

# Лекция № 12

## Механические колебания

Алексей Викторович  
Гуденко

24/04/2012

# План лекции

- Свободные незатухающие гармонические колебания:
  1. Пружинный маятник
  2. Математический маятник
  3. Физический маятник
- Затухающие колебания с вязким трением.
- Вынужденные колебания. Резонанс.
- Параметрический резонанс.

# Колебательные процессы

- **Колебание** – изменение состояния системы по периодическому или почти периодическому закону: маятник часов, груз на пружине, гитарная струна, давление воздуха в звуковой волне.
- **Свободные (или собственные) колебания**: колебания в системе, предоставленной самой себе: шарик в лунке, маятник.
- **Вынужденные колебания** – колебания под действием **внешней** периодической силы: вибрации моста, качели.
- Автоколебания, параметрические колебания.

# Свободные незатухающие гармонические колебания.

## Пружинный маятник

- $m\ddot{x} = -kx \Leftrightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \Leftrightarrow$
- $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$  – дифференциальное уравнение гармонических колебаний ( $\omega_0^2 = k/m$ )
- $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$  – гармоническое колебание  
A – амплитуда колебаний  
 $\omega_0$  – циклическая частота  
 $\varphi_0$  – начальная фаза  
 $\omega_0 t + \varphi_0$  – фаза колебаний
- $T = 2\pi / \omega_0$  – период колебаний
- **Изохронность:**  $\omega_0$  – определяется только свойствами системы и не зависит от амплитуды.
- $F = -kx$  – квазиупругая возвращающая сила

# Скорость и ускорение при гармонических колебаниях

- Смещение:  
 $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$
- Скорость:  
 $v = x' = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi/2);$   
 $v_0 = \omega_0 A$  – амплитуда скорости;  
скорость опережает смещение  $x$  по фазе на  $\pi/2$ .
- Ускорение  
 $a = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi)$   
 $a_0 = \omega_0^2 A$  – амплитуда ускорения;  
ускорение в противофазе со смещением

# Энергия гармонических колебаний

- **Потенциальная энергия:**  
$$\Pi = kx^2/2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$
- **Кинетическая энергия:**  
$$K = mv^2/2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$
- **Полная энергия:**  
$$E = \Pi + K = \text{const} = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m v_0^2$$
- Для гармонических колебаний:  
$$\langle K \rangle = \langle \Pi \rangle = \frac{1}{2}E$$

## Энергетический метод для колебательных систем с одной степенью свободы

- $q$  – обобщённая координата (смещение, угол поворота)  
 $q'$  – обобщённая скорость (скорость смещения, угловая скорость)
- Уравнение энергии:  $\frac{1}{2} kq^2 + \frac{1}{2} \mu q'^2 = \text{const}$   
 $\Pi = \frac{1}{2} kq^2$  – потенциальная энергия  
 $K = \frac{1}{2} \mu q'^2$  – кинетическая энергия  
 $\omega^2 = k/\mu$  – циклическая частота  
 $k$  – эффективная жёсткость системы  
 $\mu$  – инерционность системы

# Математический маятник.

- Математический маятник – материальная точка на нерастяжимой лёгкой нити в поле тяжести Земли.
- Энергетический метод:  
 $\theta$  – угол отклонения нити от вертикали (обобщённая координата).
  1. Потенциальная энергия:  
$$П = mgL(1 - \cos\theta) \approx \frac{1}{2} mgL\theta^2 = \frac{1}{2} k\theta^2$$
 $k = mgL$  – эффективная жёсткость
  2. Кинетическая энергия:  
$$К = \frac{1}{2} m(L\theta')^2 = \frac{1}{2} mL^2 \theta'^2 = \frac{1}{2} \mu\theta'^2$$
 $\mu = \frac{1}{2} mL^2$  – инерционность системы
  3. Уравнение колебаний:  $\frac{1}{2}k\theta^2 + \frac{1}{2} \mu\theta'^2 = \text{const}$
  4.  $\omega_0^2 = k/\mu = g/L$ ;  $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi(L/g)^{1/2}$

# Ангармонический математический маятник

- $\frac{1}{2}k\theta^2 + \frac{1}{2} \mu\theta'^2 = \text{const} \Leftrightarrow \theta'' + \omega_0^2 \theta = 0$  –  
линеаризованное уравнение
- $\theta'' + \omega_0^2 \sin\theta = 0$  – нелинеаризованное  
**ангармоническое** уравнение;  
 $T = T_0(1 + \theta_0^2/16 + 9\theta_0^4/64 + \dots)$  – период  
зависит от амплитуды ( $\theta_0$  – амплитуда)

# Физический маятник

- Физический маятник - твёрдое тело, совершающее колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси.
- Энергетический метод:
  1. Потенциальная энергия:  
$$П = mga(1 - \cos\theta) \approx \frac{1}{2} mga\theta^2$$
  2. Кинетическая энергия:  
$$К = \frac{1}{2}I\theta'^2, I = I_c + ma^2$$
 - момент инерции относительно оси O
  3. Уравнение колебаний:  $\frac{1}{2}mga\theta^2 + \frac{1}{2} I\theta'^2 = \text{const}$
  4.  $\omega_0^2 = mga/I; T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi(I/mga)^{1/2}$

# Приведённая длина. Центр качания. Теорема Гюйгенса. Оборотный маятник и измерение $g$

- $L_{\text{пр}} = l/ma$  – длина математического маятника с тем же периодом колебаний
- $L_{\text{пр}} = l/ma = (I_c + ma^2)/ma = a + I_c/ma$
- Центр качания  $O'$  расположен на прямой  $OC$  расстоянии  $L_{\text{пр}}$  от точки подвеса  $O$
- **Теорема Гюйгенса**  
Точка подвеса и центр качания являются “сопряжёнными” точками: если маятник подвесить за центр качания, то его период не изменится.  
Доказательство:  $L_{\text{пр}} = a + I_c/ma \Leftrightarrow a^2 - L_{\text{пр}}a + I_c/m = 0 \Leftrightarrow a_1 + a_2 = L_{\text{пр}}$
- Обратный маятник и измерение  $g$ : экспериментально определяют расстояние между сопряжёнными точками  $OO' = L_{\text{пр}}$  и рассчитывают  $g$  по формуле:  $g = L_{\text{пр}}\omega_0^2$

# Крутильные колебания

- Диск на упругой нити:  
Момент упругих сил  $M_z = -k\theta$ ,  $k$  – коэффициент “крутильной” жёсткости
- $I_0\theta'' = -k\theta \Rightarrow \theta'' + (k/I_0)\theta = 0 \Rightarrow \omega_0^2 = k/I_0$

# Затухающие колебания.

- Сила вязкого трения  $F_{\text{тр}} = -\beta v$
- $m\ddot{x} = -kx - \beta v \Leftrightarrow m\ddot{x} + \beta v + kx = 0 \Leftrightarrow$   
 $x'' + 2\gamma x' + \omega_0^2 x = 0$  - дифференциальное уравнение колебаний с затуханием;  
 $\gamma = \beta/2m$  – коэффициент затухания  
 $\omega_0^2 = k/m$  – собственная частота
- если  $\gamma < \omega_0$ , то  
 $x = a_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi_0),$   
 $\omega = (\omega_0^2 - \gamma^2)^{1/2}$  – частота затухающих колебаний;  
 $a_0 e^{-\gamma t}$  – амплитуда затухающих колебаний

# Характеристики затухающих колебаний

- Время релаксации  $\tau$  – это время, за которое амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз:  
$$\tau = 1/\gamma$$
- Логарифмический декремент затухания:  
$$\lambda = \ln[a(t)/a(t + T)] = \gamma T = T/\tau$$
- Число колебаний, за которое амплитуда уменьшается в  $e$  раз  
$$N_e = \tau/T = 1/\lambda$$
- Слабое затухание  $N_e = \tau/T = \omega/2\pi\gamma \gg 1 \Leftrightarrow \gamma \ll \omega \approx \omega_0$

## Диссипация энергии. Добротность.

- $dE/dt = -\beta v^2$  - мощность силы трения
- $dE/dt = -\beta v^2 = -(2\beta/m) (mv^2/2) = -4\gamma K$
- Слабое затухание:  $\gamma \ll \omega_0 \Rightarrow \langle K \rangle = \frac{1}{2} E \Rightarrow$   
 $dE/dt = -2\gamma E \Rightarrow E = E_0 e^{-2\gamma t}$
- Убыль энергии за период  $\Delta E_T = 2\gamma T E$
- Убыль энергии при изменении фазы на 1 рад:  
 $\Delta E = \Delta E_T / 2\pi = (2\gamma/\omega) E_0$
- Добротность:  
 $Q = E/\Delta E = \omega/2\gamma = \pi N_e$

# Вынужденные колебания. Векторные диаграммы. Резонанс.

- $m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = F\cos\omega t \Leftrightarrow$
- $x'' + 2\gamma x' + \omega_0^2 x = f\cos\omega t, f = F/m$
- Вынужденные колебания ищем в виде:  
 $x = B\cos(\omega t - \varphi)$
- Векторная диаграмма:  
 $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$  проекция на ось ОХ радиус-вектора длиной  $A$ , вращающегося против часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega$  от начального положения  $\varphi_0$

# Вынужденные колебания. Векторные диаграммы. Резонанс.

- Из векторной диаграммы:
  - амплитуда  
$$B = f / ((\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2)^{1/2}$$
  - Фаза  
$$\operatorname{tg} \varphi = 2\gamma\omega / (\omega_0^2 - \omega^2)$$
- В резонансе (при малых  $\gamma$ )  
$$B_{\max} \approx B(\omega_0) = f / 2\gamma\omega_0 \Rightarrow B_{\max} / B_{\text{стат}} = \omega_0 / 2\gamma = Q$$
- Вблизи резонанса:  
$$B = B_{\max} \gamma / ((\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2)^{1/2} \Rightarrow \text{ширина резонансной кривой } \Delta\omega = 2\gamma$$

# Параметрический резонанс

- Параметрический резонанс - возбуждение незатухающих колебаний периодическим изменением параметров колебательной системы
- Пример: маятник с изменяющейся длиной (качели)
  1. Работа против тяжести:  
$$A_1 = mg\Delta h(1 - \cos \varphi_0) \approx \frac{1}{2} mg\Delta h\varphi_0^2 = \frac{1}{2} mv_0^2 \Delta h/L$$
  2. Работа против центробежной силы:  
$$A_2 = mv_0^2 \Delta h/L$$
  3. приращение энергии за период:  
$$\Delta E = 2(A_1 + A_2) = 6 \Delta h/L mv_0^2/2$$
  4.  $dE/dt = 6 \Delta h/L E/T = E/\tau \Rightarrow E = E_0 e^{t/\tau}$