Лекция

Тема: «Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования»

«

Давайте вспомним!

- 1) неопределённый интеграл – это **множество первообразных функций**

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

- 2) определённый интеграл – это **число** (например, площадь криволинейной трапеции)

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

- 3) Отрезок интегрирования $[a;b]$ **КОНЕЧЕН**

Подынтегральная функция $f(x)$ **НЕПРЕРЫВНА** на отрезке интегрирования

План

1. Несобственные интегралы I рода

- *определение*
- *геометрическая интерпретация*
- *вычисление*

2. Признаки сходимости несобственных интегралов I рода

3. Несобственные интегралы II рода

- *определение*
- *геометрическая интерпретация*
- *вычисление*
- ***признаки сходимости***

Несобственные интегралы I рода

<u>Определение 1:</u> несобственным интегралом от функции $f(x)$ в интервале $[a,+\infty)$

называется предел интеграла $\int_a^b f(x)dx$ при $b \to +\infty$

то есть $$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

Если указанный предел существует, то несобственный интеграл называется *сходящимся*, а если не существует, то *расходящимся*

<u>Определение 2:</u> несобственным интегралом от функции $f(x)$ в интервале $(-\infty;b]$

называется предел интеграла $\int_a^b f(x)dx$ при $a \to -\infty$,

то есть
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

Если указанный предел существует, то несобственный интеграл называется *сходящимся*, а если не существует, то *расходящимся*

- Если функция определена и непрерывна на всей числовой прямой, то может существовать ***несобственный интеграл данной функции с двумя бесконечными пределами интегрирования***, определяющийся формулой:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

- где с — произвольное число.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx$$

ЗАМЕЧАНИЕ

- ***Несобственный интеграл***

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

называют сходящимся, если существуют оба предела в правой части равенства, и расходящимся, если не существует хотя бы один из них

Несобственные интегралы (или интегралы Римана) I рода - это интегралы с бесконечными пределами интегрирования

$$I = \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

$$I = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

Вычисление несобственных интегралов

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(x)\Big|_{a}^{b} = \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a)$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} F(x)\Big|_{a}^{b} = F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{b\to+\infty\\ a\to-\infty}}\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\substack{b\to+\infty\\ a\to-\infty}} F(x)\Big|_{a}^{b} = \lim_{b\to+\infty} F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a)$$

Примеры.
Исследовать на сходимость интегралы:

1) $$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^{b} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\left(-e^{-x}\right)\Big|_0^b =$$

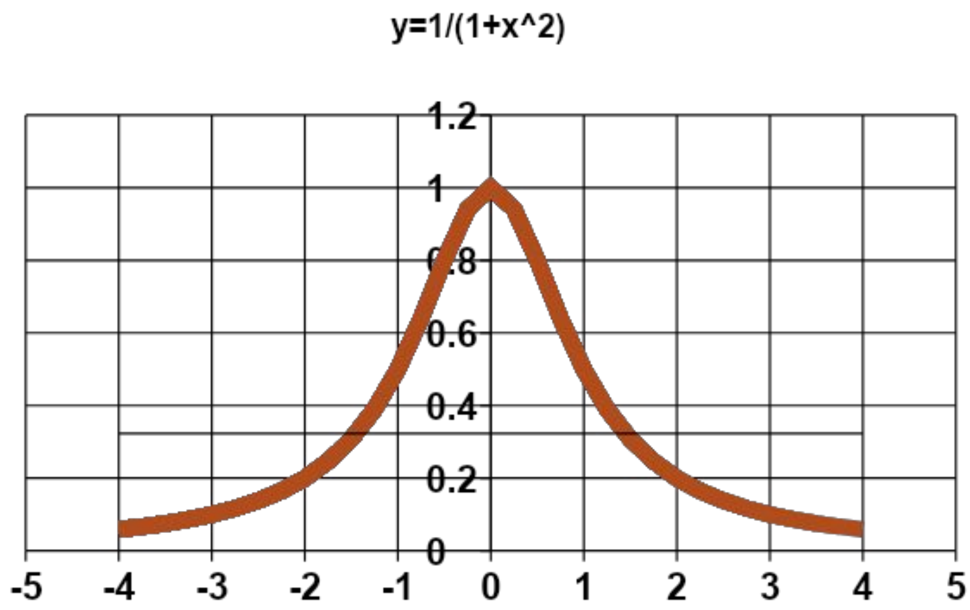
$$= -\left(\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^b} - \frac{1}{e^0}\right) = 1$$

Ответ: несобственный интеграл сходится и равен 1(или сходится к 1)

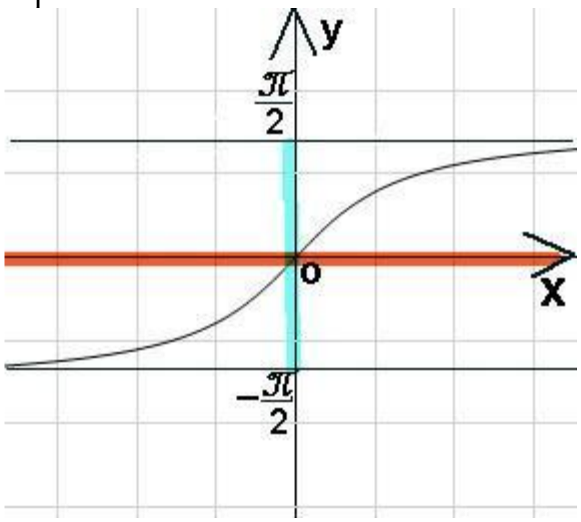
2) $$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}(\ln x)\Big|_{1}^{\infty}=\infty$$

Ответ: несобственный интеграл стремится к бесконечности или расходится

3)



$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\left(arctgx\right)\Big|_{-\infty}^{\infty}=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$$

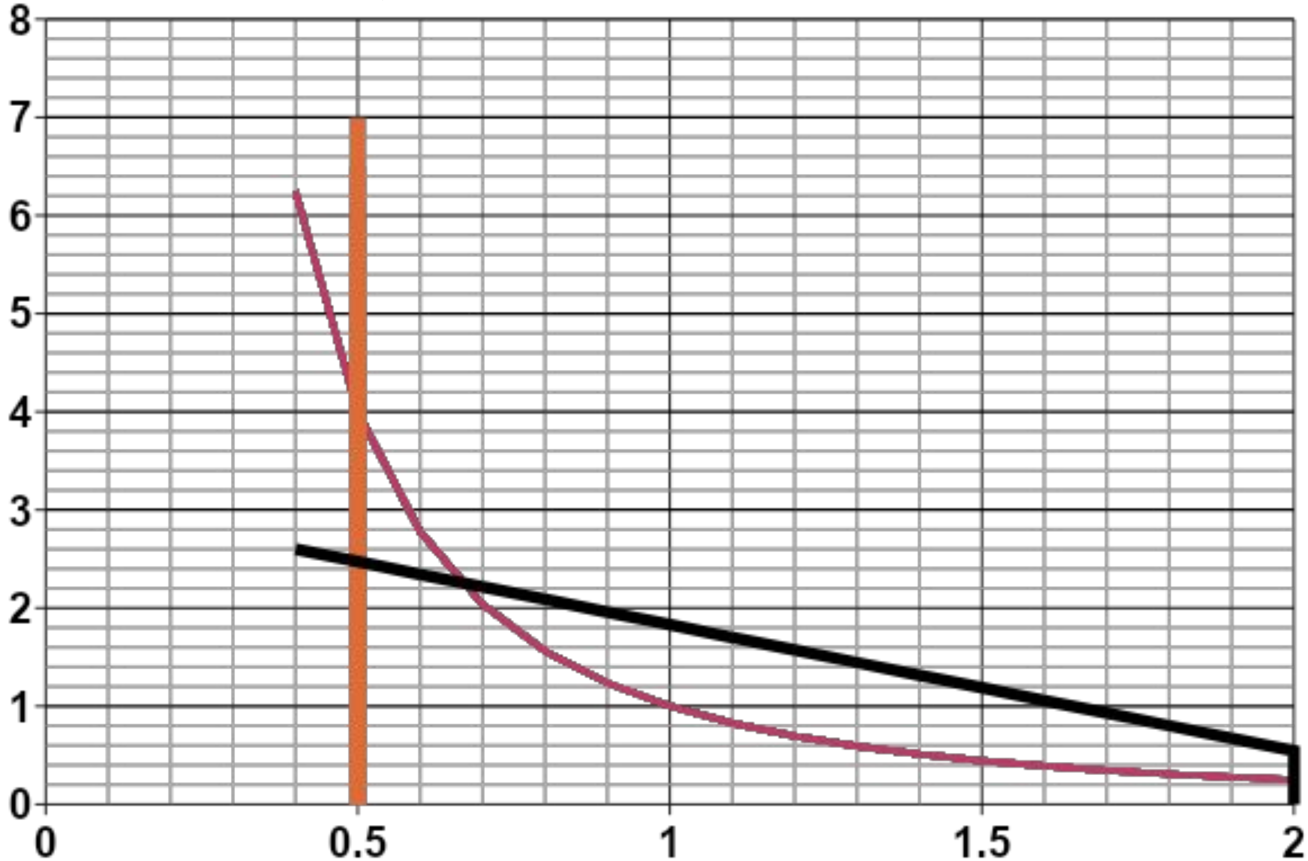


Геометрический смысл несобственного интеграла I рода

- Несобственный интеграл выражает площадь БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРАПЕЦИИ.

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx$$

Например, $\displaystyle\int_{0,5}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$



Вычислим эту площадь:

- По определению получаем:

$$\int_{0,5}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int_{0,5}^{b}\frac{dx}{x^2}$$

1) вычислим интеграл

$$\int_{0,5}^{b}\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\bigg|_{0,5}^{b}=\frac{1}{x}\bigg|_{b}^{0,5}=2-\frac{1}{b}$$

2) Вычислим предел

$$\lim_{b\to+\infty}\left(2-\frac{1}{b}\right)=2$$

Ответ: несобственный интеграл $\int\limits_{0,5}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=2$

т.е. сходится.

Площадь бесконечно длинной криволинейной трапеции равна 2

Признаки сходимости несобственных интегралов I рода

- Вопрос о сходимости несобственных интегралов усложняется, если первообразная функция неизвестна.
- В таких случаях иногда удается решить вопрос о сходимости, используя специальные **признаки,** которые не требуют знания первообразной

Признак сравнения 1.

Пусть подынтегральная функция $f(x)$ во всех точках интервала $[a,+\infty)$ неотрицательна: $f(x) \geq 0$

и для всех значений x

выполняется неравенство: $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$

Тогда:

1)если сходиться интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$, то сходится и

интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$

2)если расходиться интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, то расходится и

интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$

Пример

Решить вопрос о сходимости интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$

Решение

Так как при $x > 0$ $e^{-x^2} < e^{-x}$ и интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}\,dx$

сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

Подынтегральная функция чётная, поэтому сходится и

интеграл $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx$

Таким образом, заданный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ сходится.