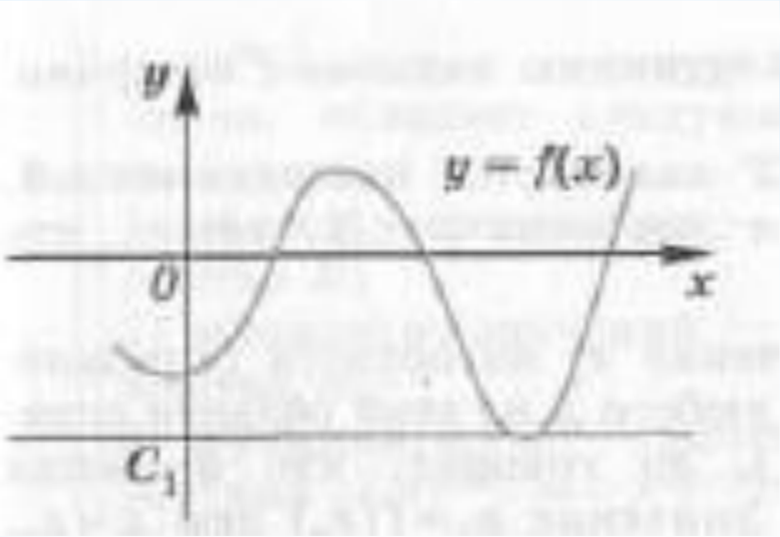
§ 1. Степенная функция, ее свойства и график

$y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = 1/x$ -
все эти функции являются частными случаями степенной функции $y = x^p$, где p – заданное действительное число.

Определение 1.

*Функция $y = f(x)$ определенная на множестве X, называется **ограниченной снизу на множестве X**, если существует число C_1, такое, что для любого x, принадлежащего множеству X, выполняется неравенство $f(x) \geq C_1$.*

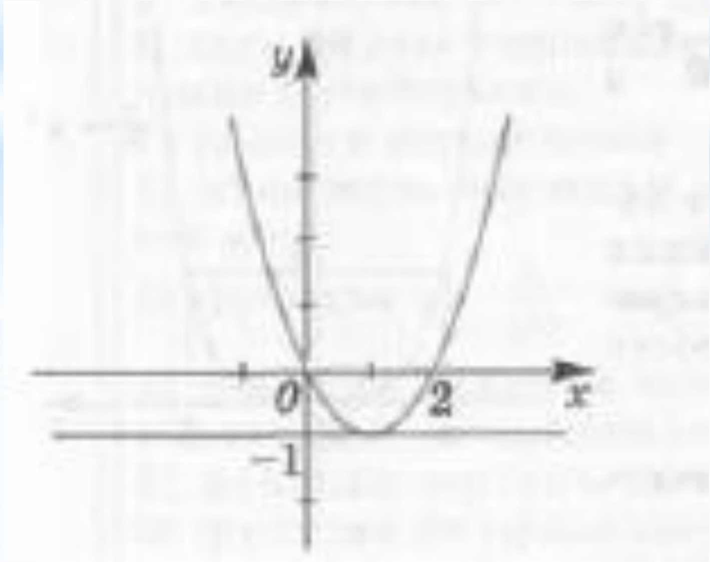
Это означает, что все точки графика, ограниченной снизу функции $y = f(x)$ для любого x, принадлежащего множеству X, расположены выше прямой $y = C_1$ или на прямой.



Например:

Функция $y = x^2 - 2x$ является ограниченной снизу, так как

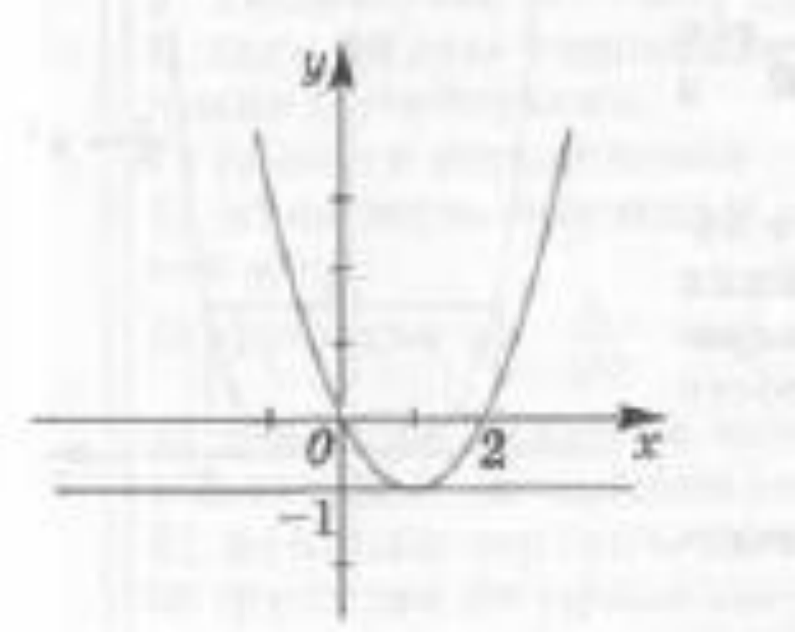
$$x^2 - 2x = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x - 1)^2 - 1 \geq -1$$



Если существует такое x_o *из области определения* X *функции* $y = f(x)$, *что для любого* x *из этой области справедливо неравенство* $f(x) \geq f(x_o)$, *то говорят, что функция* $y = f(x)$ *принимает* ***наименьшее*** *значение* $y_o = f(x_o)$ *при* $x = x_o$.

Например:

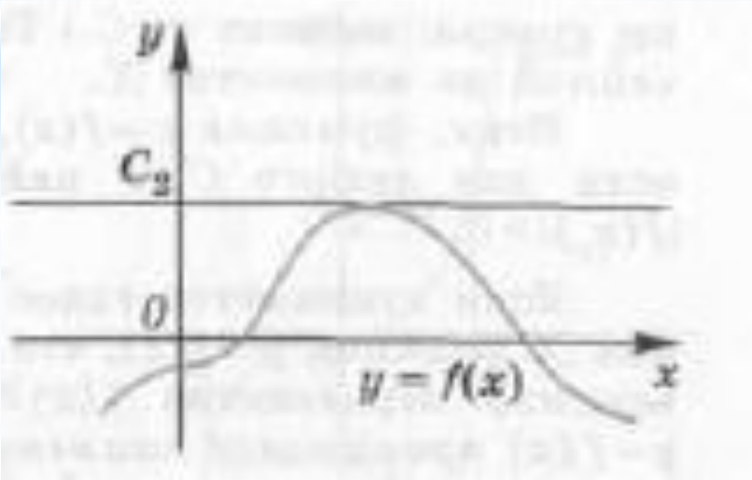
Функция $y = x^2 - 2x$ *принимает при* $x = 1$ *наименьшее значение , равное* -1.



Определение 2.

*Функция $y = f(x)$ определенная на множестве X, называется **ограниченной сверху на множестве X**, если существует число C_2, такое, что для любого x, принадлежащего множеству X, выполняется неравенство $f(x) \le C_2$.*

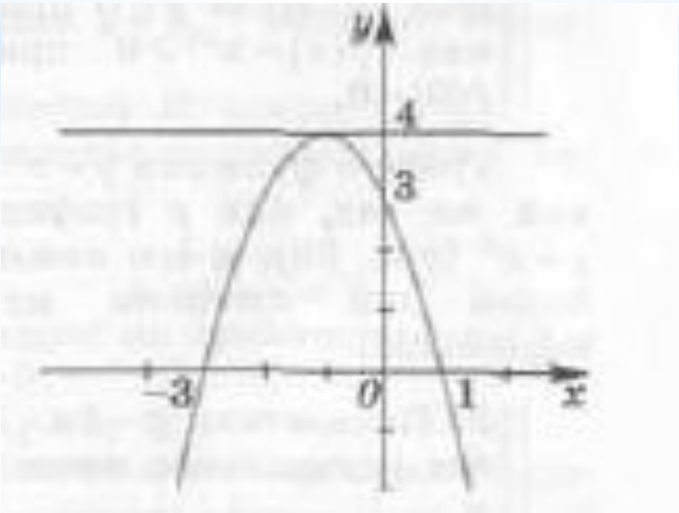
Это означает, что все точки графика, ограниченной сверху функции $y = f(x)$ для любого x, принадлежащего множеству X, расположены ниже прямой $y = C_2$ или на прямой.



Например:

Функция $y = -x^2 - 2x + 3$ *является ограниченной сверху, так как*

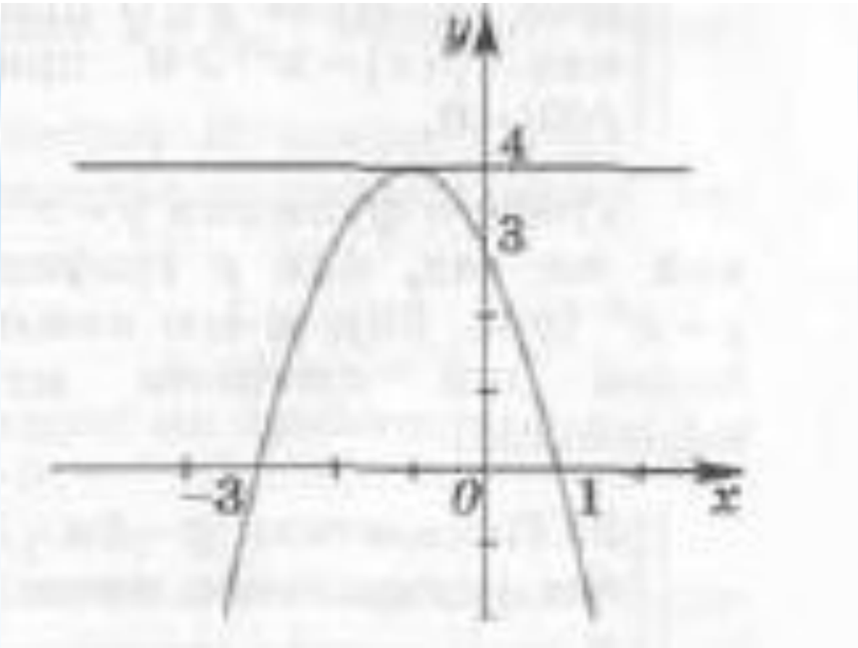
$$-x^2 - 2x + 3 = -(x^2 + 2x + 1 - 1 - 3) =$$
$$= -(x+1)^2 + 4 = 4 - (x+1)^2 \le 4$$



Если существует такое x_o из области определения X функции $y = f(x)$, что для любого x из этой области справедливо неравенство $f(x) \le f(x_o)$, то говорят, что функция $y = f(x)$ принимает ***наибольшее*** *значение $y_o = f(x_o)$ при $x = x_o$.*

Например:

Функция $y = -x^2 - 2x + 3$ принимает при $x = -1$ наибольшее значение, равное 4.

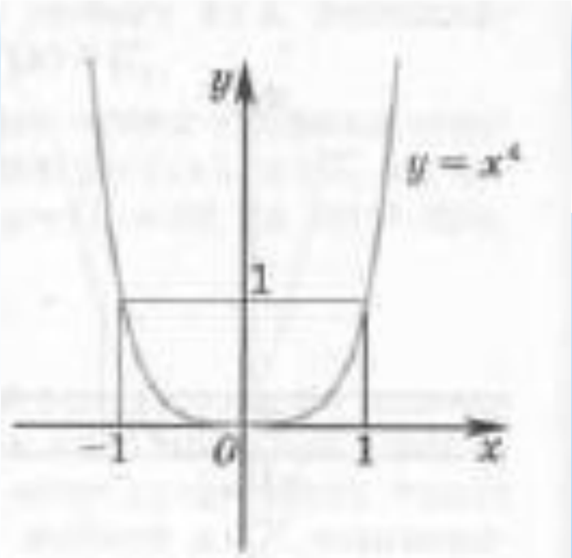


Свойства
степенной функции $y = x^p$
в зависимости
от показателя p.

1 случай. *p = 2n* – *четное натуральное число*

1) *Область определения функции – все действительные числа, т.е. множество R.*
2) *Область значений функции – все неотрицательные числа, т.е.* $y \geq 0$.
3) *Функция* $y = x^{2n}$ *четная, так как* $(-x)^{2n} = x^{2n}$.
4) *Функция является убывающей на промежутке* $x \leq 0$ *и возрастающей на промежутке* $x \geq 0$.
5) *Функция ограничена снизу, так как* $x^{2n} \geq 0$ *для любого* x *из R.*
6) *Функция принимает наименьшее значение* $y = 0$ *при* $x = 0$, *так как* $x^{2n} \geq 0$ *для любого* x *из R и* $f(0) = 0$.

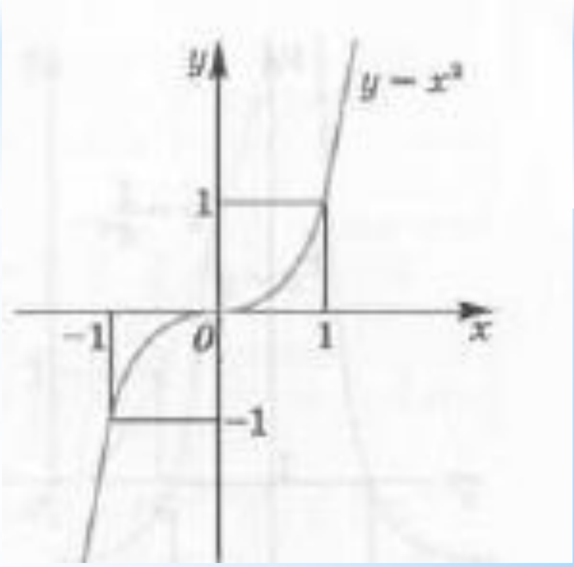
График функции $y = x^{2n}$ *имеет такой же вид, что и график функции* $y = x^4$, *и его называют* ***параболой n-ой степени*** *или просто* ***параболой***.



2 случай. $p = 2n-1$ – нечетное натуральное число

1) *Область определения функции – все действительные числа, т.е. множество R.*
2) *Область значений функции – все действительные числа, т.е. множество R.*
3) *Функция $y = x^{2n-1}$ нечетная, так как $(-x)^{2n-1} = -x^{2n-1}$.*
4) *Функция является возрастающей на всей действительной оси.*
5) *Функция не является ограниченной ни сверху, ни снизу.*
6) *Функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения.*

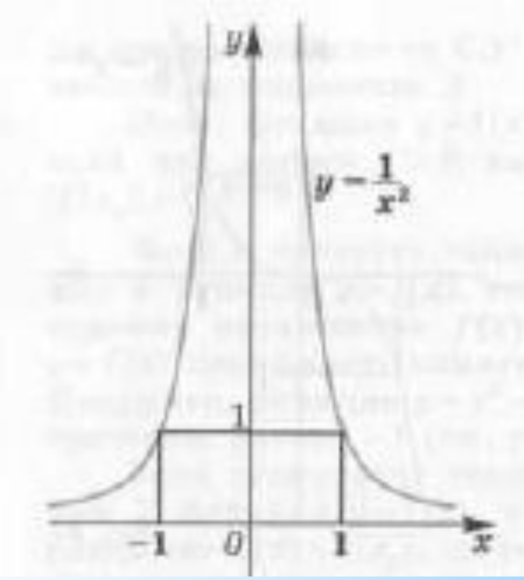
График функции $y = x^{2n-1}$ *имеет такой же вид, что и график функции* $y = x^3$, *и его называют* ***кубической параболой***.



3 случай. ***$p = -2n$***, *где n – натуральное число*

1) *Область определения функции – множество R, кроме $x = 0$.*
2) *Область значений функции – множество положительных чисел $y > 0$.*
3) *Функция $y = 1/x^{2n}$ четная, так как $1/(-x)^{2n} = 1/x^{2n}$.*
4) *Функция является убывающей на промежутке $x > 0$ и возрастающей на промежутке $x < 0$.*
5) *Функция ограничена снизу, так как $y > 0$.*
6) *Функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения.*

График функции $\boldsymbol{y = 1/x^{2n}}$ *имеет такой же вид, что и график функции* $\boldsymbol{y = 1/x^2}$.



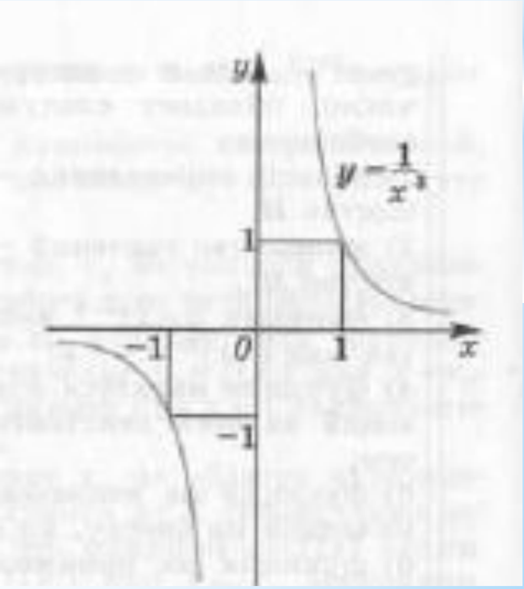
Прямую $y = 0$ (ось абсцисс) называют ***горизонтальной асимптотой*** *графика функции $y = x^{-2n}$, а $x = 0$ (ось ординат) называют* ***вертикальной асимптотой*** *графика функции*

4 случай. $p = -(2n - 1)$, где n – натуральное число

1) Область определения функции – множество R, кроме $x = 0$.
2) Область значений функции – множество R, кроме $y = 0$.
3) Функция $y = 1/x^{2n-1}$ нечетная, так как $1/(-x)^{2n-1} = -1/x^{2n-1}$.
4) Функция является убывающей на промежутках $x < 0$ и $x > 0$.
5) Функция не является ограниченной.
6) Функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения.

График функции $y = 1/x^{2n-1}$ имеет такой же вид, что и график функции $y = 1/x^3$.

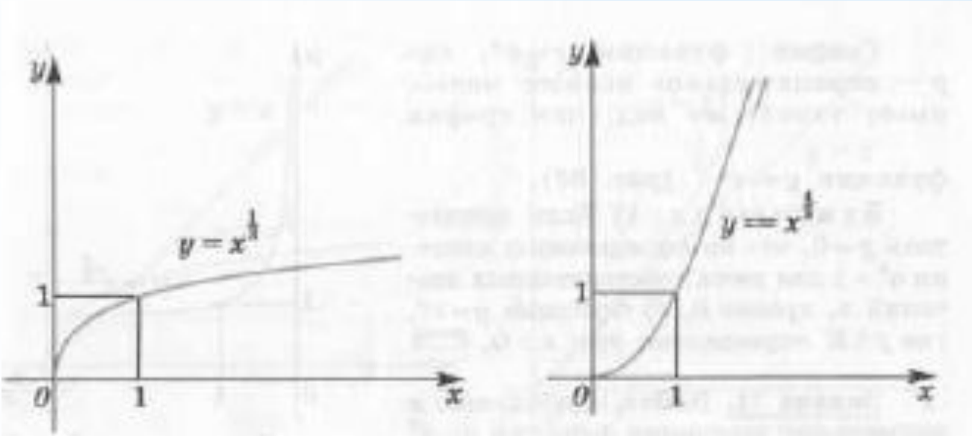
Прямую $y = 0$ (ось абсцисс) называют **горизонтальной асимптотой** графика функции $y = x^{-(2n-1)}$, а $x = 0$ (ось ординат) называют **вертикальной асимптотой** графика функции.



5 случай. *p* - *положительное действительное нецелое число*

1) *Область определения функции – множество неотрицательных чисел $x \geq 0$.*
2) *Область значений функции – множество неотрицательных чисел $y \geq 0$.*
3) *Функция не является ни четной, ни нечетной.*
4) *Функция является возрастающей на промежутке $x \geq 0$.*
5) *Функция ограничена снизу, так как $y \geq 0$.*
6) *Функция принимает наименьшее значение $y = 0$ при $x = 0$.*

График функции $y = x^{p}$ *имеет такой же вид, как, например, график функции* $y = x^{1/3}$ *(при $0<p<1$), или такой же вид, как, например, график функции* $y = x^{4/3}$ *(при $p>1$).*



6 случай. *p* - *отрицательное действительное нецелое число*

1) *Область определения функции – множество положительных чисел* $x > 0$.
2) *Область значений функции – множество положительных чисел* $y > 0$.
3) *Функция не является ни четной, ни нечетной.*
4) *Функция является убывающей на промежутке* $x > 0$.
5) *Функция ограничена снизу, так как* $y > 0$.
6) *Функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения.*

График функции $\boldsymbol{y = x^{p}}$
имеет такой же вид,
как график функции $\boldsymbol{y = x^{-1/3}}$.