



Неопределенный интеграл, его свойства и вычисление

Первообразная

Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$, определенной на промежутке (a, b) , если $F(x)$ дифференцируема на (a, b) и производная $F'(x) = f(x)$ всюду на (a, b) .

Например, $F(x) = \sin(x)$ является

первообразной для $f(x) = \cos x$, т.к

$$F'(x) = (\sin x)' = \cos x$$

Первообразная

Очевидно, если $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$, то $F(x)+C$, где C - некоторая постоянная, также является первообразной функции $f(x)$.

Если $F(x)$ есть какая-либо первообразная функции $f(x)$, то всякая функция вида $\Phi(x) = F(x) + C$ также является первообразной функции $f(x)$ и всякая первообразная представима в таком виде.

Первообразная и неопределенный интеграл

Совокупность всех первообразных функции $f(x)$, определенных на некотором промежутке (a,b) , называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на этом промежутке и обозначается $\int f(x)dx$, где $f(x)$ – подынтегральная функция, а $f(x)dx$ – подынтегральное выражение

Первообразная и неопределенный интеграл

Если $F(x)$ - одна из первообразных функции $f(x)$, то пишут $\int f(x)dx = F(x) + C$

Свойства интеграла

$$1. \int dF(x) = F(x) + C$$

$$2. d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)$$

$$2. d\int f(x)dx = \left(\int f(x)dx\right)'dx = f(x)dx.$$

$$3. \int \alpha f(x) = \alpha \int f(x)$$

$$4. \int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$5. \int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$$

Операция нахождения неопределенного интеграла называется интегрированием и является действием обратным дифференцированию

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int dx = x + C .$

2. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, (a \neq -1) .$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C .$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C .$

5. $\int e^x dx = e^x + C .$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C .$

7. $\int \cos x dx = \sin x + C .$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C .$

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C .$

10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C .$

Таблица неопределенных интегралов

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C .$$

$$12. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C .$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C ..$$

$$14. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$15. \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C .$$

$$16. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right| + C .$$

$$17. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C .$$

$$18. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C .$$

$$19. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C .$$

$$20. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C .$$

Пример

Вычислить $\int \cos 5x dx$

В таблице интегралов найдем

$$\int \cos x dx = \sin x + C .$$

Преобразуем данный интеграл к табличному, воспользовавшись тем, что $d(ax) = a dx$.

Тогда:

$$\begin{aligned} \int \cos 5x dx &= \int \cos 5x \frac{d(5x)}{5} = \frac{1}{5} \int \cos 5x d(5x) = \\ &= \frac{1}{5} \sin 5x + C . \end{aligned}$$

Пример

Вычислить $\int (x^2 + 3x^3 + x + 1) dx$.

$$\int (x^2 + 3x^3 + x + 1) dx = \int x^2 dx + 3 \int x^3 dx + \int x dx + \int dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + 3 \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x + C$$

Пример

Вычислим

$$\int (2 + 3x)^5 dx = \frac{1}{3 \cdot 6} (2 + 3x)^6 + C.$$



Методы интегрирования

Непосредственное интегрирование

- Использование таблицы интегралов и свойств интегралов

Метод замены переменной

Пусть требуется найти $\int f(x)dx$, причем непосредственно подобрать первообразную для $f(x)$ мы не можем, но нам известно, что она существует. Часто удается найти первообразную, введя новую переменную, по формуле

$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'_t dt$, где $x = \varphi(t)$, а t - новая переменная

Пример

Найти

$$\begin{aligned}\int \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + x} dx &= \left| \begin{array}{l} \sqrt{x} = t, x = t^2, \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{1 + t}{1 + t^2} 2t dt = \\ &= 2 \int \frac{t dt}{1 + t^2} + 2 \int \frac{t^2}{1 + t^2} dt = \int \frac{d(t^2 + 1)}{t^2 + 1} + 2 \int \frac{1 + t^2 - 1}{1 + t^2} dt = \\ &= \ln(t^2 + 1) + 2 \int dt - 2 \int \frac{dt}{1 + t^2} = \\ &= \ln(t^2 + 1) + 2t - 2 \operatorname{arctg} t + C = \\ &= \ln(x + 1) + 2\sqrt{x} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C.\end{aligned}$$

Интегрирование по частям

Этот метод основан на формуле $\int u dv = uv - \int v du$.

Методом интегрирования по частям берут такие интегралы:

а) $\int x^n \sin x dx$, где $n = 1, 2, \dots, k$;

б) $\int x^n e^x dx$, где $n = 1, 2, \dots, k$;

в) $\int x^n \operatorname{arctg} x dx$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm k$;

г) $\int x^n \ln x dx$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm k$.

При вычислении интегралов а) и б) вводят

обозначения: $x^n = u$, тогда $du = nx^{n-1} dx$, а, например $\sin x dx = dv$, тогда $v = -\cos x$.

При вычислении интегралов в), г) обозначают за u функцию $\operatorname{arctg} x$, $\ln x$, а за dv берут $x^n dx$.

Пример

Вычислить $\int x \cos x dx$.

$$\int x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \cos x dx, v = \sin x \end{array} \right| =$$

$$x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C .$$

Пример

Вычислить

$$\int x \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, du = \frac{dx}{x} \\ dv = x dx, v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x} =$$
$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + C .$$