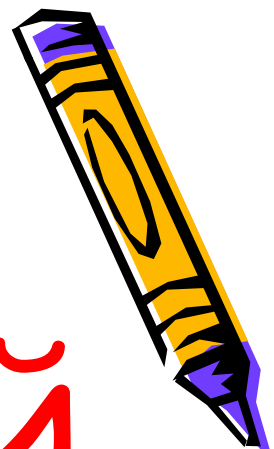


Неопределенный интеграл и его свойства





Иогáнн Берну́лли

(27.07.1667-1.01.1748) —

швейцарский
математик и
механик,

в 1696 году
предложил
термин
«интеграл»

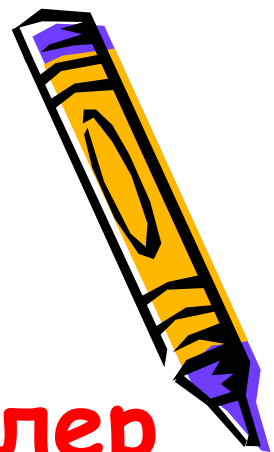




Леона́рд Э́йлер

(15.04.1707 — 7.09.1783)

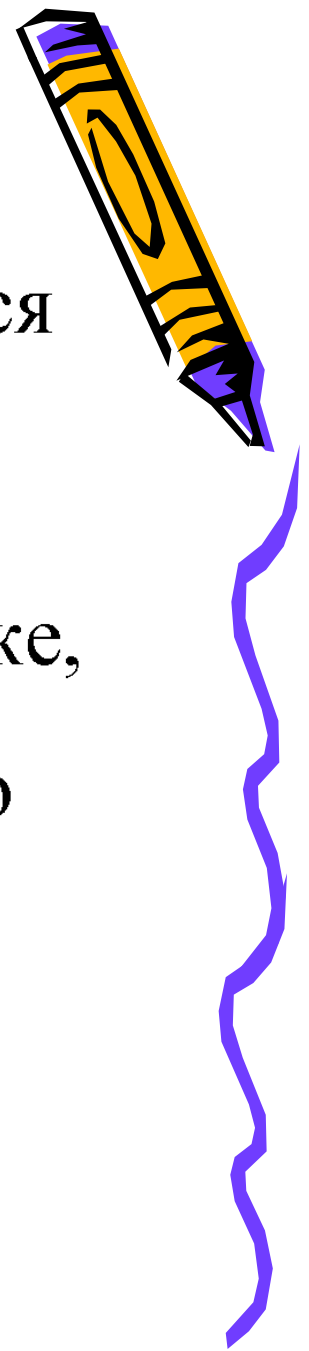
— швейцарский,
немецкий и российский
математик и механик,
ввёл обозначение
неопределённого
интеграла



Интегрирование -
операция отыскания
функции по её
производной.



Определение. Функция $F(x)$ называется **первообразной** функции $f(x)$,
определенной на некотором промежутке,
если $F'(x) = f(x)$ для каждого x из этого
промежутка.




Очевидно, если $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$, то $F(x)+C$, где C - некоторая постоянная, также является первообразной функции $f(x)$.

Если $F(x)$ есть какая-либо первообразная функции $f(x)$, то всякая функция вида $\Phi(x) = F(x) + C$ также является первообразной функции $f(x)$ и всякая первообразная представима в таком виде.



Определение. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$, определенных на некотором промежутке, называется **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ на этом промежутке и обозначается $\int f(x)dx$.




$$\int f(x)dx = F(x) + C$$
 - неопределённый интеграл

где \int - знак интеграла,

$f(x)$ - подынтегральная функция,

$f(x)dx$ - подынтегральное выражение,

$F(x)$ - первообразная функции,

C - постоянная интегрирования



СВОЙСТВА неопределённого интеграла:



1. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

2. $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$

3. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C$$





Таблица неопределенных интегралов:

1. $\int dx = x + C .$

2. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, (a \neq -1) .$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C .$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C .$

5. $\int e^x dx = e^x + C .$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C .$

7. $\int \cos x dx = \sin x + C .$

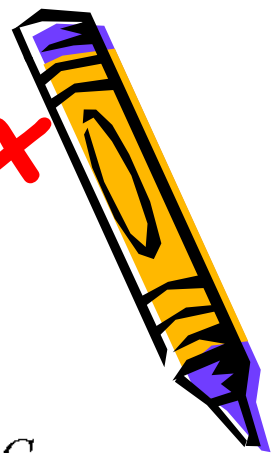
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C .$

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C .$

10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C .$



Таблица неопределенных интегралов:



$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

$$14. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$12. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

$$15. \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C.$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$16. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right| + C.$$



Методы интегрирования:

1. Непосредственное интегрирование

(на основании формул интегрирования и свойств неопределённого интегрирования).

2. Замена переменных

(интегрирование через вспомогательную переменную).

3. Интегрирование по частям:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

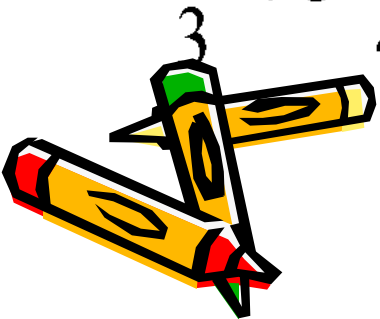
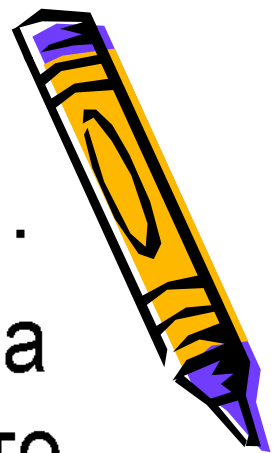


Пример. Вычислить $\int (x^2 + 3x^3 + x + 1) dx$.

Решение. Так как под знаком интеграла находится сумма четырех слагаемых, то раскладываем интеграл на сумму четырех интегралов:

$$\int (x^2 + 3x^3 + x + 1) dx = \int x^2 dx + 3 \int x^3 dx + \int x dx + \int dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + 3 \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x + C$$



Пример. Вычислить $\int \sqrt{2x-1} dx$

Решение.

$$\int \sqrt{2x-1} dx = \left. \begin{array}{l} 2x-1=t \\ 2dx=dt \\ dx=\frac{dt}{2} \end{array} \right| = \int \sqrt{t} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} (2x-1)^{\frac{3}{2}} + C$$



Пример. Вычислить $\int x \cos x dx$.

Решение.

$$\int x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \cos x dx, v = \sin x \end{array} \right| =$$

$$x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C .$$



Пример. Вычислить

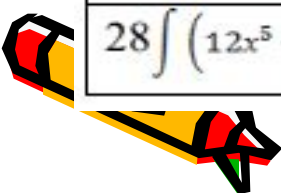
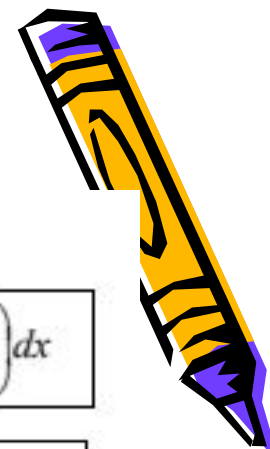
$$\int x \ln x dx = \left. \begin{array}{l} u = \ln x, du = \frac{dx}{x} \\ dv = x dx, v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x} =$$
$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + C .$$



Практическая работа

Задание 1

1 $\int (x^3 - 3x^2 + \frac{6}{\sqrt{x}} - 9\sqrt{x}) dx$	2 $\int (9 + x^2) \cdot (x^3 - 3) dx$	3 $\int (\frac{1}{9+x^2} - 5^x + 2\sin x) dx$
4 $\int (6x - x^2) \cdot (x^2 - 9x) dx$	5 $\int (8 - x^2) \cdot (x^2 + 2x) dx$	6 $\int (\frac{1}{9-x^2} - 3^x + 3\cos x) dx$
7 $\int (\frac{4}{x^3} - \sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{4}x^4 + x) dx$	8 $\int (\frac{12}{x^5} + \frac{1}{2}\sqrt{x} + 3x - 1) dx$	9 $\int (\frac{1}{\sqrt{25+x^2}} - 5^x + 3\sin x) dx$
10 $\int (9 + 2x^2) \cdot (x^3 - 4x) dx$	11 $\int (\frac{1}{\sqrt{25-x^2}} - 2\sin x + e^x) dx$	12 $\int (\frac{3}{\sqrt{3x^2-12}} - e^x + \frac{2}{\sin^2 x}) dx$
13 $\int (\frac{5}{x^6} + \sqrt[3]{x^2} + 5x^4 + 1) dx$	14 $\int (\sqrt[5]{x} + \frac{5}{x^4} + 6x^5 + 1) dx$	15 $\int (3x^5 - \frac{6}{x^2} + x - 7) dx$
16 $\int (\frac{1}{\sqrt{x^2-16}} - e^x + \frac{3}{\cos^2 x}) dx$	17 $\int (\frac{1}{\sqrt{5x^2-5}} - 4^x + \frac{7}{\cos^2 x}) dx$	18 $\int (\frac{1}{\sqrt{16+x^2}} - 7^x + \frac{3}{\sin^2 x}) dx$
19 $\int (\frac{3}{x^7} + 6\sqrt[5]{x} + 8x^3 + 5) dx$	20 $\int (\frac{8}{x^3} - \sqrt[3]{x^2} - 10x^4 + x) dx$	21 $\int (\frac{1}{\sqrt{36+x^2}} - 2^x + \sin x) dx$
22 $\int (6x + 2x^3) \cdot (12 - x) dx$	23 $\int (6 - 2x)(x^4 - 5) dx$	24 $\int (\sqrt[4]{x} + \frac{9}{x^4} - 6x^2 + 2) dx$
25 $\int (1 - 6x^2) \cdot (x^3 + 1) dx$	26 $\int (9x^2 - \frac{1}{x^2} + 6\sqrt{x} + 1) dx$	27 $\int (7x^6 - \frac{5}{x} + \sqrt[5]{x} + 2) dx$
28 $\int (12x^5 - \frac{4}{x^3} + 8\sqrt[3]{x} - 7x) dx$	29 $\int (16x^7 - \frac{8}{x^5} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 3) dx$	30 $\int (32x^5 - \frac{6}{x^4} + \frac{5}{\sqrt[5]{x}} - 7x) dx$



Спасибо за внимание

