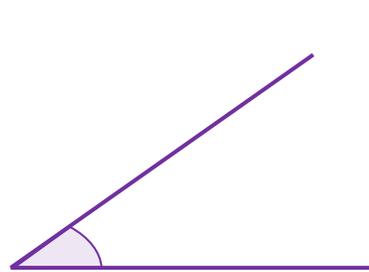


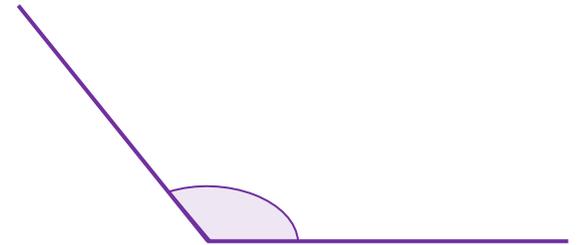
Виды углов в треугольнике



острый < 90

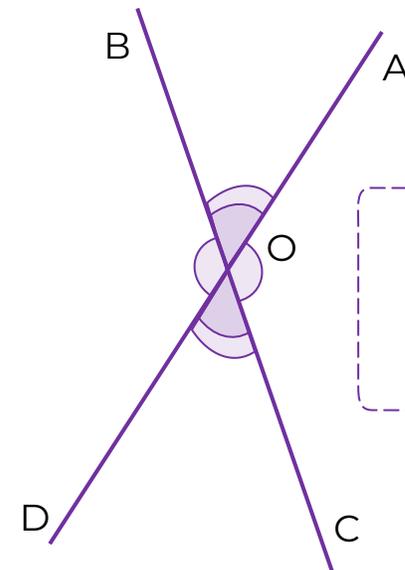
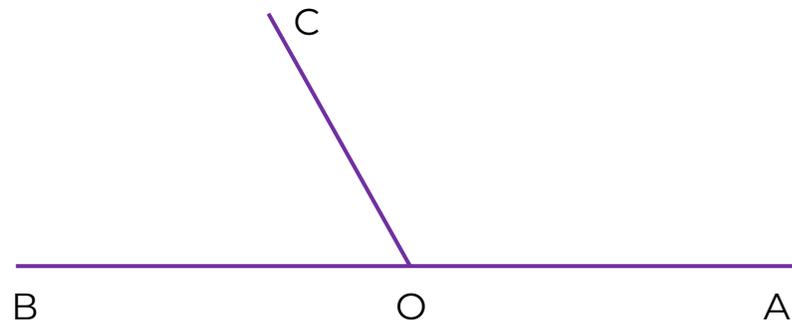


прямой $= 90$



тупой > 90

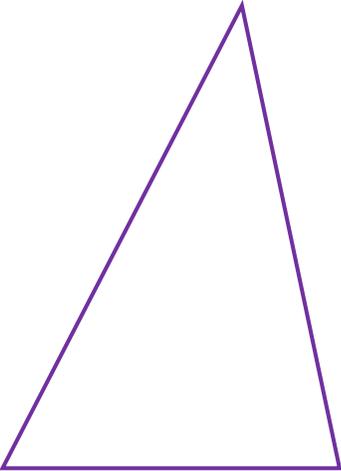
$\angle AOB$ - развернутый 180
 $\angle AOC$ и $\angle BOC$ смежный



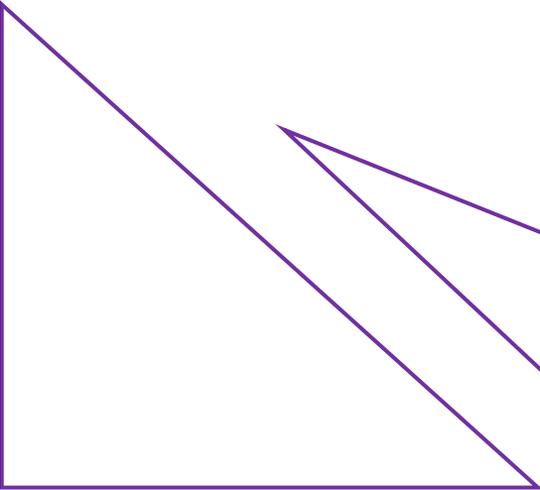
$\angle AOB = \angle DOC$
 $\angle BOD = \angle AOC$

вертикальные

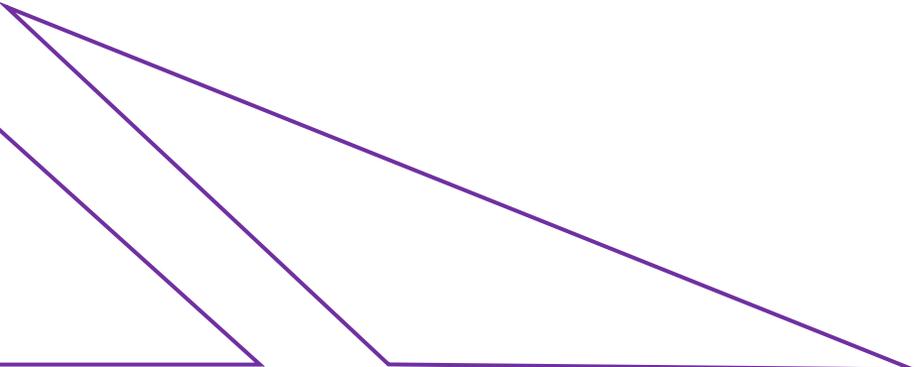
Виды треугольников



остроугольный



прямой



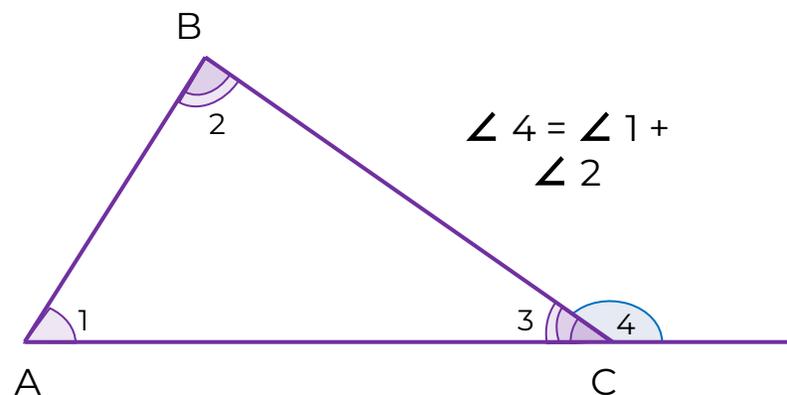
тупоугольный

Теорема о сумме углов

Сумма углов в треугольнике равна 180

Теорема о внешнем угле

Внешний угол равен сумме двух других углов несмежных с ним

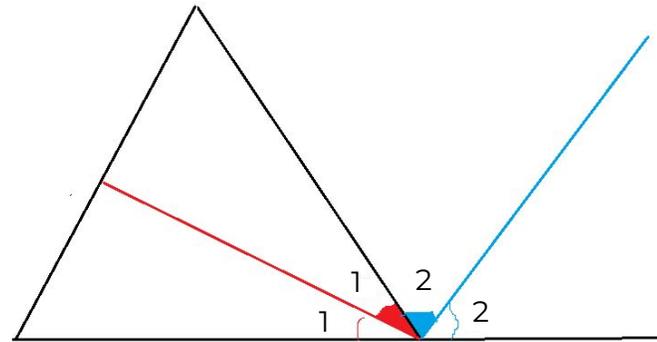


Любая сторона треугольника
меньше суммы двух других сторон
 $AB < AC + BC$

Биссектриса

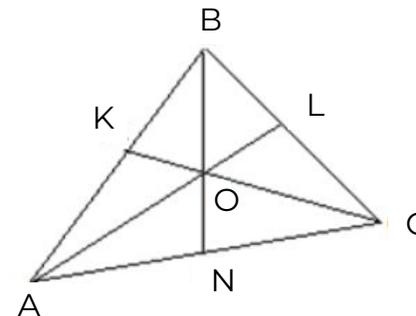
Биссектриса-луч, исходящий из вершины угла и делящий этот угол на два равных угла.

1. Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, вписанной в этот треугольник
2. Биссектрисы внутреннего и внешнего углов треугольника перпендикулярны.



3. Биссектриса делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам:

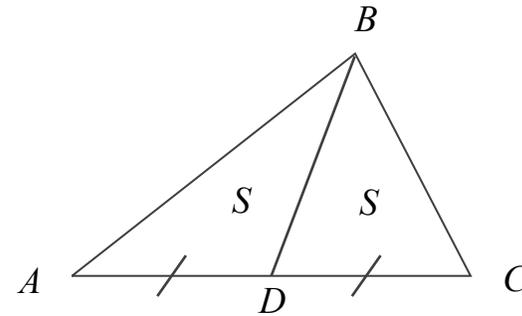
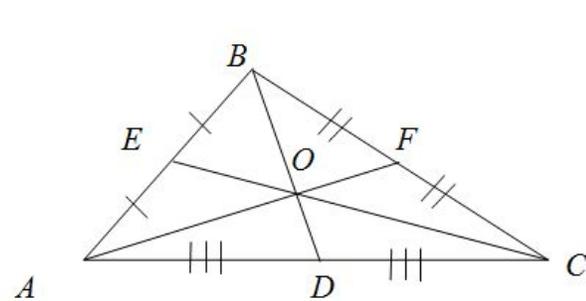
$$\frac{CL}{LB} = \frac{AC}{AB}$$



Медиана

– это отрезок, соединяющий вершину и середину противоположной стороны

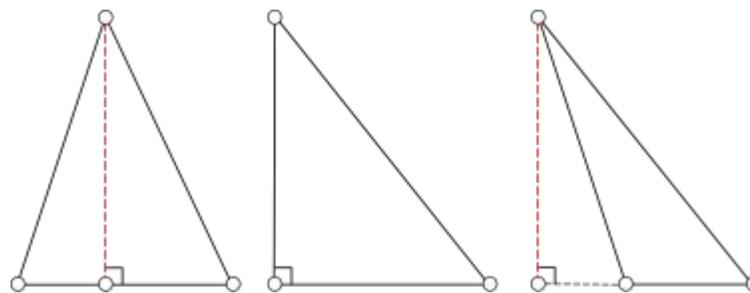
- 1 Медиана точкой пересечения делится в отношении 2:1
- 2 Медиана делит треугольник на два равновеликих



Высота

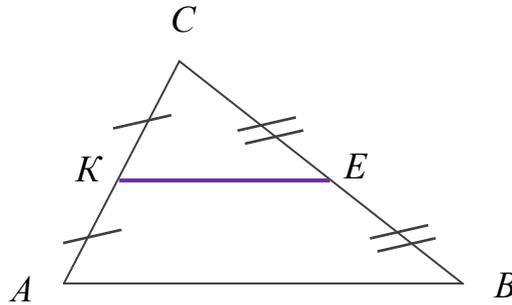
Высотой треугольника, проведённой из данной вершины, называется перпендикуляр, опущенный из этой вершины на противоположную сторону или её продолжение.

- 1 В остроугольном треугольнике высоты пересекаются внутри треугольника; в тупоугольном – вне треугольника; в прямоугольном – в вершине прямого угла.
- 2 В прямоугольном треугольнике катеты являются высотами.



Средняя линия

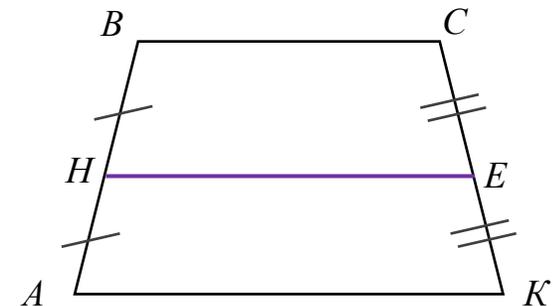
Средняя линия треугольника – это отрезок, соединяющий середины двух его сторон.



$$KE = \frac{1}{2} AB \quad KE \parallel AB$$

Средняя линия трапеции — отрезок, соединяющий середины боковых сторон этой трапеции.

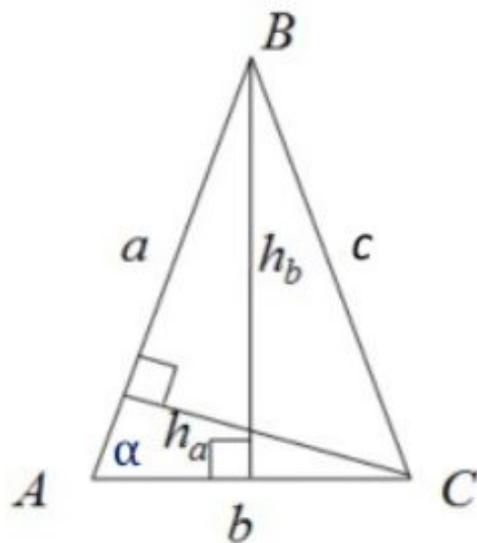
$$HE = \frac{1}{2} (AK + BC) \quad HE \parallel AK$$



ПРИЗНАКИ

Равенства	Подобия
1. По двум сторонам и углу между ними	1. По двум равным углам
2. По стороне и двум прилежащим к ней углам	2. По двум пропорциональным сторонам и углу между ними
3. По трем равным сторонам	3. По трем пропорциональным сторонам

Площадь треугольника



$$S = \frac{1}{2}bh_b$$

$$S = \frac{1}{2}absin\alpha$$

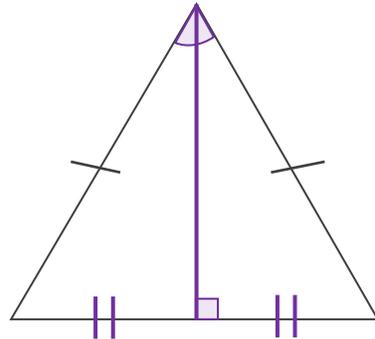
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

p-полупериметр

$$S = p \cdot r$$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

Равнобедренный/ равносторонний треугольник

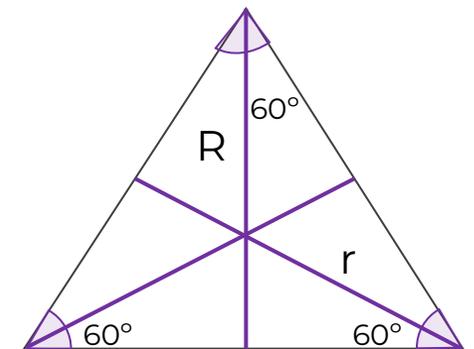


Свойства равнобедренного треугольника:

- 1) Равные боковые стороны
- 2) Углы при основании равны
- 3) Высота, медиана и биссектриса, проведенные к основанию совпадают

Свойства равностороннего треугольника:

- 1) Все стороны равны
- 2) Все углы равны 60
- 3) Все высоты, медианы и биссектрисы совпадают



Формулы

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

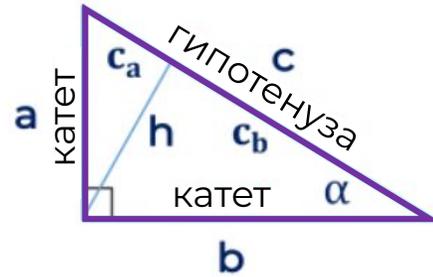
$$h = \frac{a \sqrt{3}}{2}$$

$$R = 2r$$

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$r = \frac{a \sqrt{3}}{6}$$

Прямоугольный треугольник



- 1) $\angle B + \angle C = 90^\circ$
- 2) Катет, лежащий против угла 30° , равен половине гипотенузы
- 3) Центр описанной окружности лежит на середине гипотенузы
- 4) Медиана, проведенная из вершины прямого угла равна половине гипотенузы

Теорема Пифагора

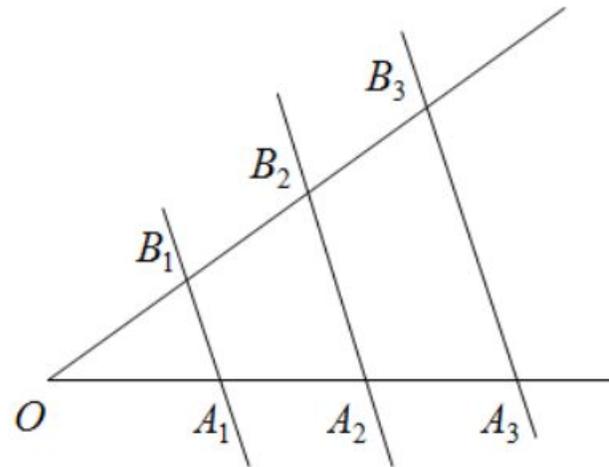
$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$S = \frac{1}{2} ab$$

$$h = \frac{ab}{c}$$

$$\begin{aligned} a^2 &= c \cdot c_a \\ b^2 &= c \cdot c_b \\ h^2 &= c_a \cdot c_b \end{aligned}$$

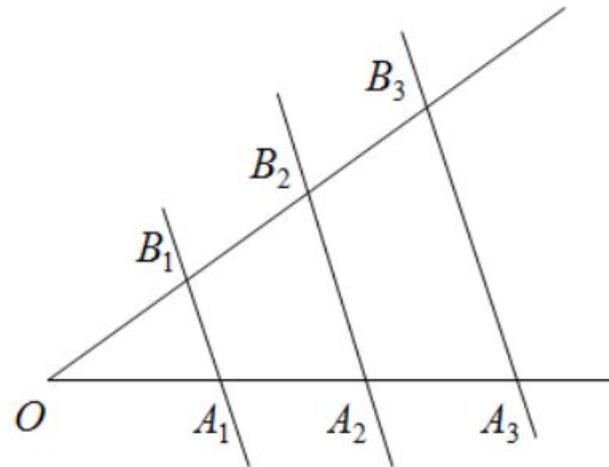
Теорема Фалеса



Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.

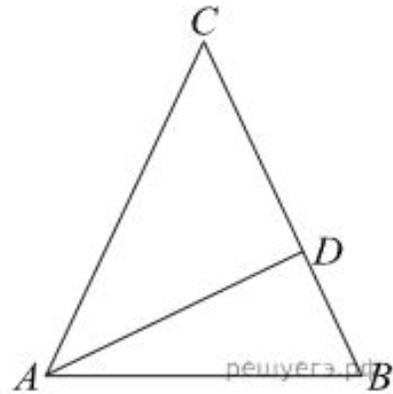
Если $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$ и $A_1A_2 = A_2A_3$, то $B_1B_2 = B_2B_3$

Обобщенная теорема Фалеса



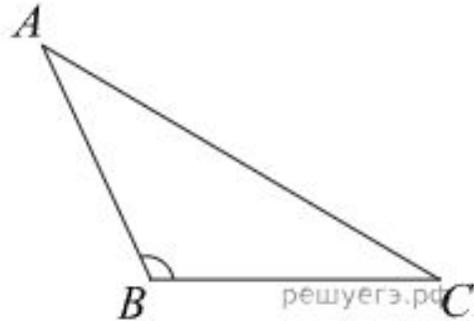
Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от сторон угла пропорциональные отрезки.

В треугольнике ABC проведена биссектриса AD и $AB = AD = CD$. Найдите меньший угол треугольника ABC . Ответ дайте в градусах.



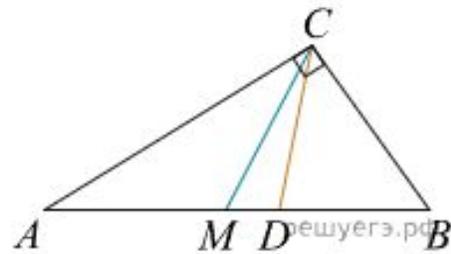
Ответ: 36

В треугольнике ABC угол B — тупой, $AB = 5$, $BC = 6$. Найдите величину угла, противолежащего стороне AC , если площадь треугольника равна $7,5$. Ответ дайте в градусах.



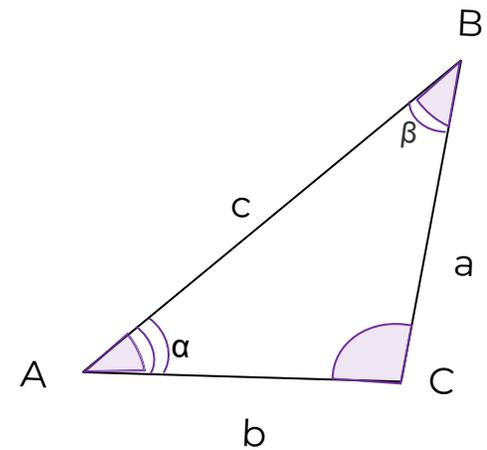
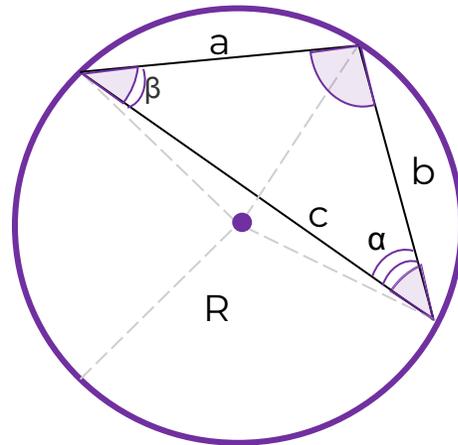
Ответ: 150

Угол между биссектрисой и медианой прямоугольного треугольника, проведенными из вершины прямого угла, равен 14° . Найдите меньший угол этого треугольника. Ответ дайте в градусах.

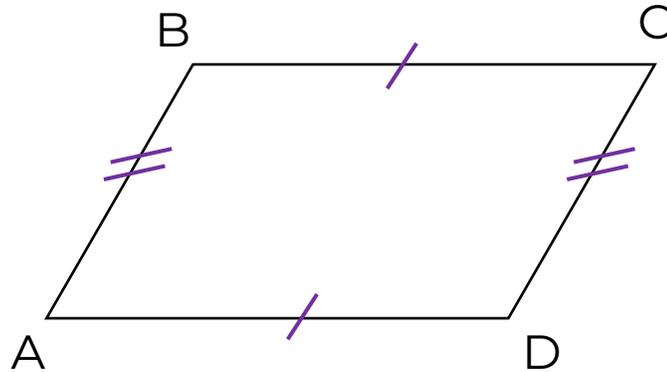


Ответ: 31

Теоремы

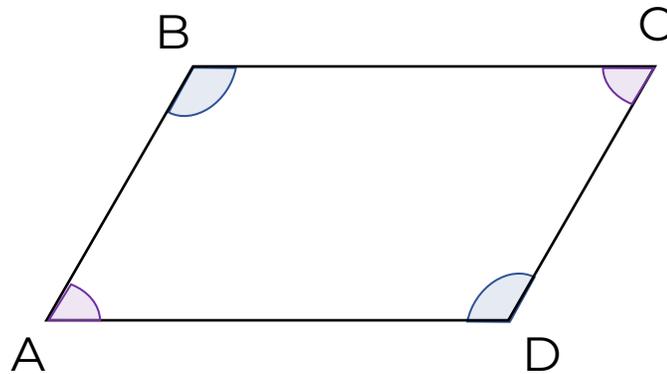


Параллелограмм



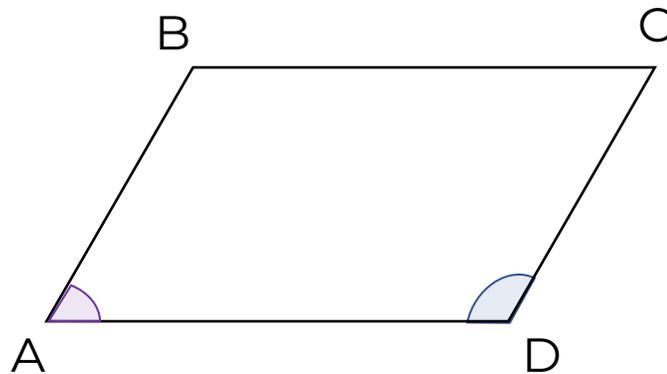
- Противоположные стороны попарно равны и параллельны

Параллелограмм



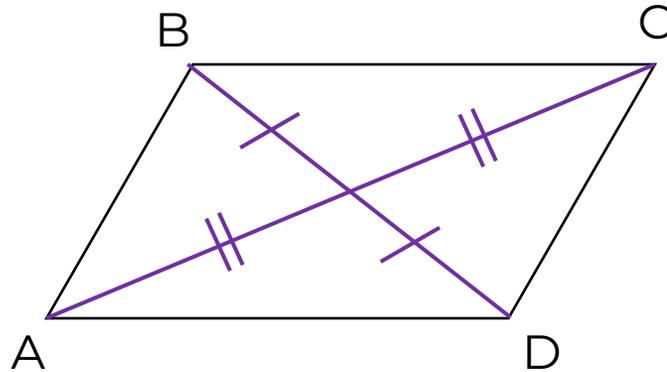
- Противоположные стороны попарно равны и параллельны
- Противоположные углы равны

Параллелограмм



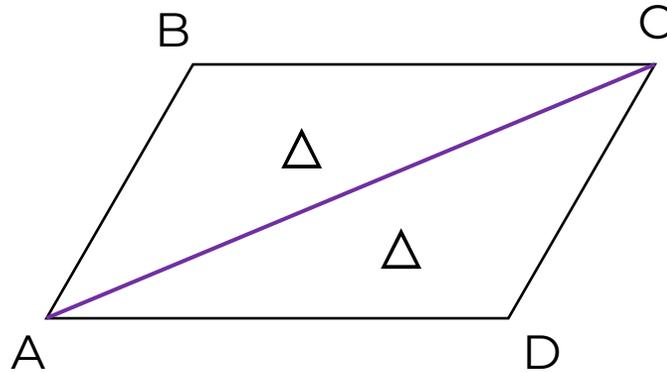
- Противоположные стороны попарно равны и параллельны
- Противоположные углы равны
- Сумма соседних углов 180
 $\angle A + \angle D = 180^\circ$

Параллелограмм



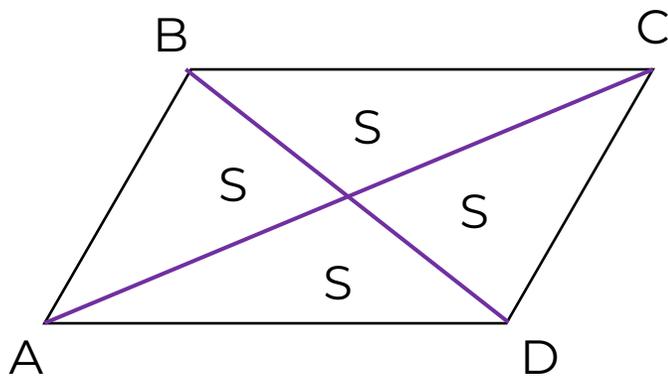
- Противоположные стороны попарно равны и параллельны
- Противоположные углы равны
- Сумма соседних углов 180
 $\angle A + \angle D = 180^\circ$
- Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

Параллелограмм



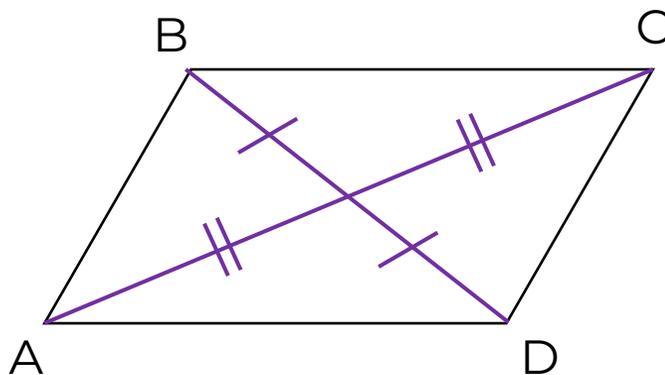
- Противоположные стороны попарно равны и параллельны
- Противоположные углы равны
- Сумма соседних углов 180
 $\angle A + \angle D = 180^\circ$
- Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.
- Диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника.

Параллелограмм



- Противоположные стороны попарно равны и параллельны
- Противоположные углы равны
- Сумма соседних углов 180
 $\angle A + \angle D = 180^\circ$
- Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.
- Диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника.
- Диагонали делят параллелограмм на 4 равновеликих треугольника

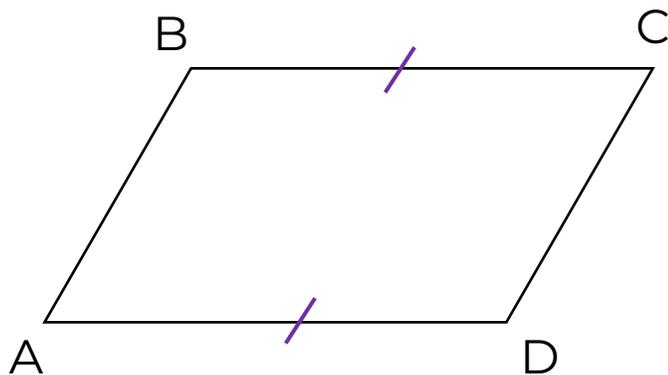
Параллелограмм



$$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$$

- Противоположные стороны попарно равны и параллельны
- Противоположные углы равны
- Сумма соседних углов 180°
 $\angle A + \angle D = 180^\circ$
- Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.
- Диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника.
- Диагонали делят параллелограмм на 4 равновеликих треугольника
- Сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов 4 сторон

Параллелограмм

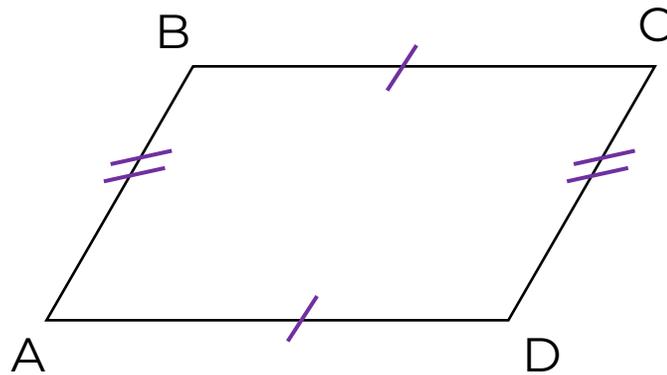


$AD \parallel BC$

Признаки для доказательства

→ если в четырёхугольнике, 2
противоположные стороны равны и
параллельны, это параллелограмм

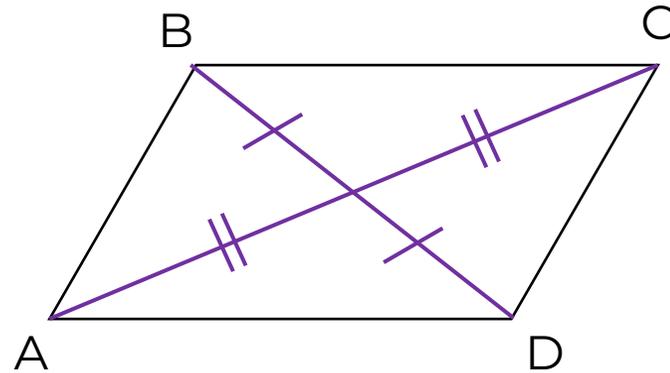
Параллелограмм



Признаки для доказательства

- если в четырёхугольнике, 2 противоположные стороны равны и параллельны, это параллелограмм
- если в четырёхугольнике, противоположные стороны попарно равны, это параллелограмм

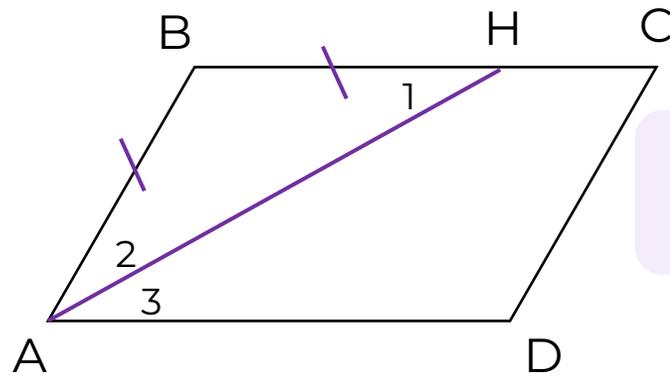
Параллелограмм



Признаки для доказательства

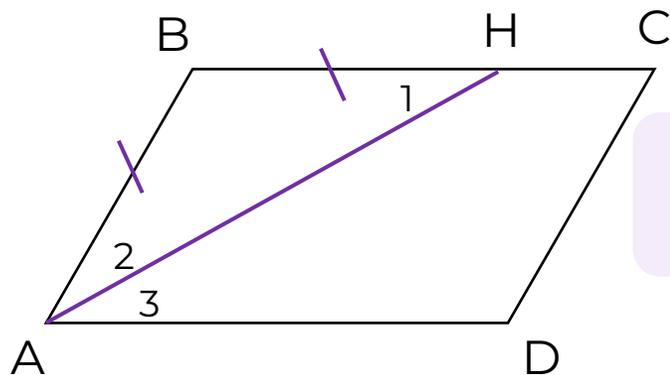
- если в четырёхугольнике, 2 противоположные стороны равны и параллельны, это параллелограмм
- если в четырёхугольнике, противоположные стороны попарно равны, это параллелограмм
- если в четырёхугольнике, диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, это параллелограмм

Особенности параллелограмма



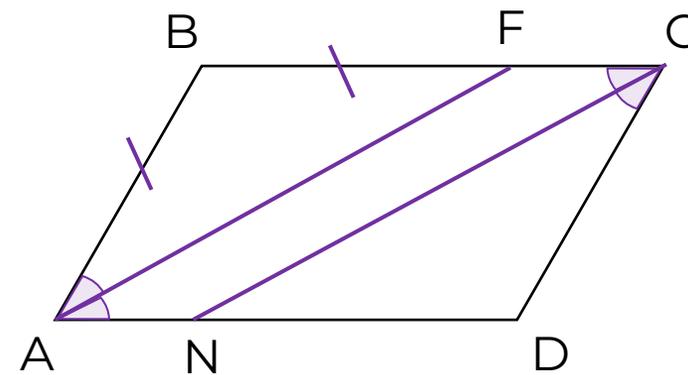
биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник

Особенности параллелограмма

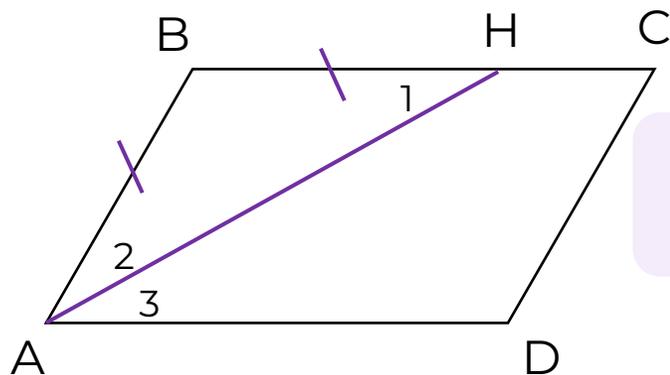


биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник

Биссектрисы противоположных углов параллелограмма параллельны или лежат на одной прямой.

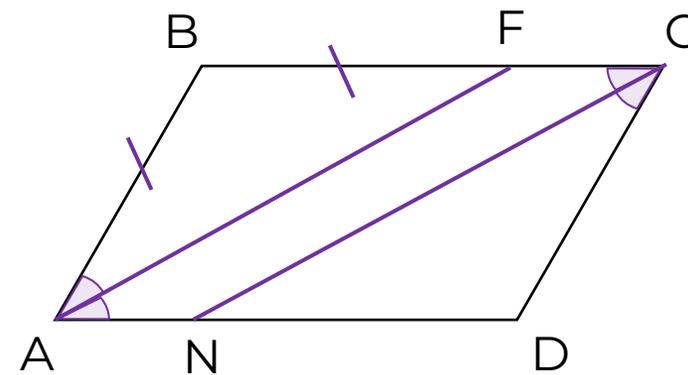


Особенности параллелограмма

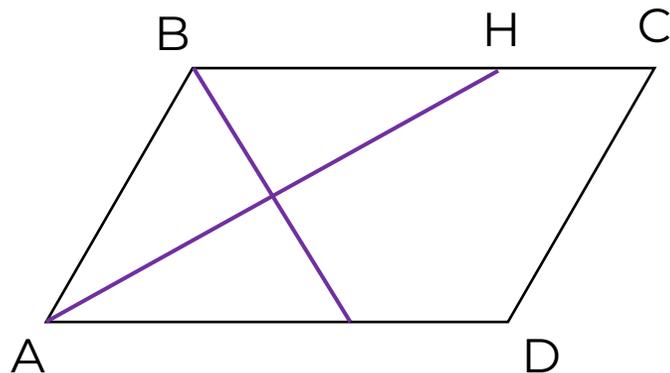


биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник

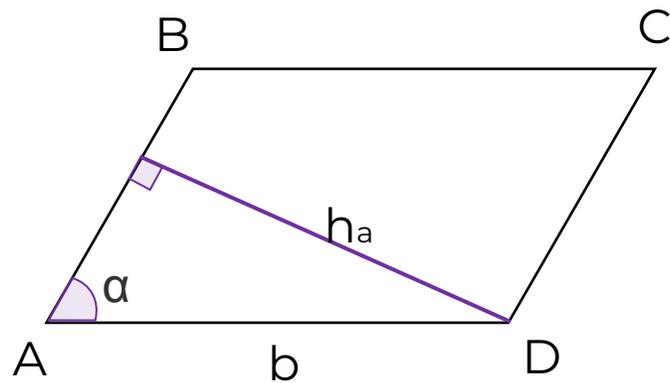
Биссектрисы противоположных углов параллелограмма параллельны или лежат на одной прямой.



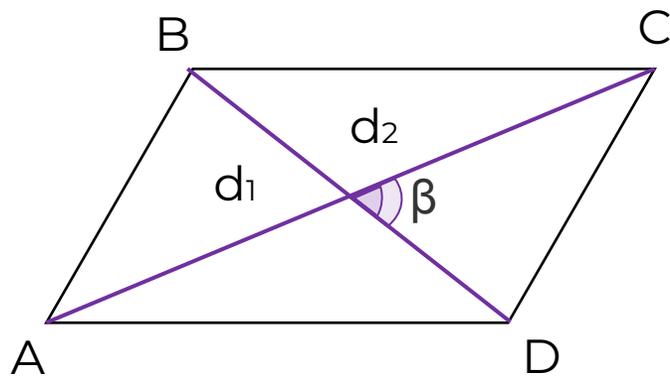
биссектрисы соседних углов параллелограмма перпендикулярны



Формулы для параллелограмма

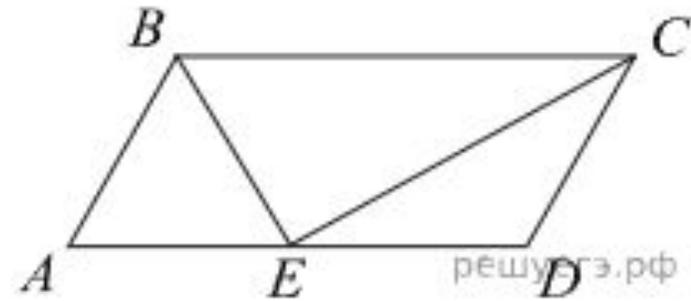


$$S = ah_a$$
$$S = ab \sin \alpha$$



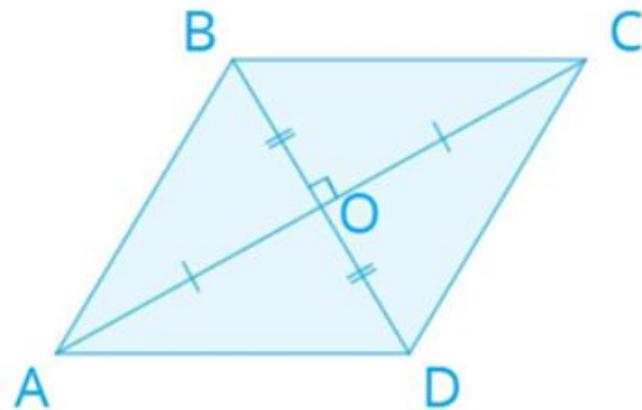
$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \beta$$

Точка пересечения биссектрис двух углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, принадлежит противоположной стороне. Меньшая сторона параллелограмма равна 5. Найдите его большую сторону.



Ответ: 10

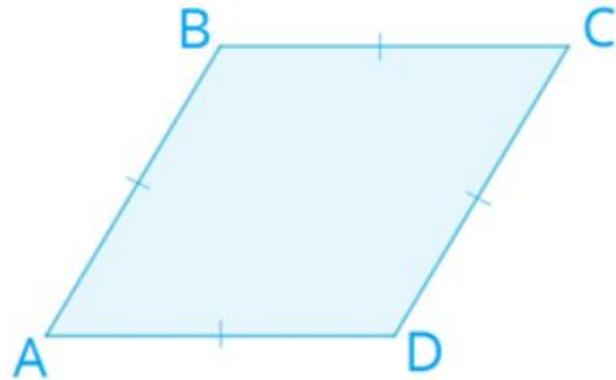
Ромб



Все свойства параллелограмма:

- Диагонали ромба перпендикулярны

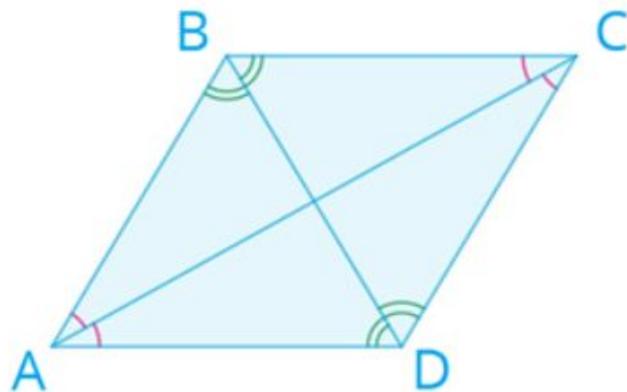
Ромб



Все свойства параллелограмма:

- Диагонали ромба перпендикулярны
- Все стороны равны

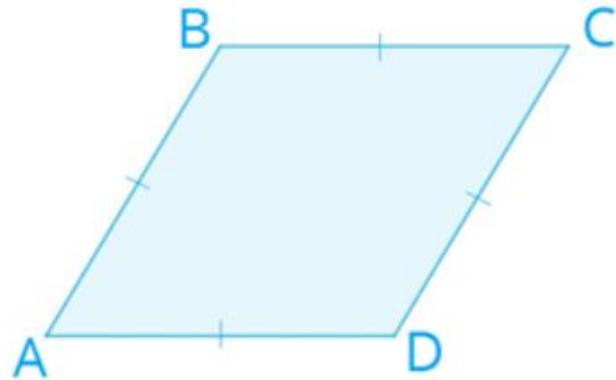
Ромб



Все свойства параллелограмма:

- Диагонали ромба перпендикулярны
- Все стороны равны
- Диагонали являются биссектрисами

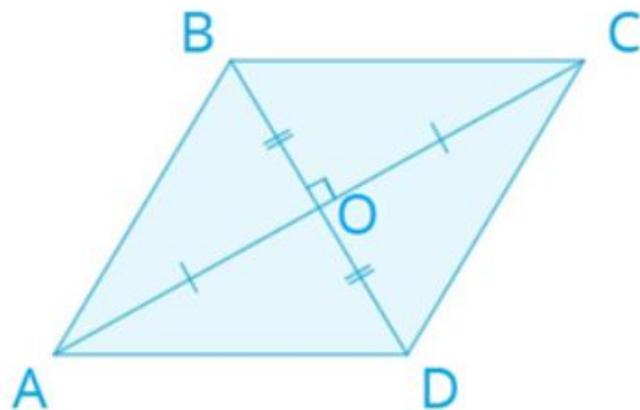
Ромб



Признаки для доказательства:

1. если в четырёхугольнике, все стороны равны, это ромб

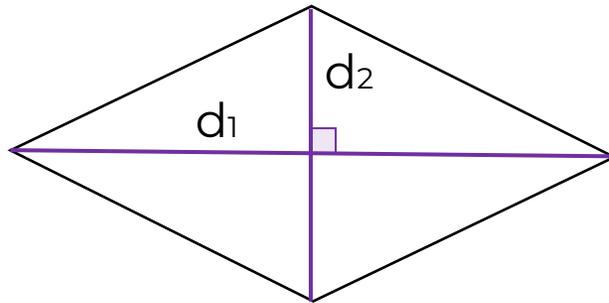
Ромб



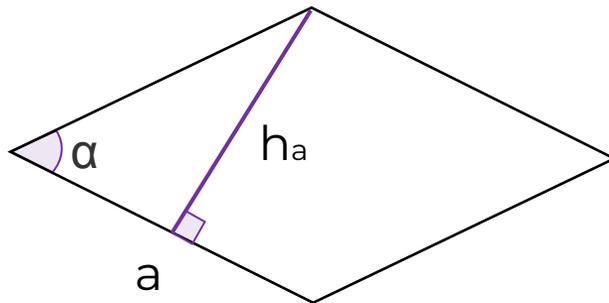
Признаки для доказательства:

1. если в четырёхугольнике, все стороны равны, это ромб
2. если в четырёхугольнике, диагонали перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам, это ромб

Формулы для ромба

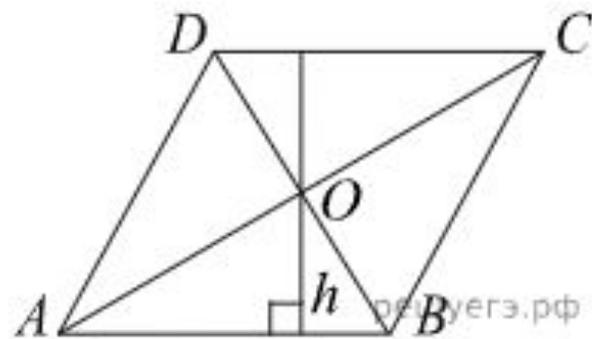


$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2$$



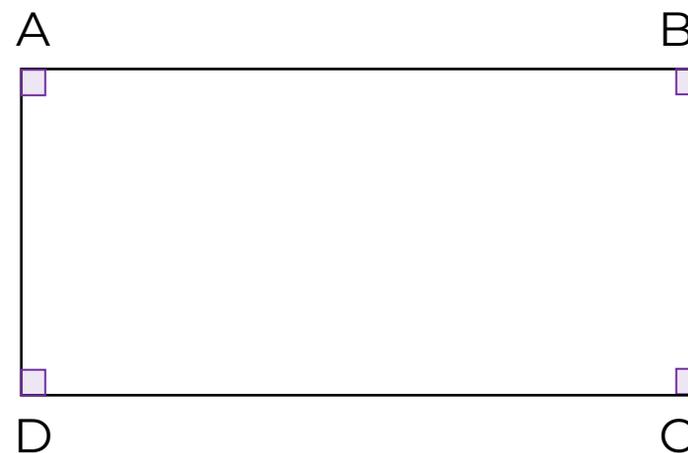
$$S = a h_a$$
$$S = a^2 \sin \alpha$$

Диагонали ромба относятся как 3:4. Периметр ромба равен 200. Найдите высоту ромба.



Ответ: 48

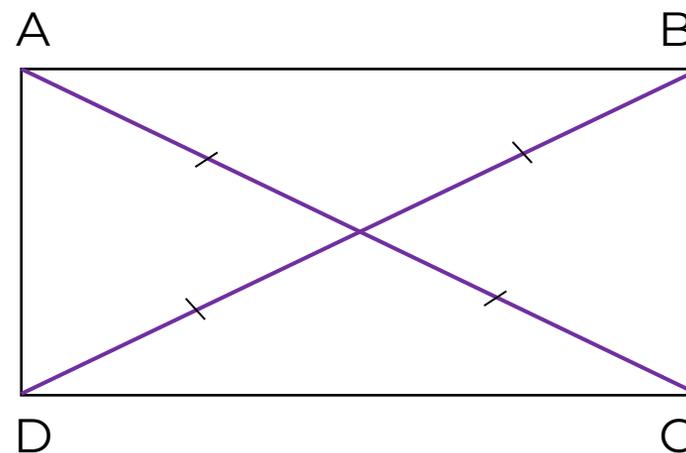
Прямоугольник



Свойства:

- все свойства параллелограмма
- все углы прямые

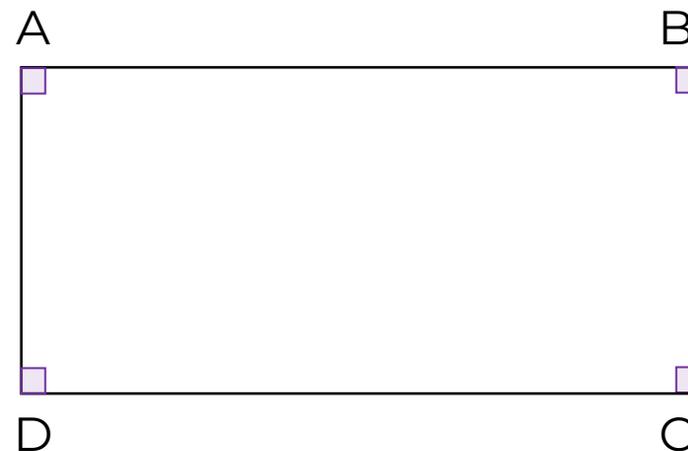
Прямоугольник



Свойства:

- все свойства параллелограмма
- все углы прямые
- диагонали равны

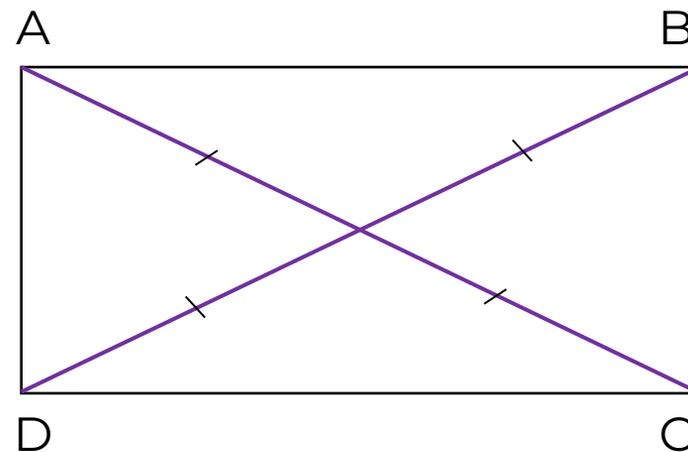
Прямоугольник



Признаки для доказательства:

- если в четырёхугольнике три угла прямые, это прямоугольник

Прямоугольник



Признаки для доказательства:

- если в четырёхугольнике три угла прямые, это прямоугольник
- если в четырёхугольнике диагонали равны и точкой пересечения делятся пополам, это прямоугольник

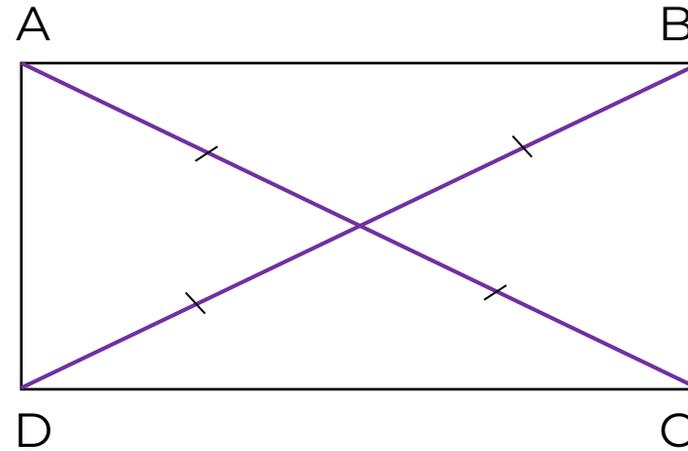
Прямоугольник



Признаки для доказательства:

- если в четырёхугольнике три угла прямые, это прямоугольник
- если в четырёхугольнике диагонали равны и точкой пересечения делятся пополам, это прямоугольник
- если в параллелограмме один угол прямой, это прямоугольник

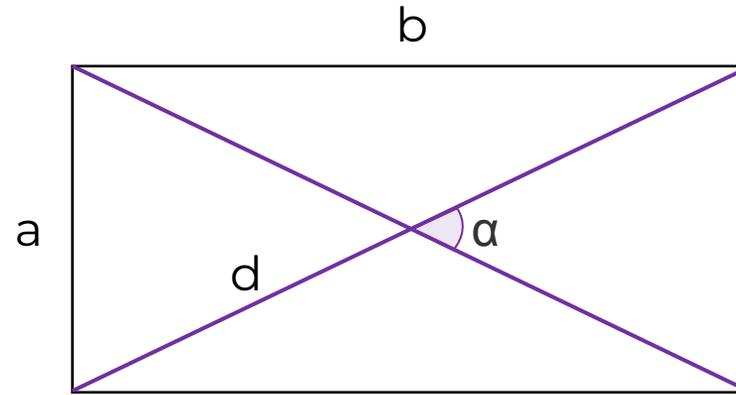
Прямоугольник



Признаки для доказательства:

- если в четырёхугольнике три угла прямые, это прямоугольник
- если в четырёхугольнике диагонали равны и точкой пересечения делятся пополам, это прямоугольник
- если в параллелограмме один угол прямой, это прямоугольник
- если в параллелограмме диагонали равны, это прямоугольник

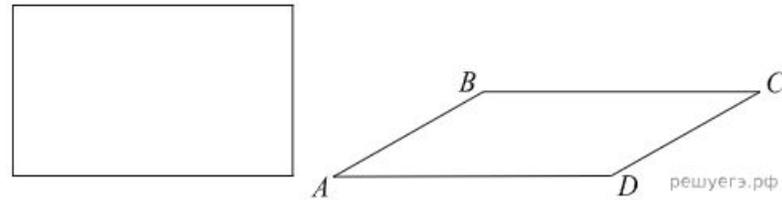
Формулы для прямоугольника



$$S=ab$$

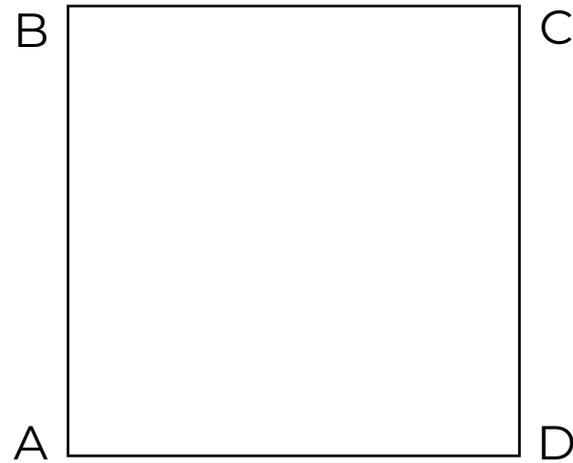
$$S=\frac{1}{2}d^2\sin\alpha$$

Параллелограмм и прямоугольник имеют одинаковые стороны. Найдите острый угол параллелограмма, если его площадь равна половине площади прямоугольника. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 30

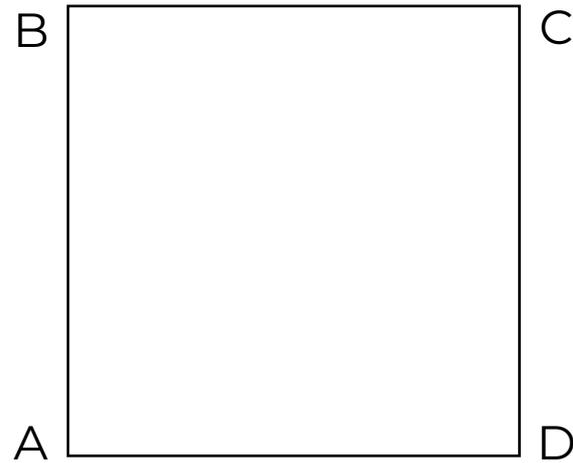
Квадрат



Свойства:

- все свойства параллелограмма, ромба, прямоугольника

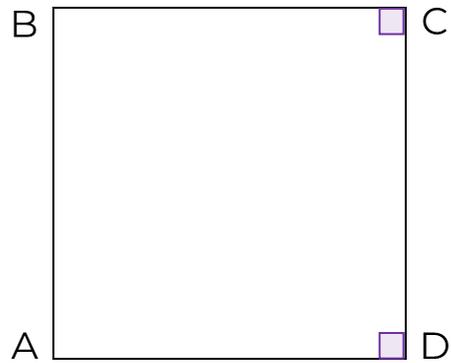
Квадрат



Свойства:

- все свойства параллелограмма, ромба, прямоугольника

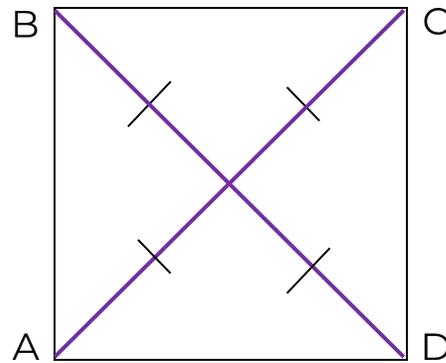
Квадрат



Признаки для доказательства:

- если в ромбе один угол прямой, это квадрат

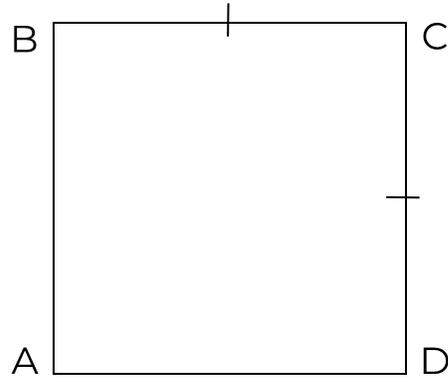
Квадрат



Признаки для доказательства:

- если в ромбе один угол прямой, это квадрат
- если в ромбе диагонали равны, это квадрат

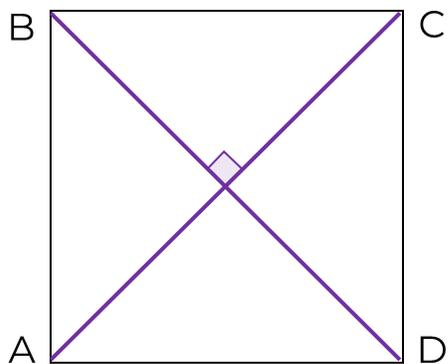
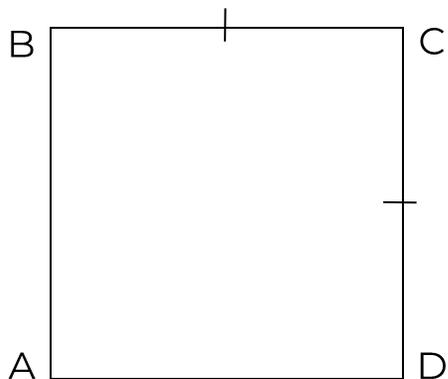
Квадрат



Признаки для доказательства:

- если в ромбе один угол прямой, это квадрат
- если в ромбе диагонали равны, это квадрат
- если в прямоугольнике соседние стороны равны, это квадрат

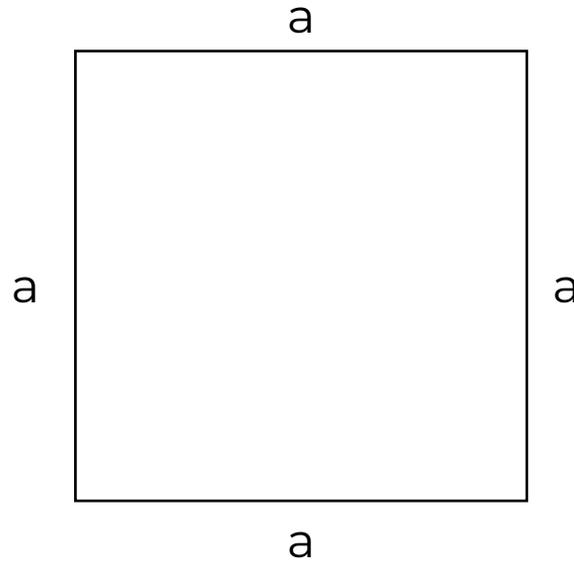
Квадрат



Признаки для доказательства:

- если в ромбе один угол прямой, это квадрат
- если в ромбе диагонали равны, это квадрат
- если в прямоугольнике соседние стороны равны, это квадрат
- если в прямоугольнике диагонали перпендикулярны, это квадрат

Формулы для квадрата

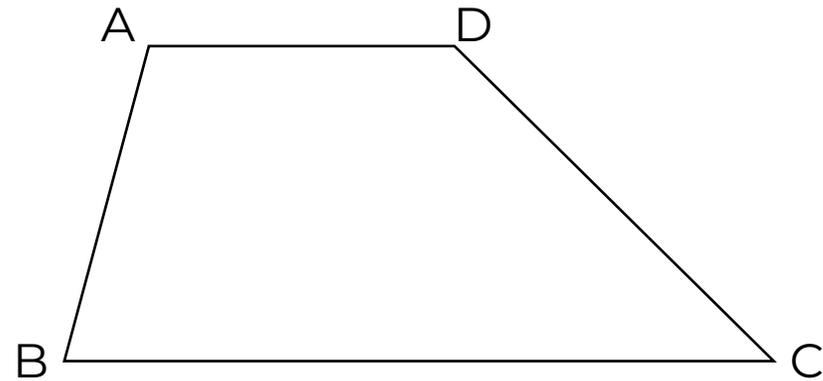


$$S=a^2$$

$$S=\frac{1}{2}d^2$$

$$d=a\sqrt{2}$$

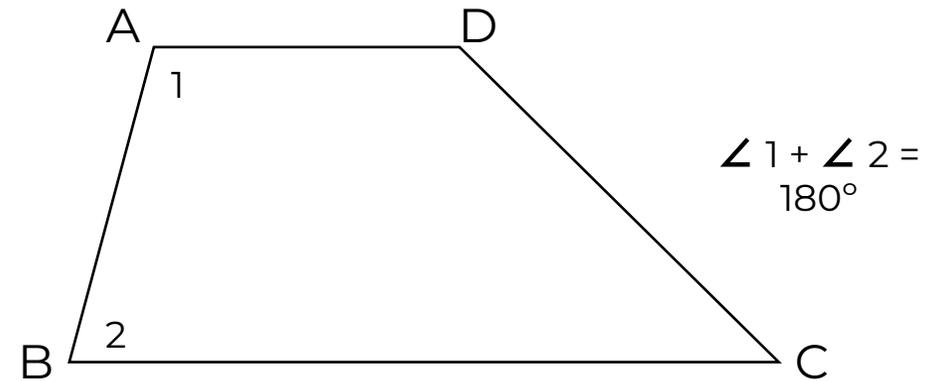
Трапеция



Свойства:

- Основания трапеции параллельны

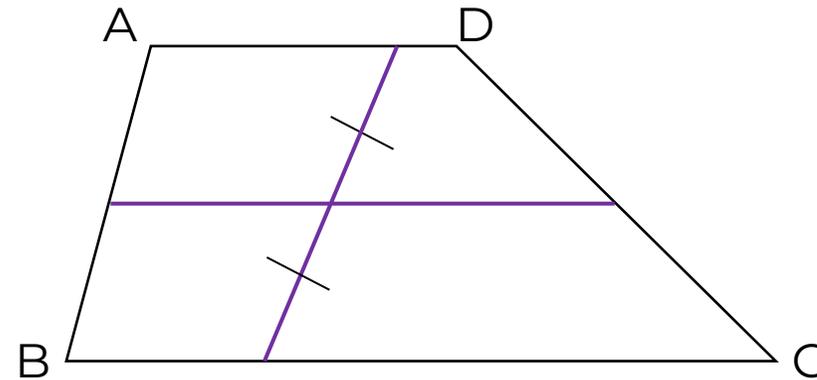
Трапеция



Свойства:

- Основания трапеции параллельны
- Сумма углов, прилежающих к боковой стороне, равна 180

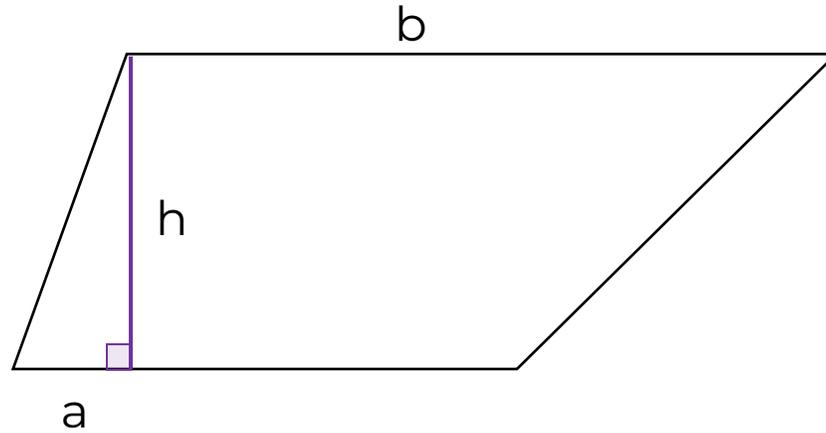
Трапеция



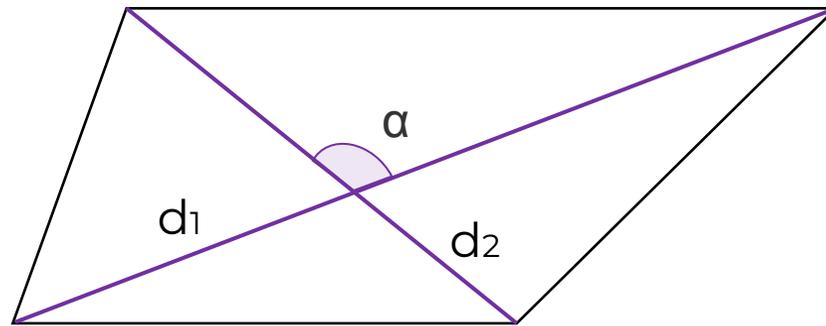
Свойства:

- Основания трапеции параллельны
- Сумма углов, прилежающих к боковой стороне, равна 180
- Средняя линия делит любой отрезок с концами, лежащими на прямых, проведённых через основания, пополам

Формулы для трапеции

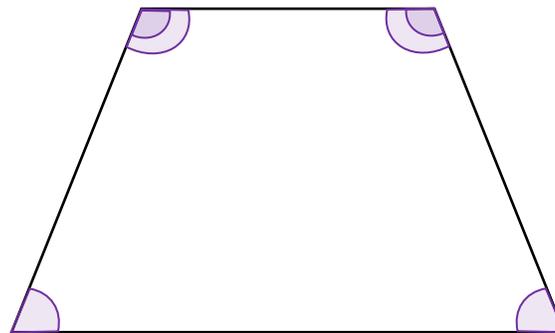


$$S = \frac{a+b}{2} h$$



$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha$$

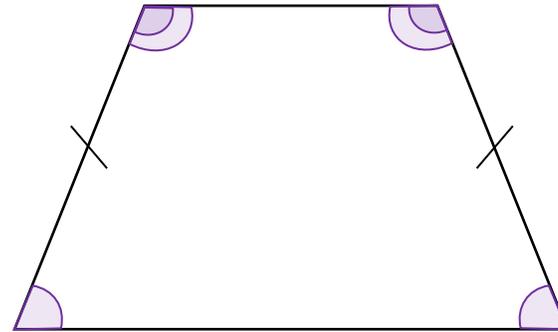
Равнобедренная трапеция



Свойства:

- углы при основании равны

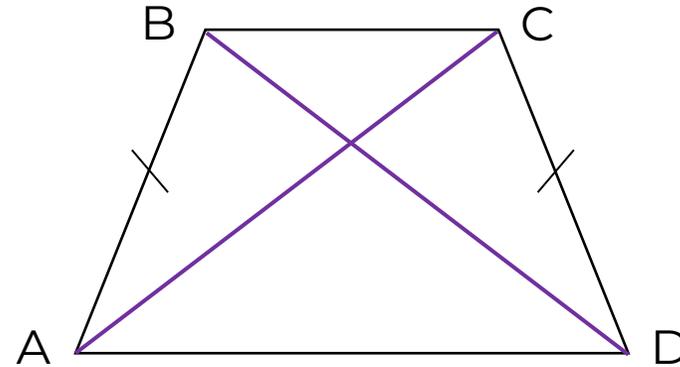
Равнобедренная трапеция



Свойства:

- углы при основании равны
- боковые стороны равны

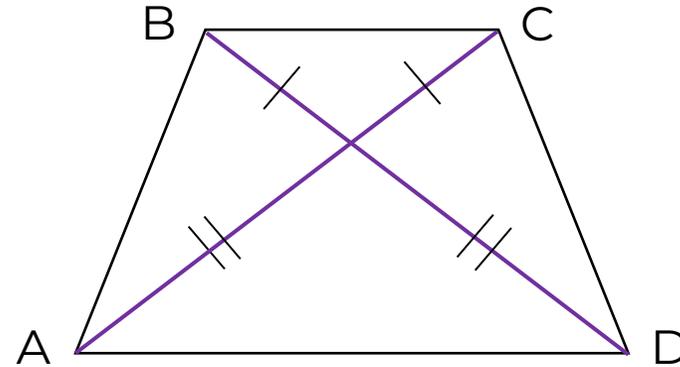
Равнобедренная трапеция



Свойства:

- углы при основании равны
- боковые стороны равны
- диагонали равны $AC=BD$

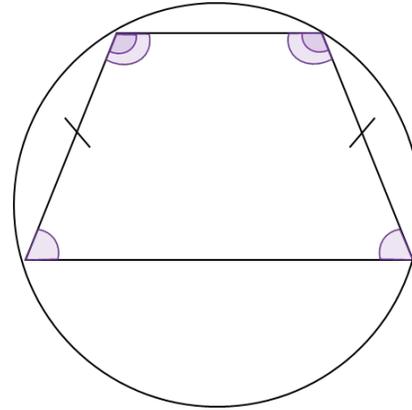
Равнобедренная трапеция



Свойства:

- углы при основании равны
- боковые стороны равны
- диагонали равны $AC=BD$
- два треугольника, образованные диагоналями и одним из оснований, являются равнобедренными

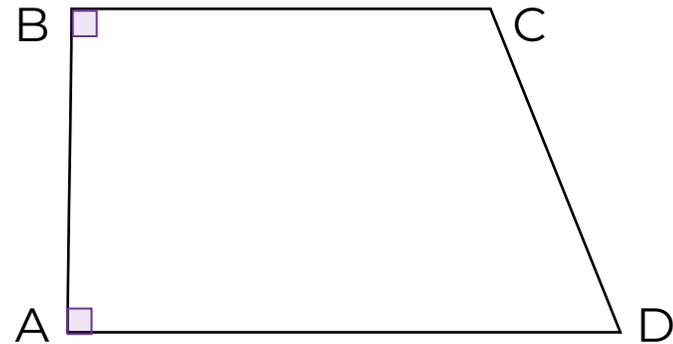
Равнобедренная трапеция



Свойства:

- углы при основании равны
- боковые стороны равны
- диагонали равны $AC=BD$
- два треугольника, образованные диагоналями и одним из оснований, являются равнобедренными
- если трапецию можно вписать в окружность, то трапеция – равнобедренная.

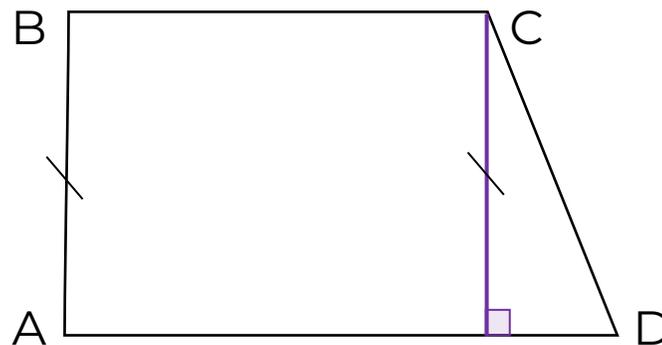
Прямоугольная трапеция



Свойства:

- два угла при боковой стороне прямые

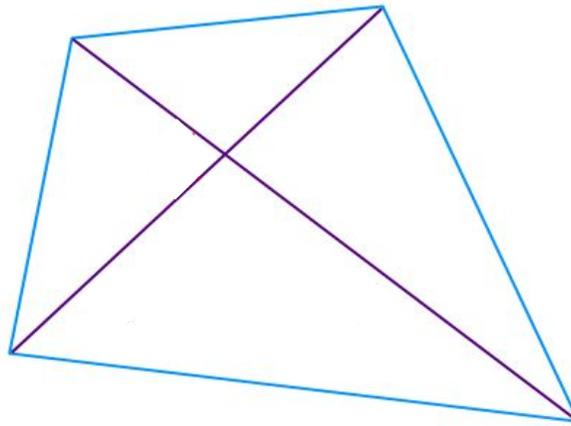
Прямоугольная трапеция



Свойства:

- два угла при боковой стороне прямые
- высота прямоугольной трапеции равна её меньшей боковой стороне

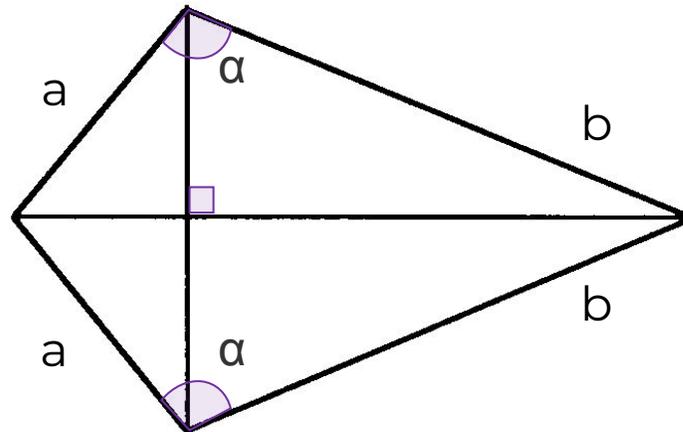
Произвольный четыреугольник



$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha$$

Сумма углов n-угольника = $180(n-2)$

Дельтоид



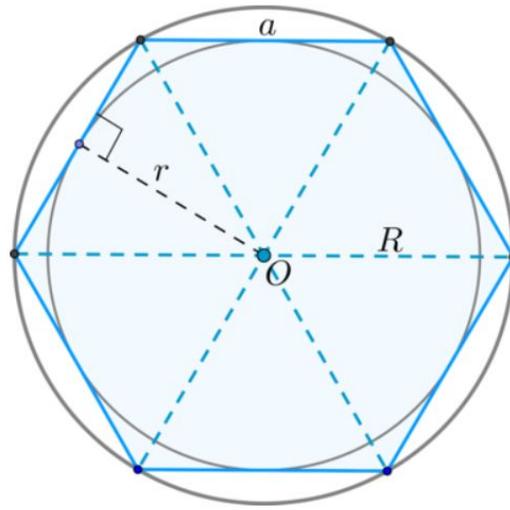
Свойства:

- углы между сторонами разной длины равны
- диагонали дельтоида перпендикулярны

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2$$

$$S = ab \sin \alpha$$

Правильный шестиугольник



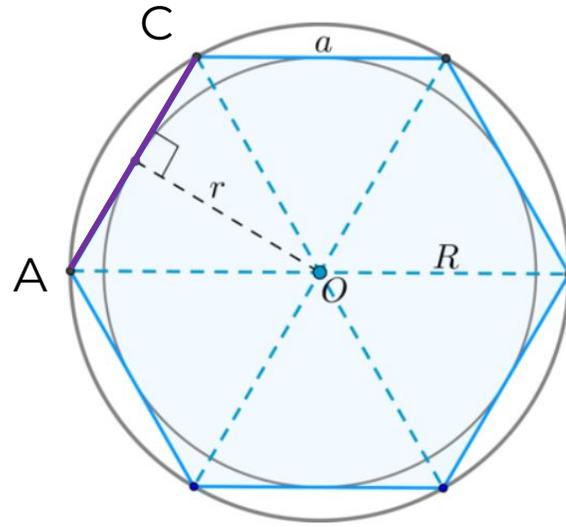
Свойства:

- Сторона равна радиусу описанной окружности
 - Все углы равны 120
- Диагонали делят шестиугольник на 6 равносторонних треугольников

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2$$

$$S = absin\alpha$$

Правильный шестиугольник



Свойства:

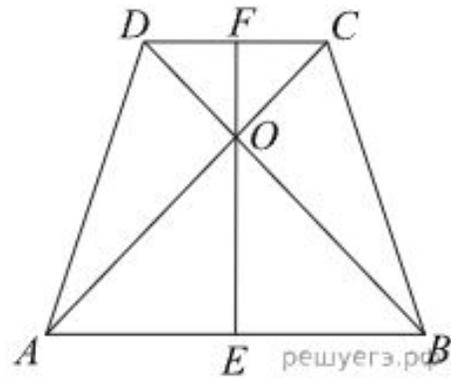
- Сторона равна радиусу описанной окружности
 - Все углы равны 120
- Диагонали делят шестиугольник на 6 равносторонних треугольников

$$S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$AD = 2a$$

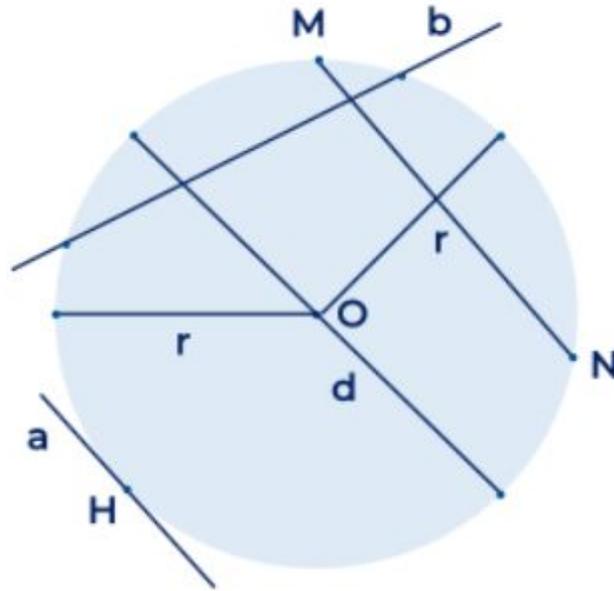
$$AC = a\sqrt{3}$$

В равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны. Высота трапеции равна 12. Найдите ее среднюю линию.



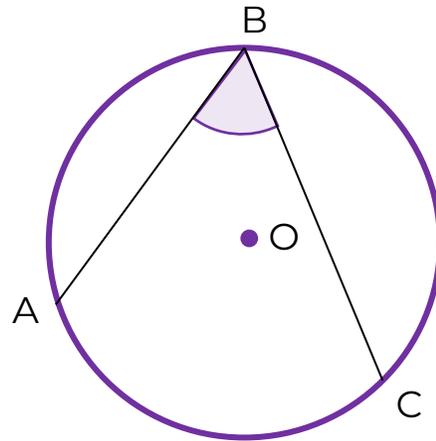
Ответ: 12

Окружность

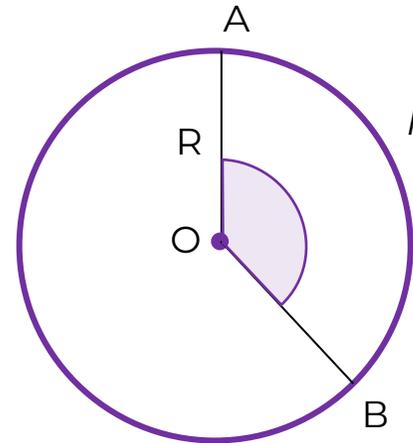


- O – центр окружности
- r – радиус окружности
- d - диаметр окружности, $d = 2r$
- MN – хорда
- a – касательная, H - точка касания
- b – секущая
- Длина окружности $(C) = 2\pi r$
- Площадь круга $= \pi r^2$

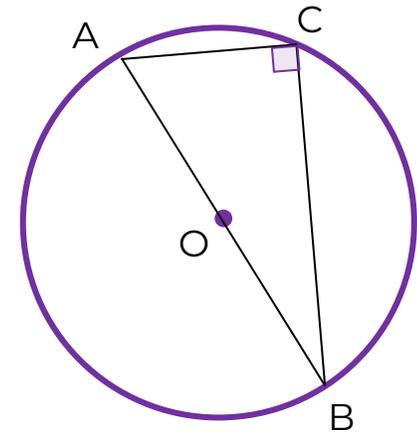
Виды углов



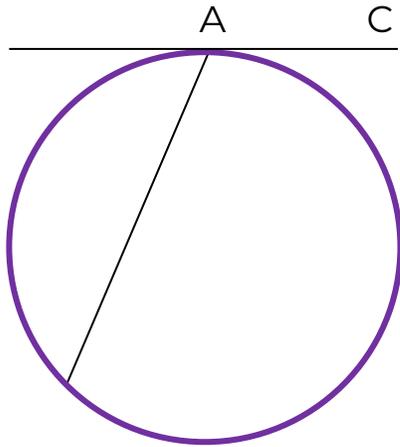
$\angle BAC$ – вписанный угол
 $\angle AOB = \frac{1}{2} \angle BAC$



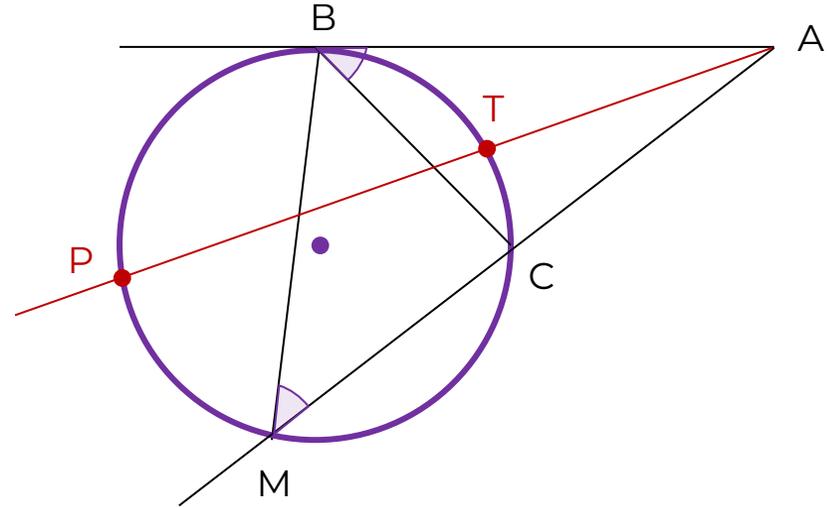
$\angle AOB$ – центральный
 $\angle AOB = \angle AOB$



Угол, опирающийся
на диаметр = 90°

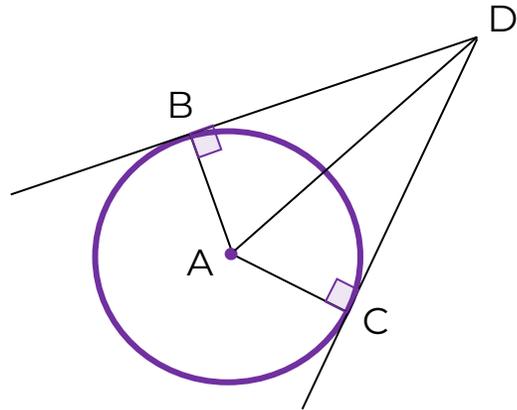


$$\angle BAC = \frac{1}{2} \angle AOB$$



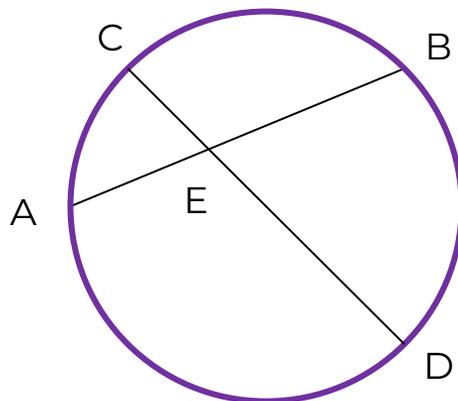
$$AB^2 = AT \cdot AP = AC \cdot AM$$

$$\angle PAM = \frac{\angle P - \angle C}{2}$$

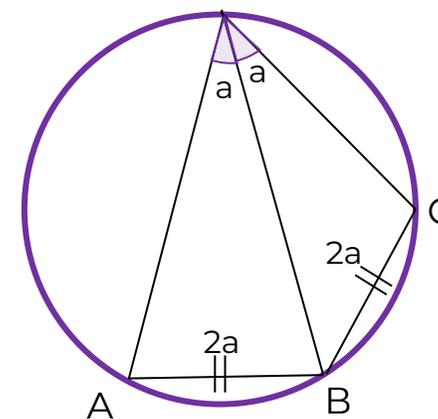


Отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны, и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности

Свойства хорд

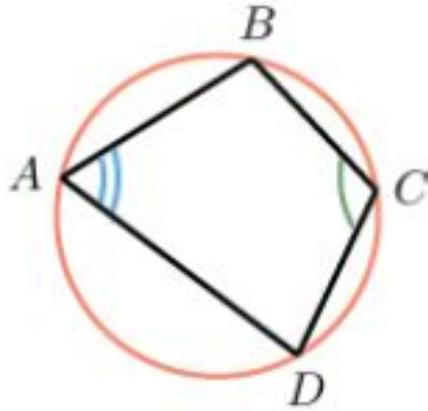


$$AE \cdot EB = CE \cdot ED$$

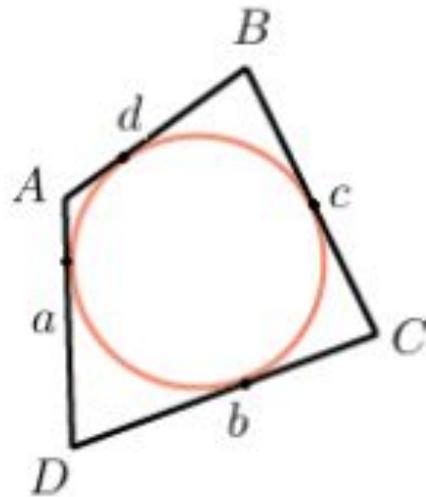


Хорды, стягивающие равные дуги,
РАВНЫ

Четырёхугольник

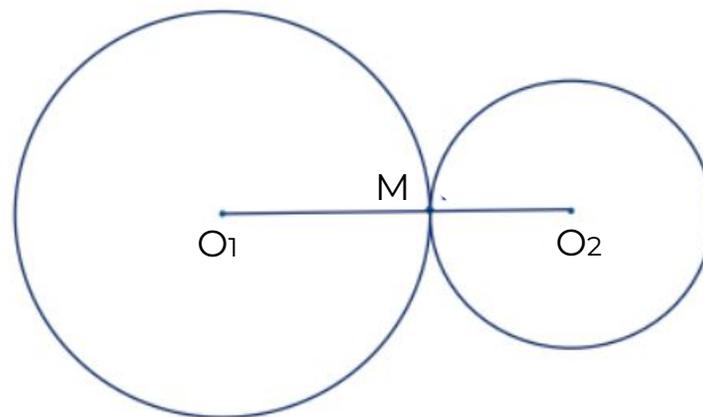


Вокруг четырёхугольника окружность можно описать только если сумма противоположных углов равна 180° .

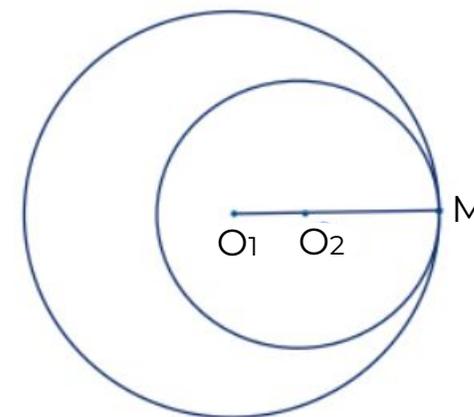


В четырёхугольник можно вписать окружность, если суммы его противоположных сторон равны.

Внешнее и внутренне касание

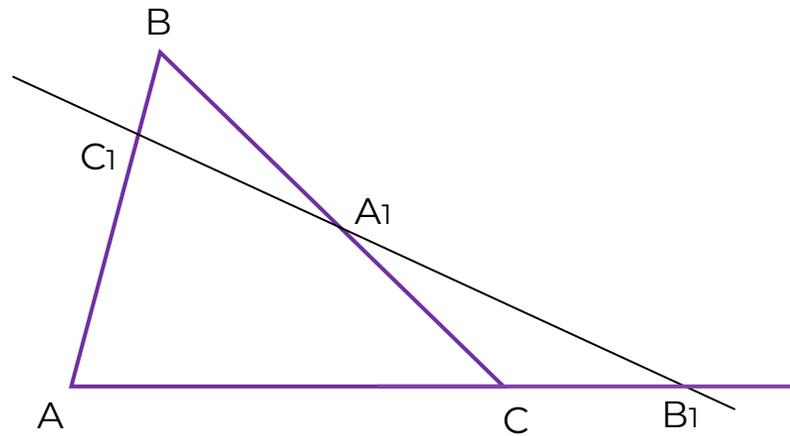


Внешнее касание



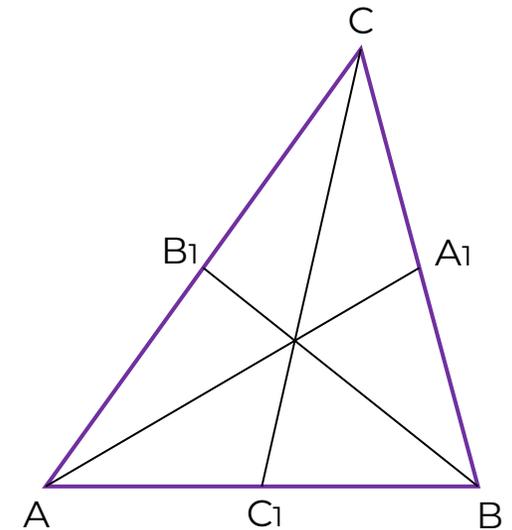
Внутреннее касание

Теорема Менелая



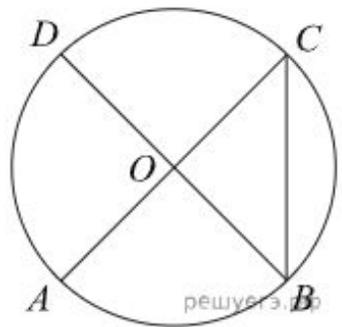
$$\frac{AC_1}{BC_1} = \frac{A_1B}{A_1C} = \frac{B_1C}{A_1B_1} = 1$$

Теорема Чева



$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{A_1C}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{AC_1} = 1$$

В окружности с центром O отрезки AC и BD — диаметры. Центральный угол AOD равен 110° . Найдите вписанный угол ACB . Ответ дайте в градусах.



Ответ: 35

В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C точки M и N — середины катетов AC и BC соответственно, CH — высота.

а) Докажите, что прямые MN и NH перпендикулярны.

б) Пусть P — точка пересечения прямых AC и NH , а Q — точка пересечения прямых BC и MN . Найдите площадь треугольника PQM , если $AN = 4$ и $BH = 2$.

Ответ: $18\sqrt{2}$

Известно, что $ABCD$ трапеция, $AD = 2BC$, AD, BC — основания. Точка M такова, что углы ABM и MCD прямые.

а) Доказать, что $MA = MD$.

б) Расстояние от M до AD равно BC , а угол ADC равен 55° . Найдите угол BAD .

Ответ: 80