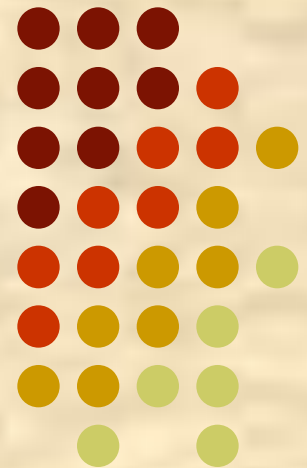


# Использование свойств функций при решении уравнений и неравенств



Авторы: Яхновец Владислав Андреевич  
Калугин Александр Андреевич



# Цель работы:



- ⇒ Собрать сведения из истории математики о решении уравнений.
- ⇒ Рассмотреть и применить на практике методы решения уравнений и неравенств, основанные на использовании свойств функции.
- ⇒ Рассмотреть и применить на практике дополнительные нестандартные методы решения уравнений и неравенств.

# Использование монотонности функции



Решите неравенство



Решение. Каждая из функций  $y = 2^x$ ,  $y = 3^x$ ,  $y = 4^x$  непрерывная и строго возрастающая на всей оси. Значит, такой же является и исходная функция. Легко видеть, что при  $x = 0$  функция принимает значение 3. В силу непрерывности и строгой монотонности этой функции при  $x > 0$  имеем , при  $x < 0$  имеем . Следовательно, решениями данного неравенства являются все  $x < 0$ .

- Ответ:  $(-\infty; 0)$ .

# Использование монотонности функции



Решите уравнение

$$\sqrt[4]{18-x} - \sqrt[8]{x-2} = 2$$

Решение. Область допустимых значений уравнения есть промежуток  $2 \leq x \leq 18$ . На ОДЗ функции  $f(x) = -\sqrt[8]{x-2}$  и  $g(x) = \sqrt[4]{18-x}$  непрерывны и строго убывают, следовательно, непрерывна и убывает функция  $h(x) = \sqrt[4]{18-x} - \sqrt[8]{x-2}$ . Поэтому каждое свое значение функция  $h(x)$  принимает только в одной точке. Так как  $h(2) = 2$ , то  $x = 2$  является единственным корнем исходного уравнения.

- Ответ: {2}.

# Использование ограниченности функции



Решите уравнение

$$\sin(x^3 + 2x^2 + 1) = x^2 + 2x + 2.$$

Решение. Для любого действительного числа  $x$  имеем

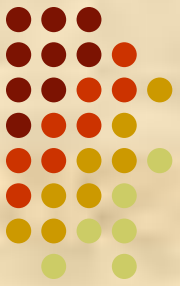
$\sin(x^3 + 2x^2 + 1) \leq 1$ ,  $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 \geq 1$ . Поскольку для любого значения  $x$  левая часть уравнения не превосходит единицы, а правая часть всегда не меньше единицы, то данное уравнение может иметь решение только при  $x = -1$ .

При  $x = -1$   $x^2 + 2x + 2 = 1$ ,  $\sin(-1 + 2 \cdot 1 + 1) = \sin 2 \neq 1$ , т.е. при  $x = -1$  исходное уравнение так же корней не имеет.

- Ответ:  $\emptyset$ .



# Использование периодичности функции



Функция  $f(x)$  периодическая с периодом  $T=5$ . Известно, что  $f(1)=4$ ;  
 $f(-2)=1$ .

Найдите  $f(11)-3f(-7)+f(3)$ .

Решение. Преобразуем отдельно каждое слагаемое:

$$f(11)=f(1+2\cdot 5)=f(1)=4$$

$$f(-7)=f(-2-5)=f(-2)=1$$

$$f(3)=f(2+5)=f(-2)=1$$

Тогда  $f(11)-3f(-7)+f(3)=4-3\cdot 1+1=2$ .

- Ответ: 2.

# Использование ОДЗ функции



Решите неравенство

$$\log_5 x < \sqrt{1 - x^4}$$

Решение. ОДЗ неравенства есть все  $x$ , удовлетворяющие условию  $0 < x \leq 1$ . Ясно, что  $x = 1$  не является решением неравенства. Для  $x$  из промежутка  $0 < x < 1$  имеем  $\log_5 x < 0$ , а  $\sqrt{1 - x^4} > 0$ . Следовательно, все  $x$  из промежутка  $0 < x < 1$  являются решениями неравенства.

- Ответ:  $(0; 1)$ .

# Умножение уравнения на функцию



Решите уравнение

$$x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1 = 0$$

Решение. Умножив обе части уравнения на многочлен  $x^2 + 1$ , не имеющий корней, получим уравнение

$$(x^2 + 1)(x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1) = 0$$

равносильное исходному уравнению. Уравнение можно записать в виде

$$x^{10} + 1 = 0.$$

Ясно, что это уравнение не имеет действительных корней, поэтому и исходное уравнение их не имеет.

- Ответ:  $\emptyset$ .



# Угадывание корня



Решите уравнение

$$x^3 + 3x - 36 = 12^3.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде:

$$x^3 + 3x - 36 - 12^3 = 0.$$

Из внешнего вида этого уравнения очевидно, что  $x=12$  есть его корень. Для нахождения остальных корней преобразуем многочлен

$$\begin{aligned} x^3 + 3x - (12^3 + 3 \cdot 12) &= (x^3 - 12^3) + 3(x-12)(x-12)(x^2 + 12x + 12^2 + 3) = \\ &= (x-12)(x^2 + 12x + 147). \end{aligned}$$

Так как многочлен  $x^2 + 12x + 147$  не имеет корней, то исходное уравнение имеет единственный корень  $x=12$ .

- Ответ: {12}.

# Выводы:



- ⇒ Приведены сведения о давности постановки перед человеком задачи решения уравнений и неравенств.
- ⇒ Приведены и рассмотрены на примере методы решения уравнений и неравенств, основанные на использовании свойств функции.
- ⇒ Рассмотрены и опробованы дополнительные нестандартные методы решения уравнений и неравенств.  
Продолжение исследования может заключаться в изучении применения свойств синуса и косинуса, применении производной, использовании числовых неравенств, использовании графиков и других нестандартных способов решения уравнений и неравенств.