# *Лекция 11. Прямая и плоскость в пространстве*

1. Основные формулы.
2. Уравнения плоскости.
3. Плоскость. Основные задачи.
4. Уравнения прямой.
5. Прямая. Основные задачи.
6. Прямая и плоскость. Основные задачи

# п.1. Основные формулы.

1) Расстояние между двумя точками в пространстве.

$$M_1(x_1, y_1, z_1), \qquad M_2(x_2, y_2, z_2).$$

$$M_1M_2 = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2}.$$

## 2) Деление отрезка в данном отношении.

$$M_1(x_1, y_1, z_1), \qquad M_2(x_2, y_2, z_2).$$

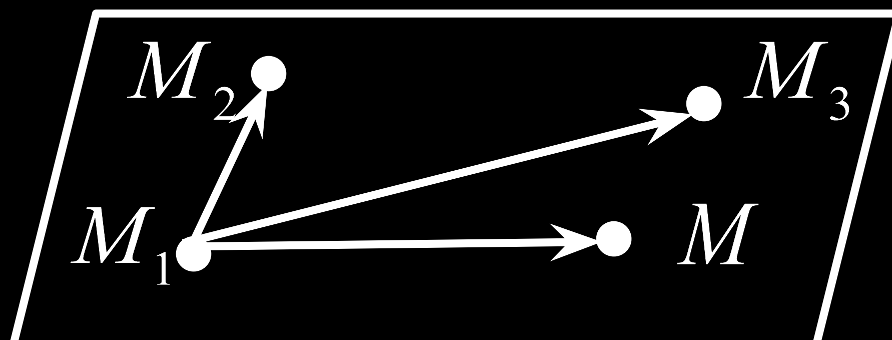
$$\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}.$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \qquad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

# п.2. Уравнения плоскости.

Составим уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

$$M_1(x_1, y_1, z_1), \quad M_2(x_2, y_2, z_2), \quad M_3(x_3, y_3, z_3).$$




Точка $M(x,y,z)$ принадлежит плоскости тогда и только тогда, когда векторы

$$\overrightarrow{M_1M}, \ \overrightarrow{M_1M_2}, \ \overrightarrow{M_1M_3}$$

являются компланарными.

По свойству смешенного произведения

$$\overrightarrow{M_1M}\,\overrightarrow{M_1M_2}\,\overrightarrow{M_1M_3} = 0.$$

Найдем

$$\overrightarrow{M_1M} =$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} =$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} =$$

Тогда

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим определитель по первой строке

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0,$$

где

$A=$ $B=$ ,

$C=$

Раскроем скобки

$$Ax + By + Cz - Ax_1 - By_1 - Cz_1 = 0,$$

обозначим

$$D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1,$$

получим

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

— общее уравнение плоскости.

Вектор, перпендикулярный плоскости, называется нормальным вектором этой плоскости.

Если плоскость задана уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

то вектор

$$\vec{n} = (A, B, C)$$

является нормальным вектором этой плоскости.

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

— уравнение плоскости, проходящей через данную точку и перпендикулярную данному вектору.

Уравнение

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

называется уравнением плоскости, проходящей через три данные точки.

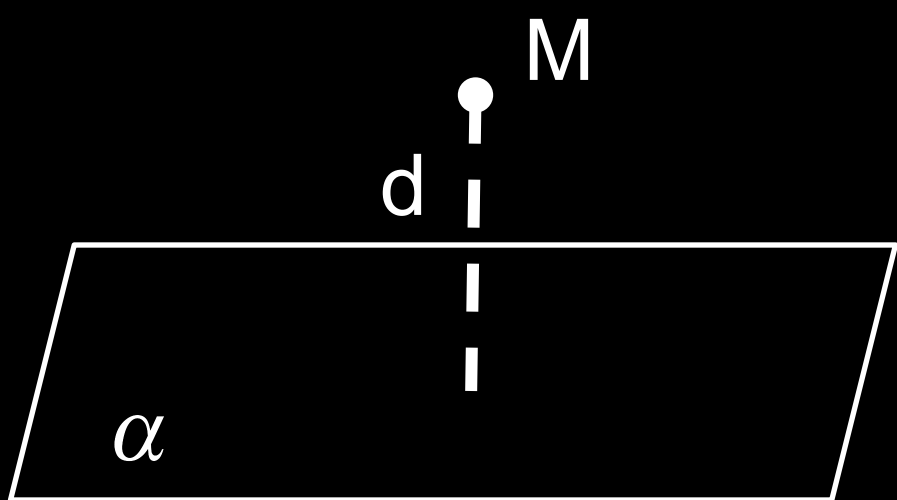
Уравнение

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

называется уравнением плоскости, «в отрезках» (отсекает от координатных осей отрезки длиной $|a|$, $|b|$, $|c|$).

# п.3. Плоскость. Основные задачи.

1) Расстояние от точки до плоскости.

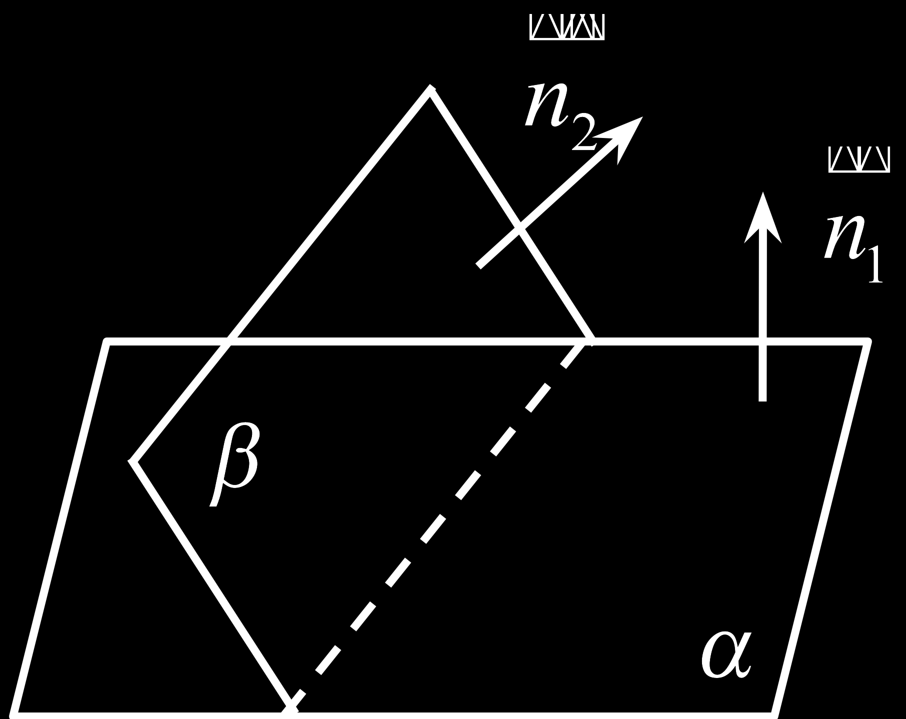



$$M(x_0, y_0, z_0),$$

$$\alpha: \ Ax + By + Cz + D = 0,$$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

## 2) Угол между плоскостями.




Угол между плоскостями равен углу между нормальными векторами этих плоскостей.

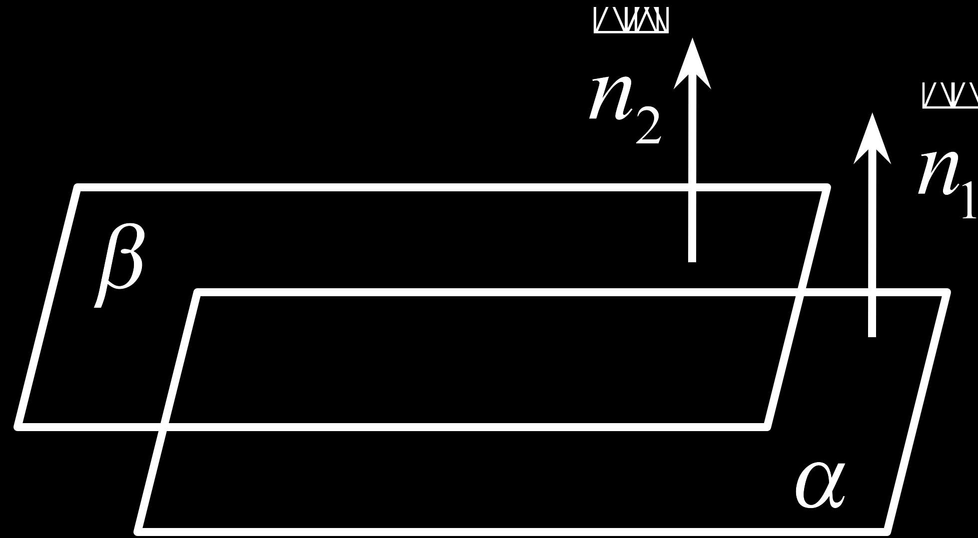
$$\alpha:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \qquad \vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1),$$

$$\beta:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \qquad \vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2).$$

$$\cos\varphi =$$

Если $\alpha \parallel \beta$, то

$$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2,$$

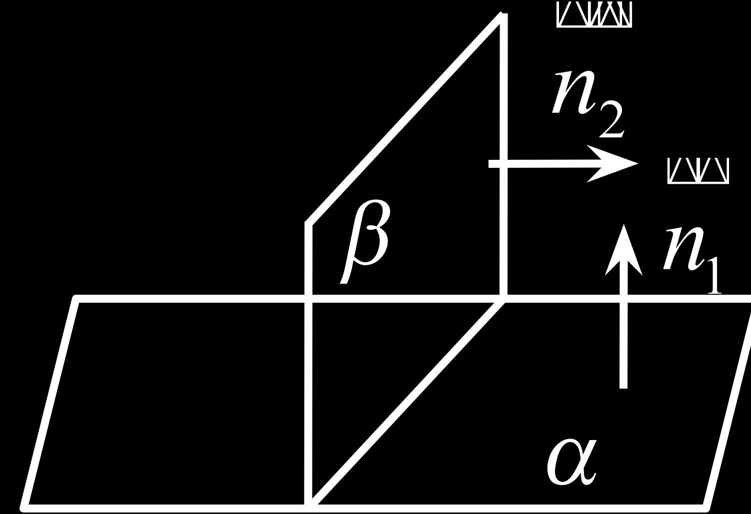



т.е.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

— условие параллельности плоскостей.

Если $\alpha \perp \beta$, то




$$\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2,$$

т.е.

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$$

— условие перпендикулярности плоскостей.

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M(3,2,-1) и параллельной плоскости

$$x-2y+2z-4=0.$$

Решение.

Нормальный вектор плоскости $x-2y+2z-4=0,$

$$\vec{n}=(1,-2,2),$$

является нормальным вектором искомой плоскости.

Тогда требуемое уравнение имеет вид

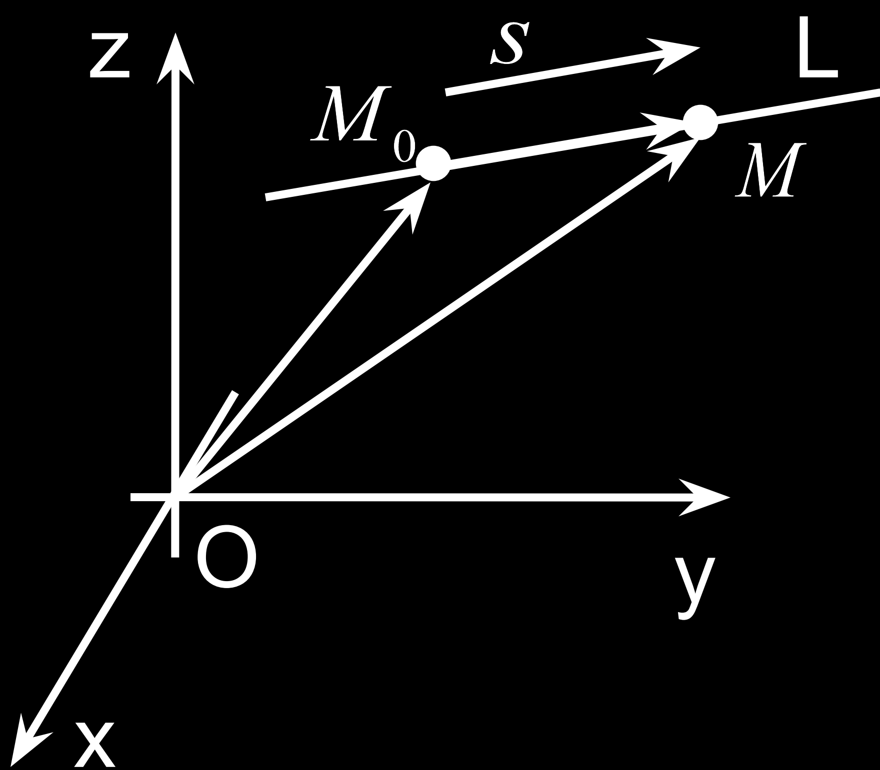
$$1(x-3)-2(y-2)+2(z+1)=0$$

или

$$x-2y+2z+3=0.$$

# п.4. Уравнения прямой.

## 1) Векторное уравнение прямой.




Дано:

$M_0(x_0, y_0, z_0)$,

$\vec{s}(m, n, p)$

— направляющий вектор прямой.

Составить уравнение прямой L.

Пусть $M(x, y, z) \in L.$

Тогда $\overrightarrow{OM} =$

Обозначим $\overrightarrow{OM} = \vec{r}, \quad \overrightarrow{OM_0} = \vec{r}_0.$

Так как $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s},$

то $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}.$

Тогда

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s}.$$

2) Параметрические уравнения прямой.

Рассмотрим векторное уравнение

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s}.$$

Заметим, что

$$\vec{r} = \qquad \vec{r}_0 = \qquad \vec{s} =$$

Тогда

3) Канонические уравнения прямой.

Рассмотрим параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

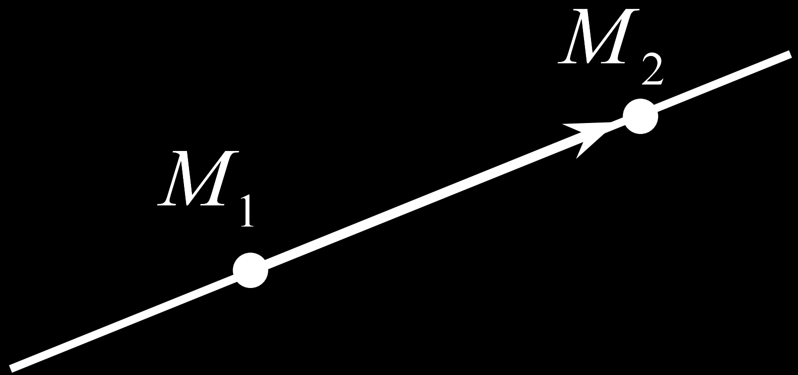
Выразим параметр t из каждого уравнения

$$t =$$

Тогда

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

4) Уравнение прямой, проходящей через две точки.




$$M_1(x_1, y_1, z_1),$$
$$M_2(x_2, y_2, z_2).$$

В качестве направляющего вектора можно взять вектор

$$\overrightarrow{M_1M_2} =$$

Тогда

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

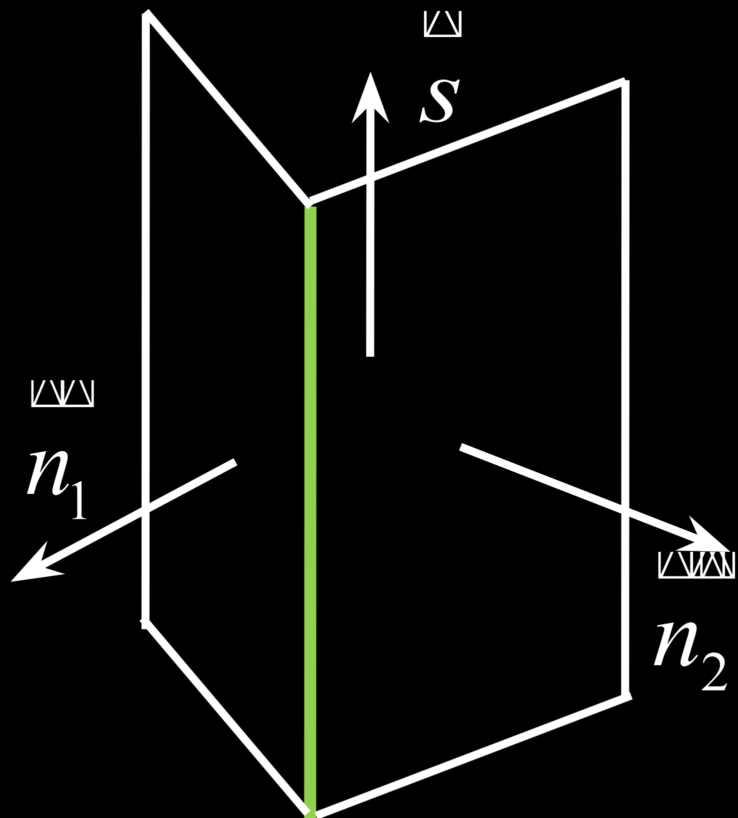
5) Общие уравнения прямой.

Прямая в пространстве может быть задана как линия пересечения двух плоскостей:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Пример. Написать канонические уравнения прямой, заданной общими уравнениями:

$$\begin{cases} x - 2y + z + 2 = 0, \\ 3y - z - 1 = 0. \end{cases}$$




Решение.

Нормальные векторы плоскостей:

$\vec{n}_1 =$

$\vec{n}_2 =$

Направляющий вектор прямой перпендикулярен обоим нормальным векторам.

Тогда

$\vec{s} =$

Значит,

$$\vec{s} =$$

т.е. $$\vec{s} = (-1, 1, 3).$$

Найдем координаты какой-нибудь точки, лежащей на искомой прямой.

Для этого в общих уравнениях положим, например, y=0. Тогда

$$\begin{cases} x + z + 2 = 0, \\ -z - 1 = 0; \end{cases}$$

Осталось записать уравнения прямой, проходящей через точку

$$(-1, 0, -1)$$

с направляющим вектором

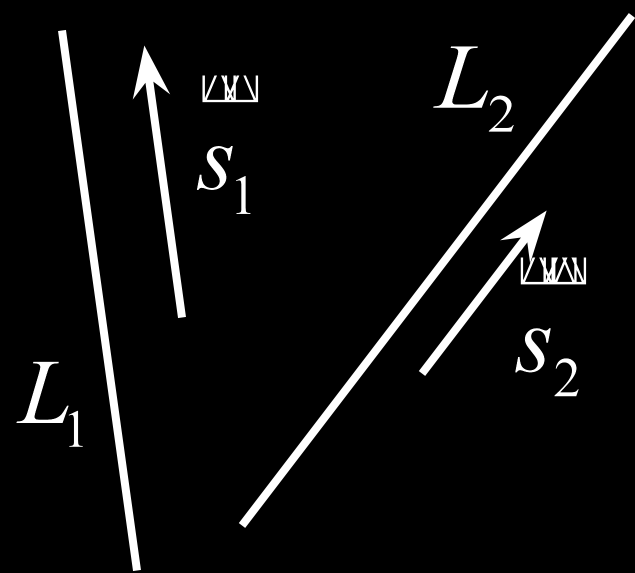
$$\vec{s} = (-1, 1, 3).$$

Получим

$$\frac{x+1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}.$$

# п.5. Прямая. Основные задачи.

1) Угол между прямыми.




Угол между прямыми равен углу между направляющими векторами этих прямых.

$$L_1:\ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},\qquad \vec{s}_1=$$

$$L_2:\ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.\qquad \vec{s}_2=$$

$$\cos\varphi =$$

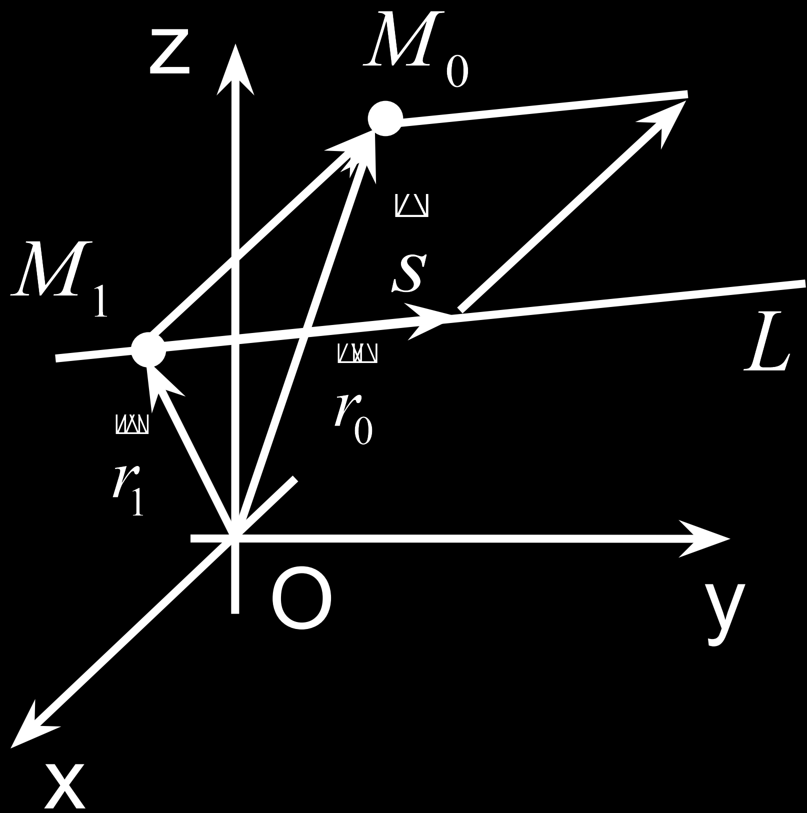
Если $L_1 \parallel L_2$, то $\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2$, т.е.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$ — условие параллельности прямых.

Если $L_1 \perp L_2$, то $\vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$, т.е.

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$ — условие перпендикулярности прямых.

# 2) Расстояние от точки до прямой.




$$\overrightarrow{M_1M_0} =$$

По свойству векторного произведения

$$S_{пар} = \left|\overrightarrow{M_1M_0} \times \vec{s}\right|.$$

найдем

$$d =$$

По формуле для площади параллелограмма

$$S_{пар} = ad,$$

Пример. Найти расстояние от точки M(-1,1,2) до прямой

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{1}.$$

Решение.

$$\vec{r}_0 =$$

Прямая проходит через точку

$$(1,-2,0)$$

и ее направляющий вектор

$$(2,-1,1),$$

т.е.

$$\vec{r}_1 = (1,-2,0), \quad \vec{s} = (2,-1,1).$$

# Тогда

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_0 =$$

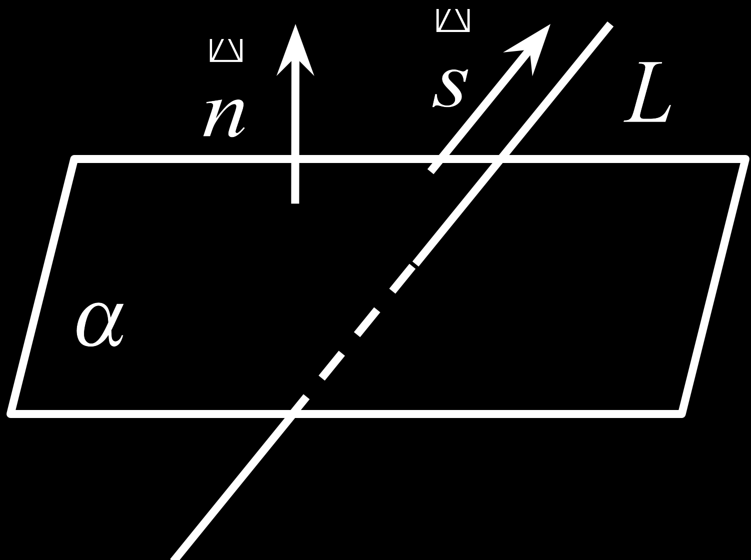
$$\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_0\right) \times \vec{s} =$$

$$\left|\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_0\right) \times \vec{s}\right| =$$

$$d =$$

# п.6. Прямая и плоскость. Основные задачи.

1) Угол между прямой и плоскостью.




Пусть $\varphi$ — угол между прямой и плоскостью.

Очевидно, что

$$\varphi + (\vec{n}, \vec{s}) =$$

$$\alpha: \; Ax + By + Cz + D = 0, \qquad \vec{n} =$$

$$L: \; \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \qquad \vec{s} =$$

Тогда

$$\sin\varphi =$$

Если $L \parallel \alpha,$ то $\vec{s} \perp \vec{n},$ т.е.

$Am + Bn + Cp = 0$ — условие параллельности прямой и плоскости.

Если $L \perp \alpha,$ то $\vec{s} \parallel \vec{n},$ т.е.

$\dfrac{m}{A} = \dfrac{n}{B} = \dfrac{p}{C}$ — условие перпендикулярности прямой и плоскости.

2) Точка пересечения прямой и плоскости.

Пример. Найти координаты точки пересечения прямой

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{1}$$

и плоскости

$$x+y+z+2=0.$$

Решение.

Пусть

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{1}=t.$$

Тогда

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -2 - t, \\ z = t. \end{cases}$$

Подставим в уравнение плоскости

$$1 + 2t - 2 - t + t + 2 = 0,$$

т.е.

$$t = -\frac{1}{2}.$$

Поэтому координаты точки пересечения

$$\left(0, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$