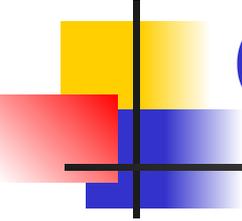


# Марковские процессы

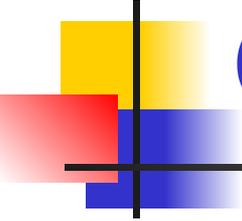


# Основные понятия

---

Случайный процесс (СП) это некоторый процесс или явление, поведение которого в течение времени и результат заранее предсказывать невозможно.

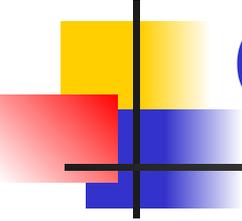
Случайный (стохастический) процесс характеризует изменение какой-либо случайной физической величины при ее наблюдении.



# Основные понятия

---

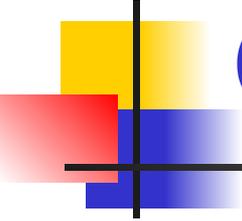
- 1) СП с непрерывным временем и непрерывным состоянием (пример: температура воздуха в некоторый момент времени, изменяется плавно в любой момент времени).



# Основные понятия

---

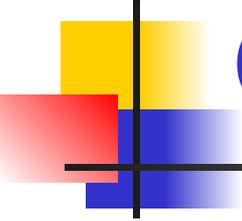
2) СП с непрерывным временем и дискретным состоянием (пример: число посетителей в магазине, изменяется кратно одному в любой момент времени).



# Основные понятия

---

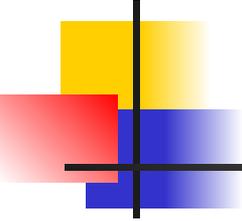
- 3) СП с дискретным временем и непрерывным состоянием (пример: динамика курса курс валюты, изменяется плавно в момент валютных торгов).



# Основные понятия

---

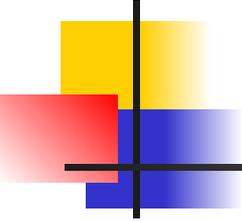
- СП с дискретным временем и дискретным состоянием (пример: число пассажиров в транспорте изменяется кратно одному и только в определенные моменты времени, на остановках).



# Марковские процессы

---

Случайный процесс, протекающий в системе, называется **марковским**, если он обладает отсутствием последствия. Т.е. если рассматривать текущее состояние процесса  $\xi(t_0)$  - как настоящее, совокупность возможных состояний  $\{\xi(s), s < t\}$  - как прошлое, совокупность возможных состояний  $\{\xi(u), u > t\}$  - как будущее, то для марковского процесса при фиксированном настоящем будущее не зависит от прошлого, а определяется лишь настоящим и не зависит от того, когда и как система пришла в это состояние.



# Марковские процессы

---

Марковские случайные процессы названы по имени выдающегося русского математика А.А.Маркова, впервые начавшего изучение вероятностной связи случайных величин и создавшего теорию, которую можно назвать "динамикой вероятностей". В дальнейшем основы этой теории явились исходной базой общей теории случайных процессов, а также таких важных прикладных наук, как теория диффузионных процессов, теория надежности, теория массового обслуживания и т.д.

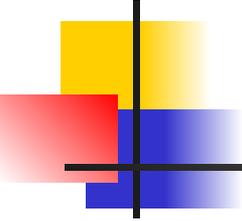
# Марков Андрей Андреевич



**1856-1922**

Русский математик.

Написал около 70 работ по теории чисел, теории приближения функций, теории вероятностей. Существенно расширил сферу применения закона больших чисел и центральной предельной теоремы. Является основоположником теории случайных процессов.



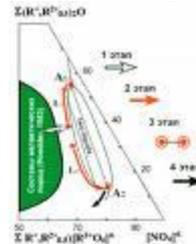
# Марковские процессы

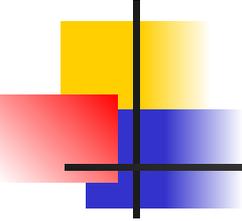
---

На практике марковские процессы в чистом виде обычно не встречаются. Но имеются процессы, для которых влиянием «предыстории» можно пренебречь, и при изучении таких процессов можно применять марковские модели. В настоящее время теория марковских процессов и ее приложения широко применяются в самых различных областях.

# Марковские процессы

- **Биология:** процессы рождения и гибели - популяции, мутации, эпидемии.
- **Физика:** радиоактивные распады, теория счетчиков элементарных частиц, процессы диффузии.
- **Химия:** теория следов в ядерных фотоэмульсиях, вероятностные модели химической кинетики.
- **Астрономия:** теория флуктуационной яркости млечного пути.
- **Теория массового обслуживания:** телефонные станции, ремонтные мастерские, билетные кассы, справочные бюро, станочные и другие технологические системы, системы управления гибких производственных систем, обработка информации серверами.





# Марковские процессы

---

Пусть в настоящий момент  $t_0$  система находится в определенном состоянии  $S_0$ . Мы знаем характеристики состояния системы в настоящем и все, что было при  $t < t_0$  (предысторию процесса). Можем ли мы предсказать будущее, т.е. что будет при  $t > t_0$ ?

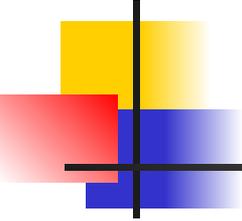
В точности – нет, но какие-то вероятностные характеристики процесса в будущем найти можно. Например, вероятность того, что через некоторое время  $\tau$  система  $S$  окажется в состоянии  $S_1$  или останется в состоянии  $S_0$  и т.д.

# Марковские процессы. Пример.

Система  $S$  – группа самолетов, участвующих в воздушном бою. Пусть  $x$  – количество «красных» самолетов,  $y$  – количество «синих» самолетов. К моменту времени  $t_0$  количество сохранившихся (не сбитых) самолетов соответственно –  $x_0, y_0$ .



Нас интересует вероятность того, что в момент времени  $t_0 + \tau$  численный перевес будет на стороне «красных». Эта вероятность зависит от того, в каком состоянии находилась система в момент времени  $t_0$ , а не от того, когда и в какой последовательности погибали сбитые до момента  $t_0$  самолеты.



# Дискретные цепи Маркова

---

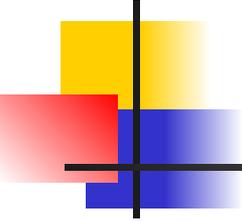
Марковский процесс с конечным или счетным числом состояний и моментов времени называется **дискретной цепью Маркова**. Переходы из состояния в состояние возможны только в целочисленные моменты времени.

## Дискретные цепи Маркова. Пример

Предположим, что речь идет о последовательных бросаниях монеты при игре "в орлянку"; монета бросается в условные моменты времени  $t = 0, 1, \dots$  и на каждом шаге игрок может выиграть  $\pm 1$  с одинаковой вероятностью  $1/2$ , таким образом в момент  $t$  его суммарный выигрыш есть случайная величина  $\xi(t)$  с возможными значениями  $j = 0, \pm 1, \dots$ .



При условии, что  $\xi(t) = k$ , на следующем шаге выигрыш будет уже равен  $\xi(t+1) = k \pm 1$ , принимая значения  $j = k \pm 1$  с одинаковой вероятностью  $1/2$ . Можно сказать, что здесь с соответствующей вероятностью происходит переход из состояния  $\xi(t) = k$  в состояние  $\xi(t+1) = k \pm 1$ .



# Дискретные цепи Маркова

---

Обобщая этот пример, можно представить себе систему со счетным числом возможных состояний, которая с течением дискретного времени  $t = 0, 1, \dots$  случайно переходит из состояния в состояние.

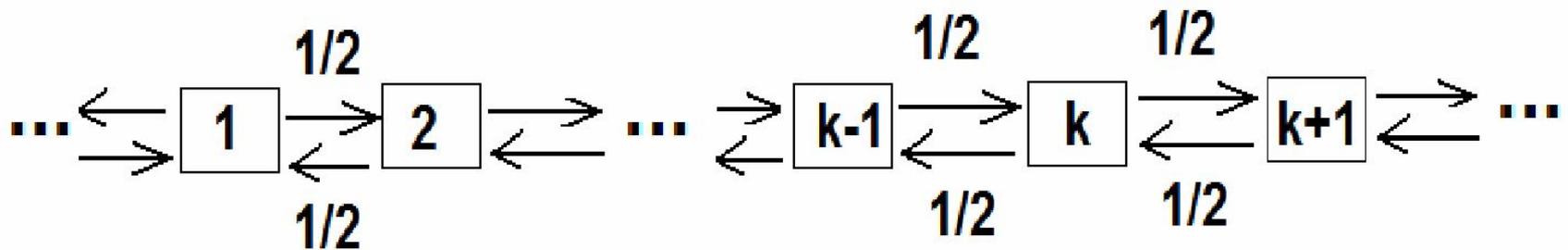
Пусть  $\xi(t)$  есть ее положение в момент  $t$  в результате цепочки случайных переходов

$$\xi(0) \rightarrow \xi(1) \rightarrow \dots \rightarrow \xi(t) \rightarrow \xi(t+1) \rightarrow \dots \rightarrow \dots$$

## Дискретные цепи Маркова

При анализе случайных процессов с дискретными состояниями удобно пользоваться геометрической схемой – **графом состояний**. Вершины графа – состояния системы. Дуги графа – возможные переходы из состояния в состояние.

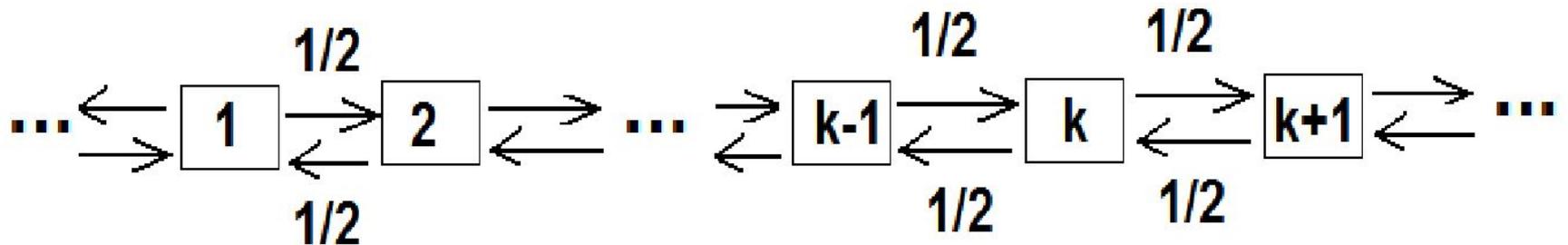
Игра «в орлянку».

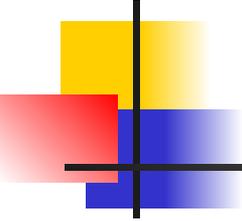


## Дискретные цепи Маркова

При анализе случайных процессов с дискретными состояниями удобно пользоваться геометрической схемой – **графом состояний**. Вершины графа – состояния системы. Дуги графа – возможные переходы из состояния в состояние.

Игра «в орлянку».





# Дискретные цепи Маркова

---

Число  $p_{ij} = P\{\xi(t+1) = j | \xi(t) = i\}$  называется **вероятностью перехода** системы из состояния  $i$  в состояние  $j$  за один шаг в момент времени  $t \geq 1$ .

Если переходная вероятность не зависит от  $t$ , то **цепь Маркова** называется **однородной**.

# Дискретные цепи Маркова

Матрица  $P$ , элементами которой являются вероятности перехода  $p_{ij}$ , называется **переходной матрицей**:

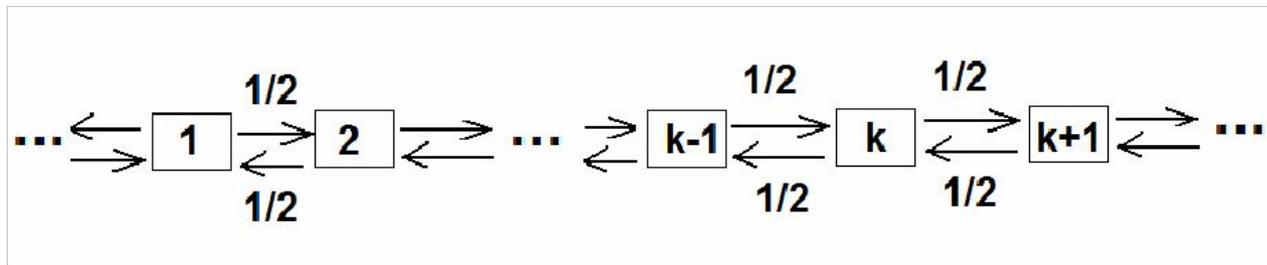
$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & \dots & p_{2n} \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

Она является **стохастической**, т.е.

$$\sum_i p_{ij} = 1; \quad \forall p_{ij} \geq 0.$$

# Дискретные цепи Маркова. Пример

## Матрица переходов для игры «в орлянку»

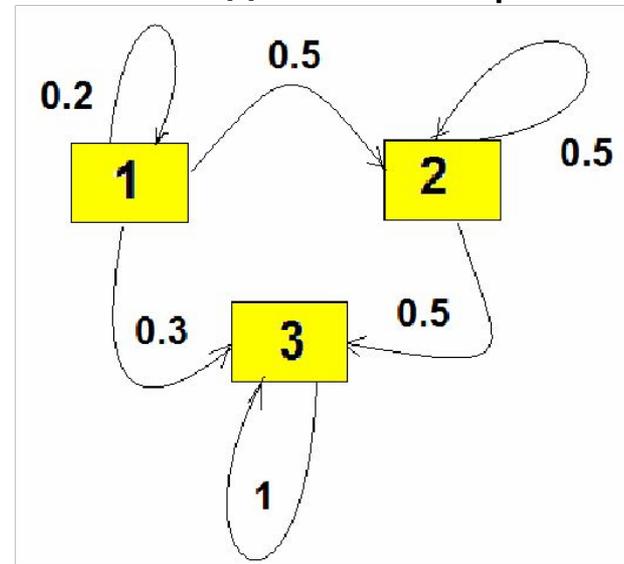


...	$k-2$	$k-1$	$k$	$k+1$	$k+2$	...
$k-2$	0	$1/2$	0	0	0	
$k-1$	$1/2$	0	$1/2$	0	0	
$k$	0	$1/2$	0	$1/2$	0	
$k+1$	0	0	$1/2$	0	$1/2$	
$k+2$	0	0	0	$1/2$	0	

## Дискретные цепи Маркова. Пример

Садовник в результате химического анализа почвы оценивает ее состояние одним из трех чисел — хорошее (1), удовлетворительное (2) или плохое (3). В результате наблюдений на протяжении многих лет садовник заметил, что продуктивность почвы в текущем году зависит только от ее состояния в предыдущем году. Поэтому вероятности перехода почвы из одного состояния в другое можно представить следующей цепью Маркова с матрицей  $P_1$ :

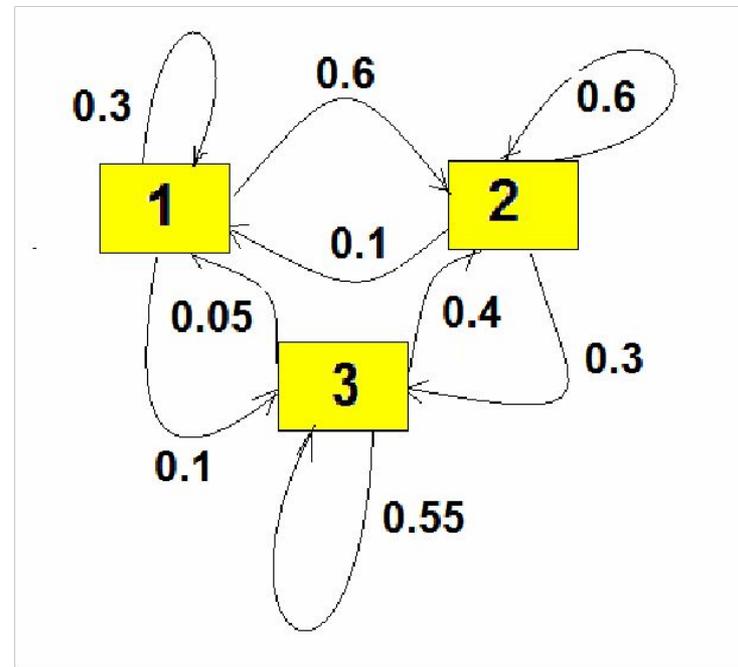
0.20	0.50	0.30
0.00	0.50	0.50
0.00	0.00	1.00



## Дискретные цепи Маркова. Пример

Однако в результате агротехнических мероприятий садовник может изменить переходные вероятности в матрице P1. Тогда матрица P1 заменится на матрицу P2:

0.30	0.60	0.10
0.10	0.60	0.30
0.05	0.40	0.55



# Марковские процессы с непрерывным временем

Процесс называется **процессом с непрерывным временем**, если моменты возможных переходов из состояния в состояние не фиксированы заранее, а неопределенны, случайны и могут произойти в любой момент.

**Пример.** Технологическая система  $S$  состоит из двух устройств, каждое из которых в случайный момент времени может выйти из строя, после чего мгновенно начинается ремонт узла, тоже продолжающийся заранее неизвестное, случайное время.

Возможны следующие состояния системы:

$S_0$  - оба устройства исправны;

$S_1$  - первое устройство ремонтируется, второе исправно;

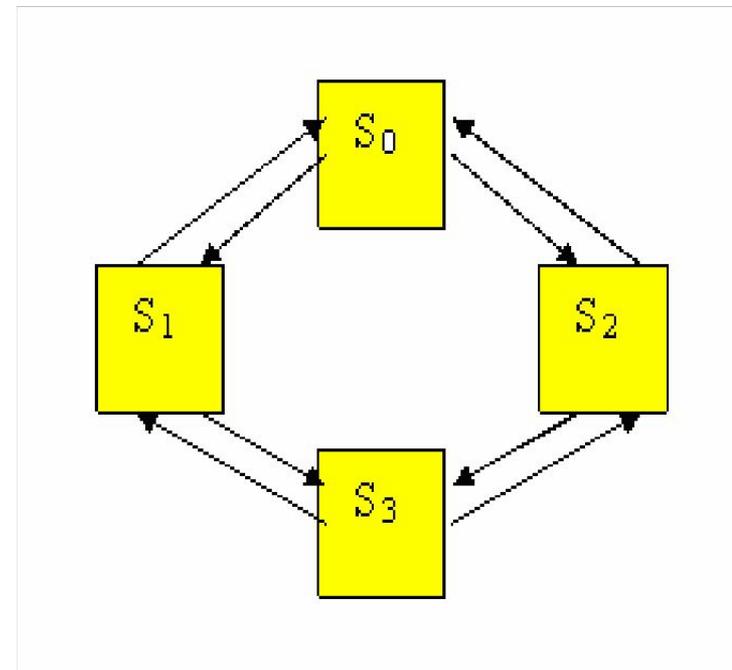
$S_2$  - второе устройство ремонтируется, первое исправно;

$S_3$  - оба устройства ремонтируются.

# Марковские процессы с непрерывным временем

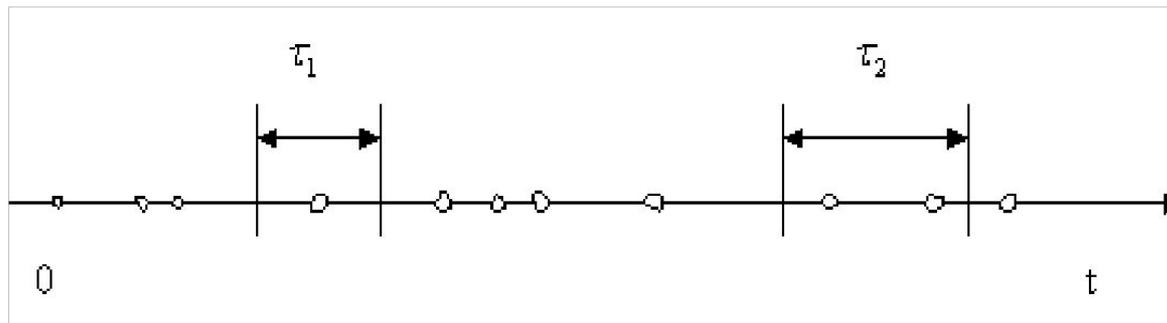
Переходы системы  $S$  из состояния в состояние происходят практически мгновенно, в случайные моменты выхода из строя того или иного устройства или окончания ремонта.

Вероятностью одновременного выхода из строя обоих устройств можно пренебречь.

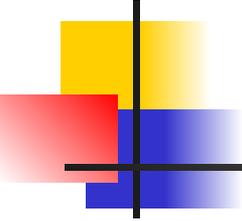


# Потоки событий

**Поток событий** – последовательность однородных событий, следующих одно за другим в какие-то случайные моменты времени.



**Интенсивность потока событий**  $\lambda$  – это среднее число событий, приходящееся на единицу времени.

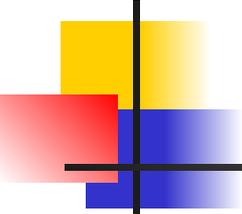


## Потоки событий

---

Поток событий называется **стационарным**, если его вероятностные характеристики не зависят от времени.

В частности, интенсивность  $\lambda$  стационарного потока постоянна. Поток событий неизбежно имеет сгущения или разрежения, но они не носят закономерного характера, и среднее число событий, приходящееся на единицу времени, постоянно и от времени не зависит.

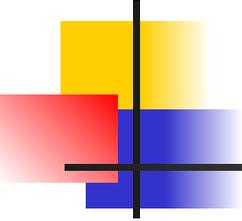


## Потоки событий

---

Поток событий называется **поток без последствий**, если для любых двух непересекающихся участков времени  $\tau_1$  и  $\tau_2$  число событий, попадающих на один из них, не зависит от того, сколько событий попало на другой. Другими словами, это означает, что события, образующие поток, появляются в те или иные моменты времени независимо друг от друга и вызваны каждое своими собственными причинами.

Поток событий называется **ординарным**, если вероятность появления на элементарном участке  $\Delta t$  двух и более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью появления одного события, т.е. события в нем появляются поодиночке, а не группами по несколько сразу

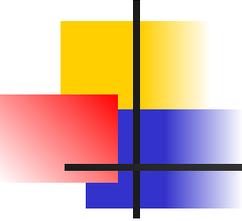


## Потоки событий

---

Поток событий называется **простейшим (или стационарным пуассоновским)**, если он обладает сразу тремя свойствами: 1) стационарен, 2) ординарен, 3) не имеет последствий.

Простейший поток имеет наиболее простое математическое описание. Он играет среди потоков такую же особую роль, как и закон нормального распределения среди других законов распределения. А именно, при наложении достаточно большого числа независимых, стационарных и ординарных потоков (сравнимых между собой по интенсивности) получается поток, близкий к простейшему.



## Потоки событий

---

Для простейшего потока с интенсивностью  $\lambda$  интервал времени  $T$  между соседними событиями имеет показательное распределение с плотностью

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$

Для случайной величины  $T$ , имеющей показательное распределение, математическое ожидание есть величина, обратная параметру  $\lambda$ .

# Марковские процессы с непрерывным временем

---

Рассматривая процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем, можно считать, что все **переходы** системы  $S$  из состояния в состояние **происходят под действием простейших потоков событий** (потоков вызовов, потоков отказов, потоков восстановлений и т.д.).

Если все потоки событий, переводящие систему  $S$  из состояния в состояние простейшие, то процесс, протекающий в системе, будет марковским.

# Марковские процессы с непрерывным временем

Пусть на систему, находящуюся в состоянии  $S_i$ , действует простейший поток событий. Как только появится первое событие этого потока, происходит «перескок» системы из состояния  $S_i$  в состояние  $S_j$ .

$\lambda_{ij}$  - интенсивность потока событий, переводящий систему из состояния  $S_i$  в  $S_j$ .

## Марковские процессы с непрерывным временем

Пусть рассматриваемая система  $S$  имеет  $N$  возможных состояний  $S_1, S_2, \dots, S_N$ . Вероятность  $p_{ij}(t)$  является **вероятностью перехода** из состояния  $i$  в состояние  $j$  за время  $t$ .

**Вероятность  $i$ -го состояния**  $p_i(t)$  - это вероятность того, что в момент времени  $t$  система будет находиться в состоянии  $S_i$ . Очевидно, что для любого момента времени сумма

всех вероятностей состояний равна единице: 
$$\sum_{i=1}^N p_i(t) = 1.$$

# Марковские процессы с непрерывным временем

Для нахождения всех вероятностей состояний  $p_i(t)$  как функций времени составляются и решаются **дифференциальные уравнения Колмогорова** – особого вида уравнения, в которых неизвестными функциями являются вероятности состояний.

Для переходных вероятностей:

$$p'_{ij}(t) = \sum_k p_{ik}(t) \lambda_{kj}$$

Для безусловных вероятностей:

$$p'_j(t) = \sum_k p_k(t) \lambda_{kj}$$

# Колмогоров Андрей Николаевич



**1903-1987**

Великий русский  
математик.

# Марковские процессы с непрерывным временем

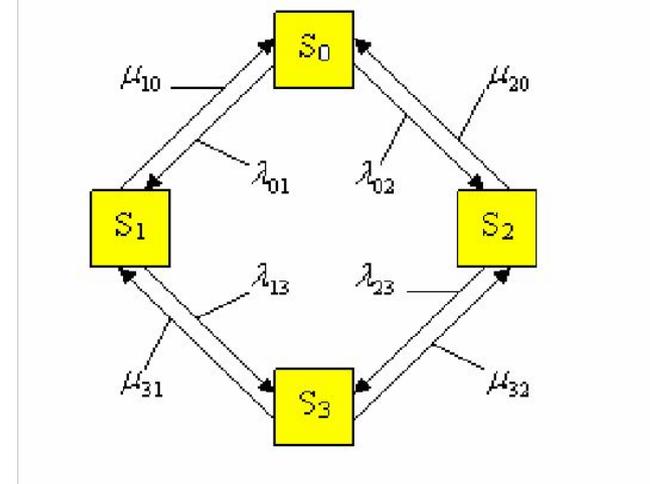
$\lambda_{ij}$  - интенсивности потока отказов;  $\mu_{ij}$

- интенсивности потока восстановлений.

Пусть система находится в состоянии  $S_0$ . В состояние  $S_1$  ее переводит поток отказов первого устройства. Его интенсивность равна  $\lambda_{01} = 1/T_{ср.р.аб.1}, \text{ед.времени}^{-1}$ , где  $T_{ср.р.аб.1}$  - среднее время безотказной работы устройства.

Из состояния  $S_1$  в  $S_0$  систему переводит поток восстановлений первого устройства. Его интенсивность равна  $\mu_{10} = 1/T_{ср.рем.1}, \text{ед.времени}^{-1}$ , где  $T_{ср.рем.1}$  - среднее время ремонта первого станка.

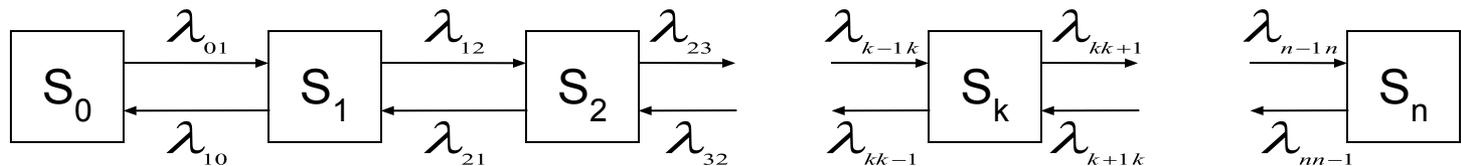
Аналогично вычисляются интенсивности потоков событий, переводящих систему по всем дугам графа.



# Случайные процессы

## Процесс гибели и размножения

Класс случайных процессов с графом состояний:



Переходы осуществляются только в соседние состояния!

Предположение: Все потоки событий случайного процесса являются простейшими.

# Случайные процессы

СЛАУ для предельных вероятностей:

---

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{01} p_0 = \lambda_{10} p_1 \\ \lambda_{12} p_1 = \lambda_{21} p_2 \\ \dots\dots\dots \\ \lambda_{k-1k} p_{k-1} = \lambda_{kk-1} p_k \\ \dots\dots\dots \\ \lambda_{n-1n} p_{n-1} = \lambda_{nn-1} p_n \end{array} \right.$$

Нормировочное условие:  $p_0 + p_1 + \dots + p_n = 1$

# Случайные процессы

Решение СЛАУ:

$$p_0 = \left( 1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12} \lambda_{01}}{\lambda_{21} \lambda_{10}} + \dots + \frac{\lambda_{n-1n} \lambda_{12} \lambda_{01}}{\lambda_{nn-1} \lambda_{21} \lambda_{10}} \right)^{-1};$$

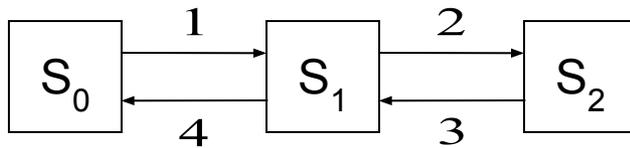
$$p_1 = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} p_0; \quad p_2 = \frac{\lambda_{12} \lambda_{01}}{\lambda_{21} \lambda_{10}} p_0; \quad p_n = \frac{\lambda_{n-1n} \lambda_{12} \lambda_{01}}{\lambda_{nn-1} \lambda_{21} \lambda_{10}} p_0;$$

Числители в коэффициентах при  $p_0$  представляют произведение всех интенсивностей потоков слева направо до состояния  $S_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ), а знаменатели - произведение всех интенсивностей потоков справа налево до состояния  $S_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ).

## Случайные процессы

### Пример:

Задан граф состояний системы  $S$ :



Найти предельные вероятности системы  $S$ .

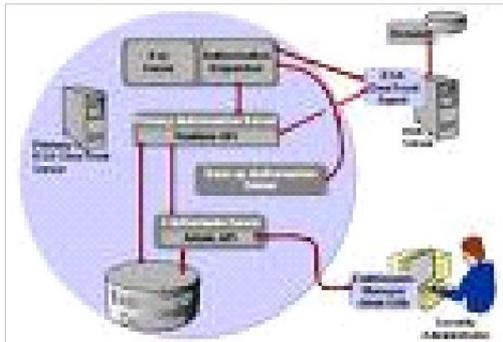
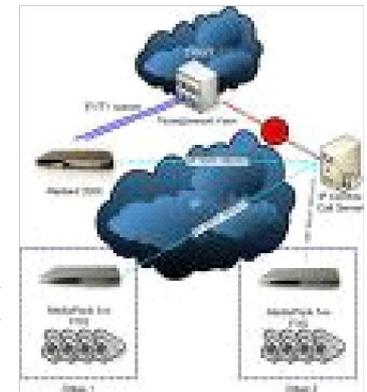
Решение:

$$p_0 = \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 4}\right)^{-1} = 0.706 \quad p_1 = \frac{1}{4} \cdot 0.706 = 0.176 \quad p_2 = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 4} \cdot 0.706 = 0.118$$

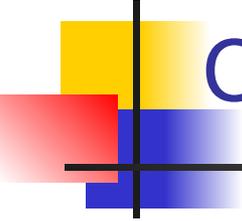
Таким образом, в стационарном режиме система  $S$  находится в состоянии  $S_0$  – 70,6% времени; в состоянии  $S_1$  – 17,6% времени; в состоянии  $S_2$  – 11,8% времени.

# Системы массового обслуживания

Примеры систем массового обслуживания (СМО): телефонные станции, ремонтные мастерские, билетные кассы, справочные бюро, станочные и другие технологические системы,



управления гибких производственных систем, обработка информации серверами и т.д.



# Системы массового обслуживания

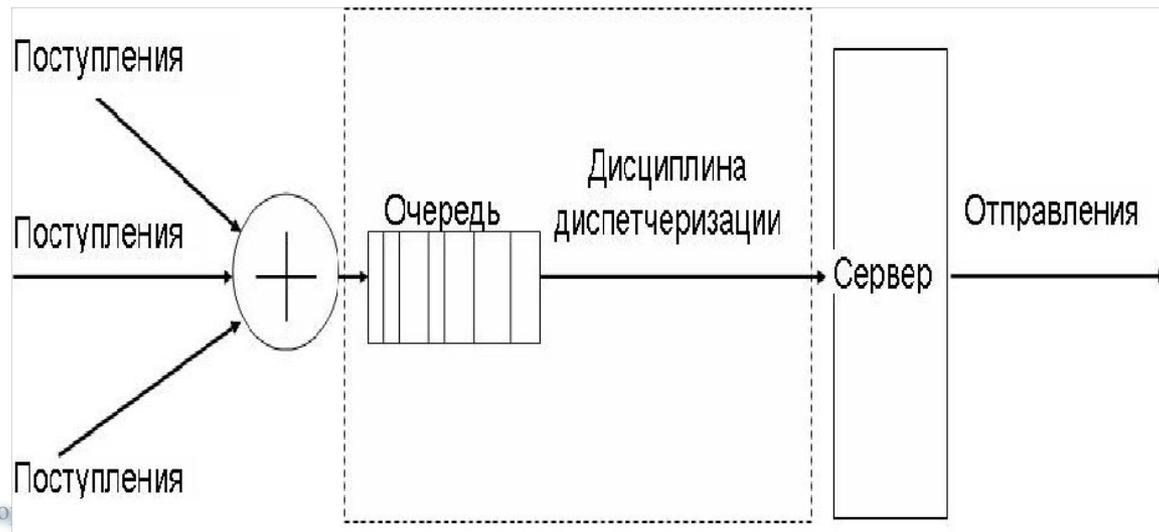
---

СМО состоит из какого – то количества обслуживающих единиц, которые называются **каналами обслуживания** (это станки, роботы, линии связи, кассиры и т.д.). Всякая СМО предназначена для обслуживания **потока заявок** (требований), поступающих в случайные моменты времени.

**Обслуживание заявки** продолжается случайное время, после чего канал освобождается и готов к приему следующей заявки.

# Системы массового обслуживания

Процесс работы СМО – случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем. Состояние СМО меняется скачком в моменты появления каких-то событий (прихода новой заявки, окончания обслуживания, момента, когда заявка, которой надоело ждать, покидает очередь).



# Системы массового обслуживания

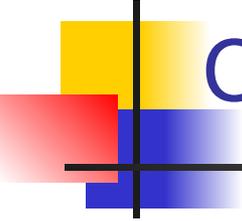
## Классификация систем массового обслуживания

1. СМО с отказами;
2. СМО с очередью.

**В СМО с отказами** заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, получает отказ, покидает СМО и в дальнейшем не обслуживается.

**В СМО с очередью** заявка, пришедшая в момент, когда все каналы заняты, не уходит, а становится в очередь и ожидает возможности быть обслуженной.

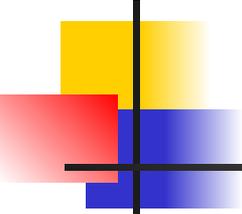
**СМО с очередями подразделяются** на разные виды в зависимости от того, как организована очередь – **ограничена или не ограничена**. Ограничения могут касаться как длины очереди, так и времени ожидания, «дисциплины обслуживания».



# Системы массового обслуживания

---

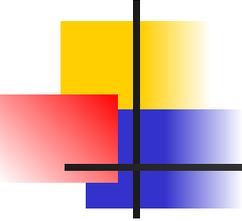
**Предмет теории массового обслуживания** – построение математических моделей, связывающих заданные условия работы СМО (число каналов, их производительность, правила работы, характер потока заявок) с интересующими нас характеристиками – показателями эффективности СМО. Эти показатели описывают способность СМО справляться с потоком заявок. Ими могут быть: среднее число заявок, обслуживаемых СМО в единицу времени; среднее число занятых каналов; среднее число заявок в очереди; среднее время ожидания обслуживания и т.д.



---

СПАСИБО  
ЗА ВНИМАНИЕ !!!





## Построить граф переходов

---

<b>0.30</b>	<b>0.70</b>	<b>0.0</b>
<b>0.10</b>	<b>0.60</b>	<b>0.30</b>
<b>0.50</b>	<b>0.50</b>	<b>0.0</b>