Неопределенный интеграл и его свойства

Иога́нн Берну́лли

(27.07.1667-1.01.1748) — швейцарский математик и механик,

в 1696 году предложил термин «интеграл»

Леона́рд Э́йлер (15.04.1707 — 7.09.1783) — швейцарский, немецкий и российский математик и механик, ввёл обозначение неопределённого интеграла

Интегрирование - операция отыскания функции по её производной.

Определение. Функция $F(x)$ называется **первообразной** функции $f(x)$, определенной на некотором промежутке, если $F'(x)=f(x)$ для каждого x из этого промежутка.

Очевидно, если $F(x)$- первообразная функции $f(x)$, то $F(x)+C$, где C - некоторая постоянная, также является первообразной функции $f(x)$.

Если $F(x)$ есть какая-либо первообразная функции $f(x)$, то всякая функция вида $\Phi(x)=F(x)+C$ также является первообразной функции $f(x)$ и всякая первообразная представима в таком виде.

Определение. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$, определенных на некотором промежутке, называется **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ на этом промежутке и обозначается $\int f(x)dx$.

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C}$$ - неопределённый интеграл

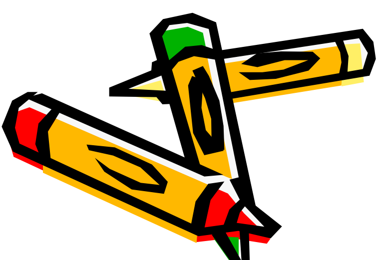
где $\int$ - знак интеграла,

f(x) - подынтегральная функция,

f(x)dx - подынтегральное выражение,

F(x) - первообразная функции,

C - постоянная интегрирования



Свойства неопределённого интеграла:

1. $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

2. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

3. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

Таблица неопределенных интегралов:

1. $\int dx = x + C$.

2. $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C, (a \neq -1)$.

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.

5. $\int e^x dx = e^x + C$.

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.

10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$.

Таблица неопределенных интегралов:

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$.

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$.

14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

15. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$.

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a}\right| + C$.

Методы интегрирования:

1. **Непосредственное интегрирование**
(на основании формул интегрирования и свойств неопределённого интегрирования).

2. **Замена переменных**
(интегрирование через вспомогательную переменную).

3. **Интегрирование по частям:**

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Пример. Вычислить $\int\left(x^2+3x^3+x+1\right)dx$.

Решение. Так как под знаком интеграла находится сумма четырех слагаемых, то раскладываем интеграл на сумму четырех интегралов:

$$\int\left(x^2+3x^3+x+1\right)dx=\int x^2dx+3\int x^3dx+\int xdx+\int dx=.$$

$$=\frac{x^3}{3}+3\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+x+C$$

Пример. Вычислить $\int \sqrt{2x-1}\,dx$

Решение.

$$\int \sqrt{2x-1}\,dx = \left| \begin{array}{l} 2x-1=t \\ 2dx=dt \\ dx=\dfrac{dt}{2} \end{array} \right| = \int \sqrt{t}\,\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}(2x-1)^{\frac{3}{2}} + C$$

Пример. Вычислить $\int x\cos x dx$.

Решение.

$$\int x\cos x dx = \left| \begin{matrix} u = x, du = dx \\ dv = \cos x dx, v = \sin x \end{matrix} \right| =$$

$$x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C .$$

Пример. Вычислить

$$\int x\ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, du = \dfrac{dx}{x} \\ \\ dv = xdx, v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + C\,.$$

Практическая работа

Задание 1

1 $\int\left(x^3-3x^2+\frac{6}{\sqrt{x}}-9\sqrt{x}\right)dx$	2 $\int(9+x^2)\cdot(x^3-3)\,dx$	3 $\int\left(\frac{1}{9+x^2}-5^x+2\sin x\right)dx$

4 $\int(6x-x^2)\cdot(x^2-9x)\,dx$	5 $\int(8-x^2)\cdot(x^2+2x)\,dx$	6 $\int\left(\frac{1}{9-x^2}-3^x+3\cos x\right)dx$
7 $\int\left(\frac{4}{x^3}-\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{4}x^4+x\right)dx$	8 $\int\left(\frac{12}{x^5}+\frac{1}{2}\sqrt{x}+3x-1\right)dx$	9 $\int\left(\frac{1}{\sqrt{25+x^2}}-5^x+3\sin x\right)dx$
10 $\int(9+2x^2)\cdot(x^3-4x)\,dx$	11 $\int\left(\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}-2\sin x+e^x\right)dx$	12 $\int\left(\frac{3}{\sqrt{3x^2-12}}-e^x+\frac{2}{\sin^2 x}\right)dx$
13 $\int\left(\frac{5}{x^6}+\sqrt[3]{x^2}+5x^4+1\right)dx$	14 $\int\left(\sqrt[5]{x}+\frac{5}{x^4}+6x^5+1\right)dx$	15 $\int\left(3x^5-\frac{6}{x^2}+x-7\right)dx$
16 $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-16}}-e^x+\frac{3}{\cos^2 x}\right)dx$	17 $\int\left(\frac{1}{\sqrt{5x^2-5}}-4^x+\frac{7}{\cos^2 x}\right)dx$	18 $\int\left(\frac{1}{\sqrt{16+x^2}}-7^x+\frac{3}{\sin^2 x}\right)dx$
19 $\int\left(\frac{3}{x^7}+6\sqrt[3]{x}+8x^3+5\right)dx$	20 $\int\left(\frac{8}{x^3}-\sqrt[3]{x^2}-10x^4+x\right)dx$	21 $\int\left(\frac{1}{\sqrt{36+x^2}}-2^x+\sin x\right)dx$
22 $\int(6x+2x^3)\cdot(12-x)\,dx$	23 $\int(6-2x)(x^4-5)\,dx$	24 $\int\left(\sqrt[4]{x}+\frac{9}{x^4}-6x^2+2\right)dx$
25 $\int(1-6x^2)\cdot(x^3+1)\,dx$	26 $\int\left(9x^2-\frac{1}{x^2}+6\sqrt{x}+1\right)dx$	27 $\int\left(7x^6-\frac{5}{x}+\sqrt[5]{x}+2\right)dx$
28 $\int\left(12x^5-\frac{4}{x^3}+8\sqrt[3]{x}-7x\right)dx$	29 $\int\left(16x^7-\frac{8}{x^5}+\frac{1}{\sqrt{x}}-3\right)dx$	30 $\int\left(32x^5-\frac{6}{x^4}+\frac{5}{\sqrt[5]{x}}-7x\right)dx$

Спасибо за внимание