Подготовка к ЕГЭ 2019 по математике

Решение задания №17.
Метод рационализации.

Учитель математики Лемехова Г.М.
Г. Северодвинск

Суть метода.

- **Метод рационализации** (декомпозиции, метод замены множителей, правило знаков)
- заключается ***в замене*** сложного выражения ***F(x) на*** более ***простое*** выражение ***G(x)*** (в конечном итоге рациональное), при которой ***неравенство G(x)*** v 0 ***равносильно неравенству F(x)*** v 0 в области определения выражения F(x).

Декомпозиция

- Декомпозиция — это научный метод, использующий структуру задачи и позволяющий заменить решение одной большой задачи решением серии меньших задач, пусть и взаимосвязанных, но более простых. (Разделение целого на части)

- **Метод широко используется при решении неравенств с переменным основанием логарифма и позволяет решать неравенства такого вида без перехода к равносильной совокупности систем, решение которой является достаточно трудоёмким и требующим большого количества времени.**

Алгоритм метода рационализации

1. ОДЗ
2. Привести к виду $\frac{u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n}{v_1 \cdot v_2 \cdot \ldots \cdot v_k} \vee 0,$
3. Заменить все выражени u_i u_n на более простые.
4. Решить полученное неравенство.
5. Выписать ответ.

Метод рационализации в логарифмических неравенствах

Исходное выражение $(F(x))$	Выражение после замены $(G(x))$
$\log_{h(x)} f(x) - \log_{h(x)} g(x)$ $(h(x) \neq 1)$	$(h(x) - 1)(f(x) - g(x))$
$\log_{h(x)} f(x) - 1$ $(h(x) \neq 1)$	$(h(x) - 1)(f(x) - h(x))$
$\log_{h(x)} f(x)$ $(h(x) \neq 1)$	$(h(x) - 1)(f(x) - 1)$

$$\log_a f(x) - \log_a g(x) > 0, a > 0, a \neq 1.$$

Знак «сохраняется».

$$\log_a f(x) - \log_a g(x) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(f(x) - g(x)) > 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

$$1)\log_a f(x) > 0, a > 0, a \neq 1.$$

$$\log_a f(x) > \log_a 1.$$

Знак «сохраняется».

$$\log_a f(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)\cdot(f(x)-1) > 0, \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

$$\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x) > 0,$$

$$\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (a(x)-1)(f(x)-g(x)) > 0, \\ a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

$$\log_{a(x)} f(x) > 0.$$

$$\log_{a(x)} f(x) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (a(x)-1)\cdot(f(x)-1) > 0, \\ a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1, \\ f(x) > 0; \end{cases}$$

Решите неравенство: 1). $\log_{\frac{1}{2}}(5x-1) \geq -2$

Применим метод равносильного перехода:

$$\begin{cases} 5x-1>0, \\ 5x-1 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{1}{5}, \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{5};1\right].$$

Проведём рационализацию , представив 2 в виде логарифма с основанием $\frac{1}{2}$

$$\log_{\frac{1}{2}}(5x-1) \geq \log_{\frac{1}{2}} 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-1>0, \\ \left(\frac{1}{2}-1\right)(5x-1-4) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > \frac{1}{5}, \\ x \leq 1. \end{cases}$$

Ответ: $\frac{1}{5} < x \leq 1.$

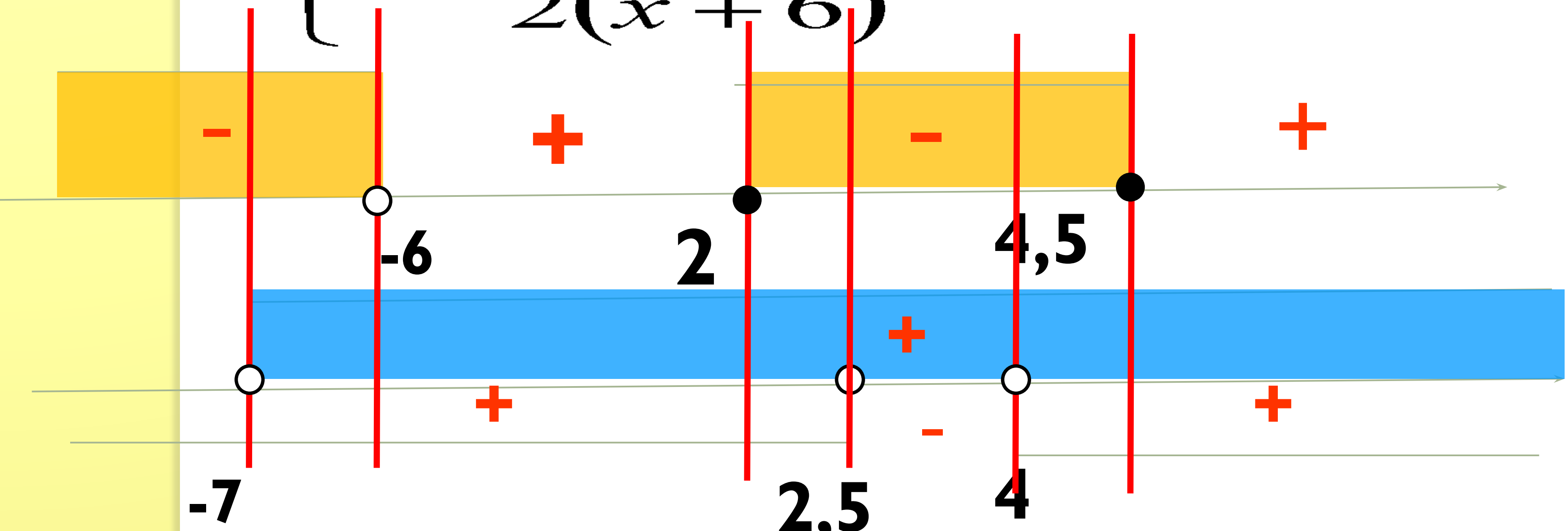
2). $$\frac{\log_2\left(2x^2-13x+20\right)-1}{\log_3\left(x+7\right)}\le 0$$

$$\frac{\log_2\left(2x^2-13x+20\right)-\log_2 2}{\log_3\left(x+7\right)}\le 0$$

$$\frac{\log_2\left(2x^2-13x+20\right)-\log_2 2}{\log_3\left(x+7\right)}\le 0$$

$$\begin{cases} 2x^2-13x+20>0, \\ x+7>0, \\ \dfrac{(2-1)\left(2x^2-13x+20-2\right)}{(3-1)(x+7-1)}\le 0; \end{cases} \begin{cases} 2(x-4)\left(x-\dfrac{5}{2}\right)>0, \\ x>-7, \\ \dfrac{(x-2)\left(x-\dfrac{9}{2}\right)}{2(x+6)}\le 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x-4)\left(x-\dfrac{5}{2}\right) > 0, \\ x > -7, \\ \dfrac{(x-2)\left(x-\dfrac{9}{2}\right)}{2(x+6)} \le 0. \end{cases}$$



Ответ: -7 < x < 6, 2 ≤ x < 2,5, 4 < x ≤ 4,5.

$$3).\ \log_{0,1}\left(x^2 + x - 2\right) > \log_{0,1}\left(x+3\right).$$

$$\begin{cases} (0,1-1)\left(x^2 + x - 2 - x - 3\right) > 0, \\ x^2 + x - 2 > 0, \\ x + 3 > 0 \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\sqrt{5};-2\right)\cup\left(1;\sqrt{5}\right).$

$$4).\ \frac{\log_2(3x+2)}{\log_2(2x+3)} \le 0.$$

$$\begin{cases} \dfrac{(2-1)(3x+1)}{(2-1)(2x+2)} \le 0, \\ 3x+2>0, \\ 2x+3>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x>-1, \\ x \le -\dfrac{1}{3}, \\ x > -\dfrac{2}{3}, \\ x > -1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{2}{3}, \\ x \le -\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Ответ: $-\dfrac{2}{3} < x \le -\dfrac{1}{3}$.

$$5).\ \frac{x^2-4}{\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-1\right)}<0;$$

$$\begin{cases}\left(x^2-4\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(x^2-2\right)<0,\\ x^2-1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(x^2-4\right)\left(x^2-2\right)>0,\\ x^2-1>0\end{cases}$$

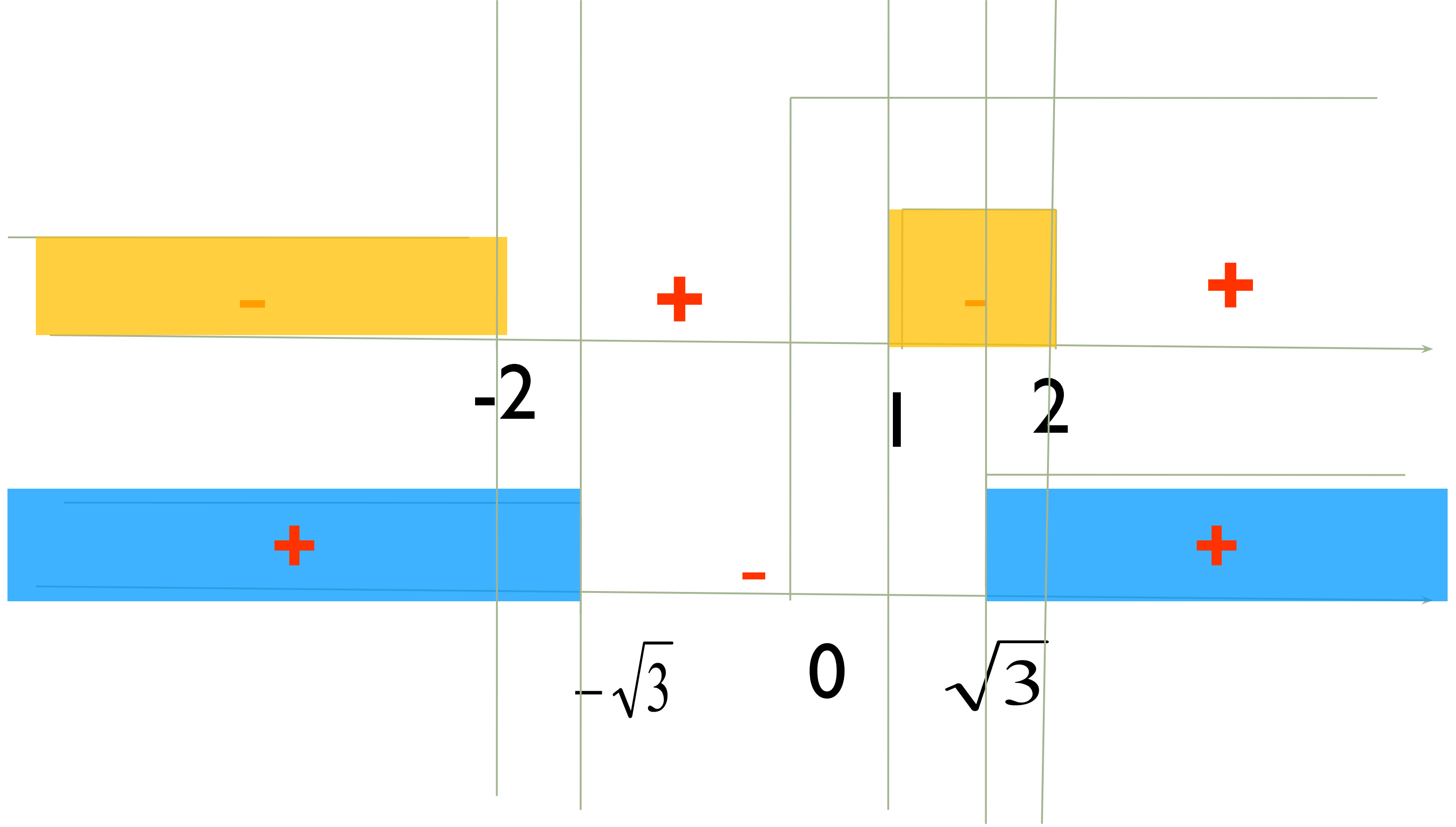
Ответ: $\left(-\infty;-2\right)\cup\left(-\sqrt{2};-1\right)\cup\left(1;\sqrt{2}\right)\cup\left(2;+\infty\right).$

$$\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x) > 0,$$

Решить неравенство: $\log_x(x^2 - 3) < 0$

Решение:

$$\begin{cases} (x-1)(x^2-3-1) < 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \\ x^2 - 3 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-1)(x-2)(x+2) < 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \\ (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) > 0 \end{cases}$$



$$Ответ:(\sqrt{3};2)$$

Решить неравенство:

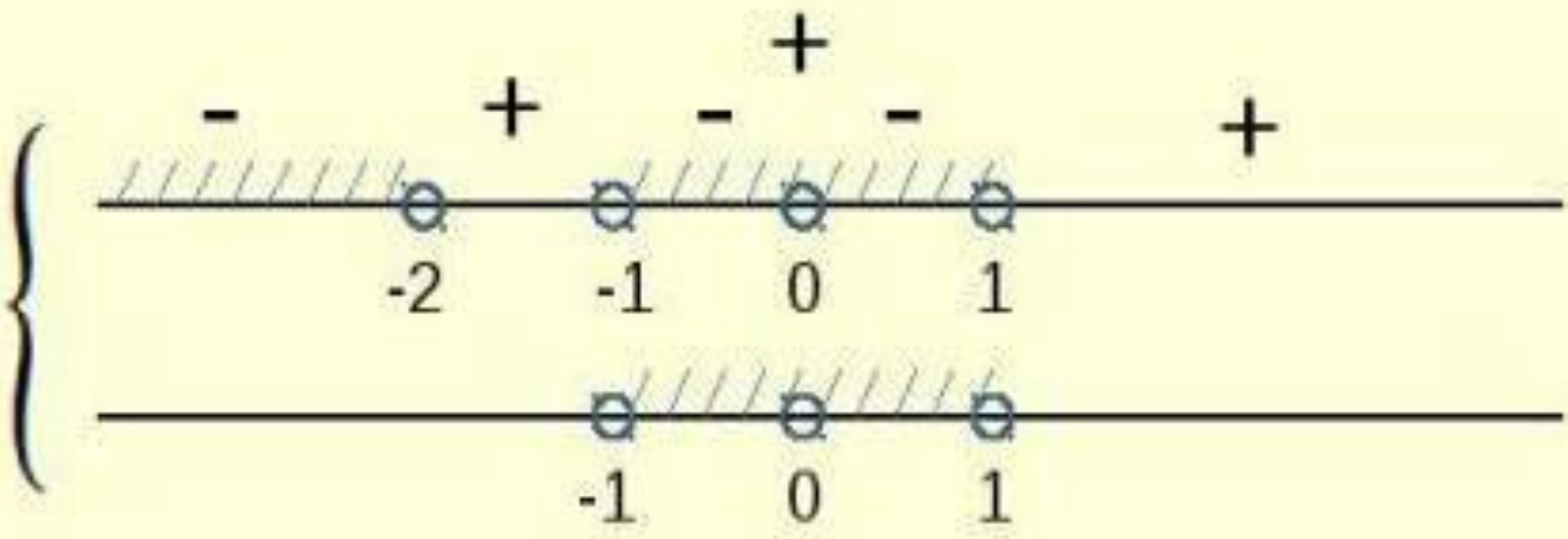
Решение:

$$\log_{x+3}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) > 0$$

$$\begin{cases} (x+3-1)\left(\dfrac{1+x^2}{1-x^2}-1\right) > 0; \\ x+3>0; \\ x+3 \neq 1; \\ \dfrac{1+x^2}{1-x^2} > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+2)\dfrac{2x^2}{1-x^2} > 0; \\ x > -3; \\ x \neq -2; \\ 1-x^2 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2(x+2)}{(x-1)(x+1)} < 0; \\ x > -3; \\ x \neq -2; \\ (x-1)(x+1) < 0; \end{cases}$$



ОТВЕТ: $(-1;0)\cup(0;1)$

$$6).\ \frac{\lg\left(5y^2-2y+1\right)}{\lg\left(4y^2-5y+1\right)^3} \le \frac{\log_{5^3} 7}{\log_5 7}$$

$$\frac{\lg\left(5y^2-2y+1\right)}{3\lg\left(4y^2-5y+1\right)} \le \frac{1}{3};\quad \frac{\lg\left(5y^2-2y+1\right)}{\lg\left(4y^2-5y+1\right)} \le 1;$$

$$\lg_{4y^2-5y+1}\left(5y^2-2y+1\right) \le 1$$

$$\lg_{4y^2-5y+1}\left(5y^2-2y+1\right) - \log_{4y^2-5y+1}\left(4y^2-5y+1\right) \le 0$$

$$\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x) > 0,$$

$$\lg_{4y^2-5y+1}\left(5y^2-2y+1\right) - \log_{4y^2-5y+1}\left(4y^2-5y+1\right) \le 0$$

$$\begin{cases} 4y^2-5y+1>0, \\ 4y^2-5y+1 \ne 1, \\ 5y^2-2y+1>0, \\ \left(4y^2-5y+1-1\right)\left(5y^2-2y+1-4y^2+5y-1\right) \le 0; \end{cases}$$

Ответ: $\left[-3,0\right) \cup \left(0;\frac{1}{4}\right) \cup \left(1;\frac{5}{4}\right).$

$$).\ \frac{9}{\left(\log_{2,1}(x-10)^2\right)\log_{1,9} x} \ge \frac{(x-1)^{\log_3(x-1)}}{9\left(\log_{2,1}(x-10)^2\right)\log_{1,9} x}.$$

ОДЗ
:

$$\begin{cases} x-1>0, \\ x>0, \\ x-10 \ne 0, \\ (x-10)^2 \ne 1; \end{cases} \begin{cases} x>1, \\ x>0, \\ x \ne 10, \\ x \ne 11, \\ x \ne 9 \end{cases} \begin{cases} x>1, \\ x \ne 10, \\ x \ne 11, \\ x \ne 9. \end{cases}$$

При: $x > 1$ $\log_{1,9} x > 0.$

Делим обе части неравенства на $\log_{1,9} x$

$$\frac{9}{\log_{2,1}(x-10)^2} \geq \frac{(x-1)^{\log_3(x-1)}}{9\log_{2,1}(x-10)^2};$$

$$\frac{81-(x-1)^{\log_3(x-1)}}{9\log_{2,1}(x-10)^2} \geq 0;$$

$$\frac{\log_3 3^4 - \log_3 (x-1)^{\log_3(x-1)}}{(2,1-1)\left((x-10)^2-1\right)} \geq 0;$$

$$\frac{4-\log_3(x-1)\log_3(x-1)}{(x-10)^2-1} \geq 0;$$

$$\frac{4-\log_3^2(x-1)}{x^2-20x+99}\geq 0;$$

$$\frac{(2-\log_3(x-1))(2+\log_3(x-1))}{(x-9)(x-11)}\geq 0.$$

Так как $\log_3 9+\log_3(x-1)=\log_3 9-\log_3(x-1)^{-1}$,

$$\frac{(3-1)(9-x+1)(3-1)\left(9-(x-1)^{-1}\right)}{(x-9)(x-11)}\geq 0;$$

$$\frac{4(10-x)\left(9-\dfrac{1}{x-1}\right)}{(x-9)(x-11)} \geq 0;$$

$$\frac{(10-x)(9x-10)}{(x-9)(x-11)(x-1)} \leq 0.$$

Ответ: $\left[\dfrac{10}{9};9\right) \cup (10;11).$

$$8).\begin{cases} 25^x - 30\cdot 5^x + 125 \ge 0, \\ \log_x(x-1)\cdot\log_x(x+1) \le 0. \end{cases}$$

$1).25^x - 30\cdot 5^x + 125 \ge 0.$ $\quad 5^x = t(t > 0)$

$t^2-30t+125 \ge 0$, $(t-5)(t-25) \ge 0$ $\quad \left[\begin{array}{l} 0 < t \le 5, \\ t \ge 25 \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} 0 < 5^x \le 5, \\ 5^x \ge 25; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x \le 1, \\ x \ge 2. \end{array}\right.$$

$2).\log_x(x-1)\cdot\log_x(x+1) \le 0.$

2). $\log_x (x-1)\cdot \log_x (x+1) \le 0.$

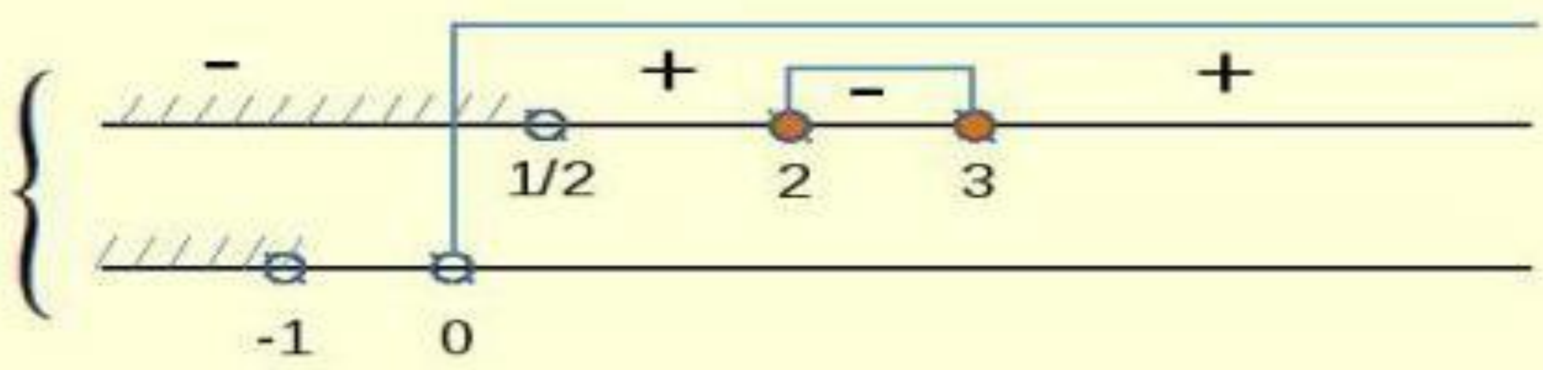
$$\begin{cases} x \,\square\, 0, \\ x \neq 1, \\ x \,\square\, 1, \\ x \,\square\, -1, \\ (x-1)(x-2)(x-1)x \le 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(1;2.\right]$$

. Общим решением совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x \le 1, \\ x \ge 2 \end{array}\right.$$ и системы $$\begin{cases} x \,\square\, 1, \\ x \le 2 \end{cases}$$ есть число 2.

Ответ: 2.

9). $\log_{2x}(2x^2 - 4x + 6) \le \log_{2x}(x^2 + x)$



Ответ:(0;0,5) U [2;3]

10) $\log_{0,5}(x-3)-\log_{0,5}(x+3)-\log_{\frac{x+3}{x-3}}2>0.$

.

Отве
т: $3<x<9$

$$11).\ \log_{\sqrt[3]{2x^2-7x+6}} \frac{x}{3} > 0$$

$$\frac{\lg x - \lg 3}{\frac{1}{3}(\lg(2x^2 - 7x + 6) - \lg 1)} > 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{(2x^2-7x+6)-1} > 0 \\ x > 0 \\ 2x^2-7x+6 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x-3}{(x-2{,}5)(x-1)} > 0 \\ x > 0 \\ (x-1{,}5)(x-2) > 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} 1 < x < 1{,}5 \\ 2 < x < 2{,}5 \\ x > 3 \end{array}\right.$$

$$\textit{Ответ}: (1;1{,}5) \cup (2;2{,}5) \cup (3;+\infty)$$

Дополнительная формула

Исходное выражение $(F(x))$	Выражение после замены $(G(x))$
$\log_{f(x)} h(x) - \log_{g(x)} h(x)$ $(f(x) \neq 1, g(x) \neq 1)$	$(f(x)-1)(g(x)-1)\times$ $\times(h(x)-1)(g(x)-f(x))$

Метод рационализации в показательных неравенствах

Исходное выражение $(F(x))$	Выражение после замены $(G(x))$
$h(x)^{p(x)} - h(x)^{q(x)}$	$(h(x) - 1)(p(x) - q(x))$
$h(x)^{p(x)} - 1$	$(h(x) - 1)p(x)$

$$(x^2-x-2)^{2x-6} \geq (x^2-x-2)^{3-4x}$$

$$\begin{cases} x^2-x-2>0 \\ x^2-x-2 \neq 1 \\ ((x^2-x-2)-1)((2x-6)-(3-4x)) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<-1 \end{array}\right. \\ x \neq \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \\ (x^2-x-3)(6x-9) \geq 0 \end{cases}$$

$x1 = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$, $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$, $x_3 = 1{,}5$

Так как $3 < \sqrt{13} < 4$, то $x_2 < x_3 < x_1$

С учётом ОДЗ получаем: $\left(\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}; -1\right) \cup \left(\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}; +\infty\right)$

$$\begin{cases} 9^x \geqslant 5 \cdot 3^x + 24, \\ (x+2)\log_{x-1}(x+1) \leqslant 0. \end{cases}$$

Ответ: $[\log_3 8; 2)$

Дополнительная формула

Исходное выражение $(F(x))$	Выражение после замены $(G(x))$
$f(x)^{p(x)} - g(x)^{p(x)}$	$(f(x) - g(x))p(x)$

Дополнительные

Исходное выражение $(F(x))$	Выражение после замены $(G(x))$
$\lvert p(x)\rvert - \lvert q(x)\rvert$	$(p(x) - q(x)) \times$ $\times (p(x) + q(x))$
$\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}$, здесь $f(x) \geqslant 0$ и $g(x) \geqslant 0$	$f(x) - g(x)$
$\lvert p(x)\rvert - \sqrt{g(x)}$, здесь $g(x) \geqslant 0$	$p^2(x) - g(x)$

Решите неравенство $\log_{\sqrt[3]{2x^2-7x+6}} \frac{x}{3} > 0.$

$$\frac{\lg x - \lg 3}{\frac{1}{3}\left(\lg(2x^2 - 7x + 6) - \lg 1\right)} > 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{(2x^2-7x+6)-1} > 0, \\ x > 0, \\ 2x^2 - 7x + 6 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x-3}{\left(x-\frac{5}{2}\right)(x-1)} > 0, \\ x > 0, \\ \left(x-\frac{3}{2}\right)(x-2) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \left(1; \frac{5}{2}\right) \cup (3; +\infty) > 0, \\ x > 0, \\ x \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right) \cup (2; +\infty) > 0 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} 1 < x < \frac{3}{2}, \\ 2 < x < \frac{5}{2}, \\ x > 3. \end{array}\right.$$

Ответ: $1 < x < \frac{3}{2}$, $2 < x < \frac{5}{2}$, $x > 3$.

В презентации использовались ресурсы:

Математика. Подготовка к ЕГЭ-2014: решаем задание С3 методом рационализации : учебно-методическое пособие/ Под ред. Ф. Ф. Лысенко,
С. Ю. Кулабухова. - Ростов-на-Дону: Легион, 2013. - 32 с. - (Готовимся к ЕГЭ.)