Использование свойств функций при решении уравнений и неравенств

Авторы: Яхновец Владислав Андреевич
Калугин Александр Андреевич

Цель работы:

- Собрать сведения из истории математики о решении уравнений.
- Рассмотреть и применить на практике методы решения уравнений и неравенств, основанные на использовании свойств функции.
- Рассмотреть и применить на практике дополнительные нестандартные методы решения уравнений и неравенств.

Использование монотонности функции

Решите неравенство

Решение. Каждая из функций $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 4^x$ непрерывная и строго возрастающая на всей оси. Значит, такой же является и исходная функция . Легко видеть, что при $x = 0$ функция принимает значение 3. В силу непрерывности и строгой монотонности этой функции при $x > 0$ имеем , при $x < 0$ имеем . Следовательно, решениями данного неравенства являются все $x < 0$.

- Ответ: (-∞; 0).

Использование монотонности функции

Решите уравнение

$$\sqrt[4]{18-x}-\sqrt[8]{x-2}=2$$

Решение. Область допустимых значений уравнения есть промежуток $2 \le x \le 18$. На ОДЗ функции $f(x)=-\sqrt[8]{x-2}$ и $g(x)=\sqrt[4]{18-x}$ непрерывны и строго убывают, следовательно, непрерывна и убывает функция $h(x)=\sqrt[4]{18-x}-\sqrt[8]{x-2}$. Поэтому каждое свое значение функция $h(x)$ принимает только в одной точке. Так как $h(2)=2$, то $x = 2$ является единственным корнем исходного уравнения.

- Ответ: {2}.

Использование ограниченности функции

Решите уравнение

$$sin(x^3 + 2x^2 + 1) = x^2 + 2x + 2.$$

Решение. Для любого действительного числа x имеем $sin(x^3+2x^2+1)\leq 1$, $x^2+2x+2=(x+1)^2+1\geq 1$. Поскольку для любого значения x левая часть уравнения не превосходит единицы, а правая часть всегда не меньше единицы, то данное уравнение может иметь решение только при $x=-1$.

При $x=-1$ $x^2+2x+2=1$, $sin(-1+2\cdot 1+1)=sin2\neq 1$, т.е. при $x=-1$ исходное уравнение так же корней не имеет .

- Ответ: Ø.

Использование периодичности функции

Функция $f(x)$ периодическая с периодом $T=5$. Известно, что $f(1)=4$; $f(-2)=1$.

Найдите $f(11)-3f(-7)+f(3)$.

Решение. Преобразуем отдельно каждое слагаемое:

$$f(11)=f(1+2\cdot 5)=f(1)=4$$

$$f(-7)=f(-2-5)=f(-2)=1$$

$$f(3)=f(2+5)=f(-2)=1$$

Тогда $f(11)-3f(-7)+f(3)=4-3\cdot 1+1=2$.

- Ответ: 2.

Использование ОДЗ функции

Решите неравенство

$$\log_5 x < \sqrt{1 - x^4}$$

<u>Решение</u>. ОДЗ неравенства есть все x, удовлетворяющие условию $0<x\le 1$. Ясно, что $x = 1$ не является решением неравенства. Для x из промежутка $0<x<1$ имеем $\log_5 x<0$, а $\sqrt{1-x^4} > 0$. Следовательно, все x из промежутка $0<x<1$ являются решениями неравенства.

- Ответ: (0; 1).

Умножение уравнения на функцию

Решите уравнение

$$x^8-x^6+x^4-x^2+1=0$$

Решение. Умножив обе части уравнения на многочлен x^2+1, не имеющий корней, получим уравнение

$$(x^2+1)(x^8-x^6+x^4-x^2+1)=0$$

равносильное исходному уравнению. Уравнение можно записать в виде

$$x^{10}+1=0.$$

Ясно, что это уравнение не имеет действительных корней, поэтому и исходное уравнение их не имеет.

- Ответ: Ø.

Угадывание корня

Решите уравнение

$$x^3+3x-36=12^3.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде:

$$x^3+3x-36-12^3=0.$$

Из внешнего вида этого уравнения очевидно, что $x=12$ есть его корень. Для нахождения остальных корней преобразуем многочлен

$$x^3+3x-(12^3+3\cdot 12)=(x^3-12^3)+3(x-12)(x-12)(x^2+12x+12^2+3)=$$

$$=(x-12)(x^2+12x+147).$$

Так как многочлен $x^2+12x+147$ не имеет корней, то исходное уравнение имеет единственный корень $x=12$.

- Ответ: {12}.

Выводы:

- Приведены сведения о давности постановки перед человеком задачи решения уравнений и неравенств.
- Приведены и рассмотрены на примере методы решения уравнений и неравенств, основанные на использовании свойств функции.
- Рассмотрены и опробованы дополнительные нестандартные методы решения уравнений и неравенств.

Продолжение исследования может заключаться в изучении применения свойств синуса и косинуса, применении производной, использовании числовых неравенств, использовании графиков и других нестандартных способов решения уравнений и неравенств.