

# Выполнил Гайворонский иван 25 группа

- ▣ *Определенный интеграл, его основные свойства. Формула Ньютона-Лейбница. Приложения определенного интеграла.*

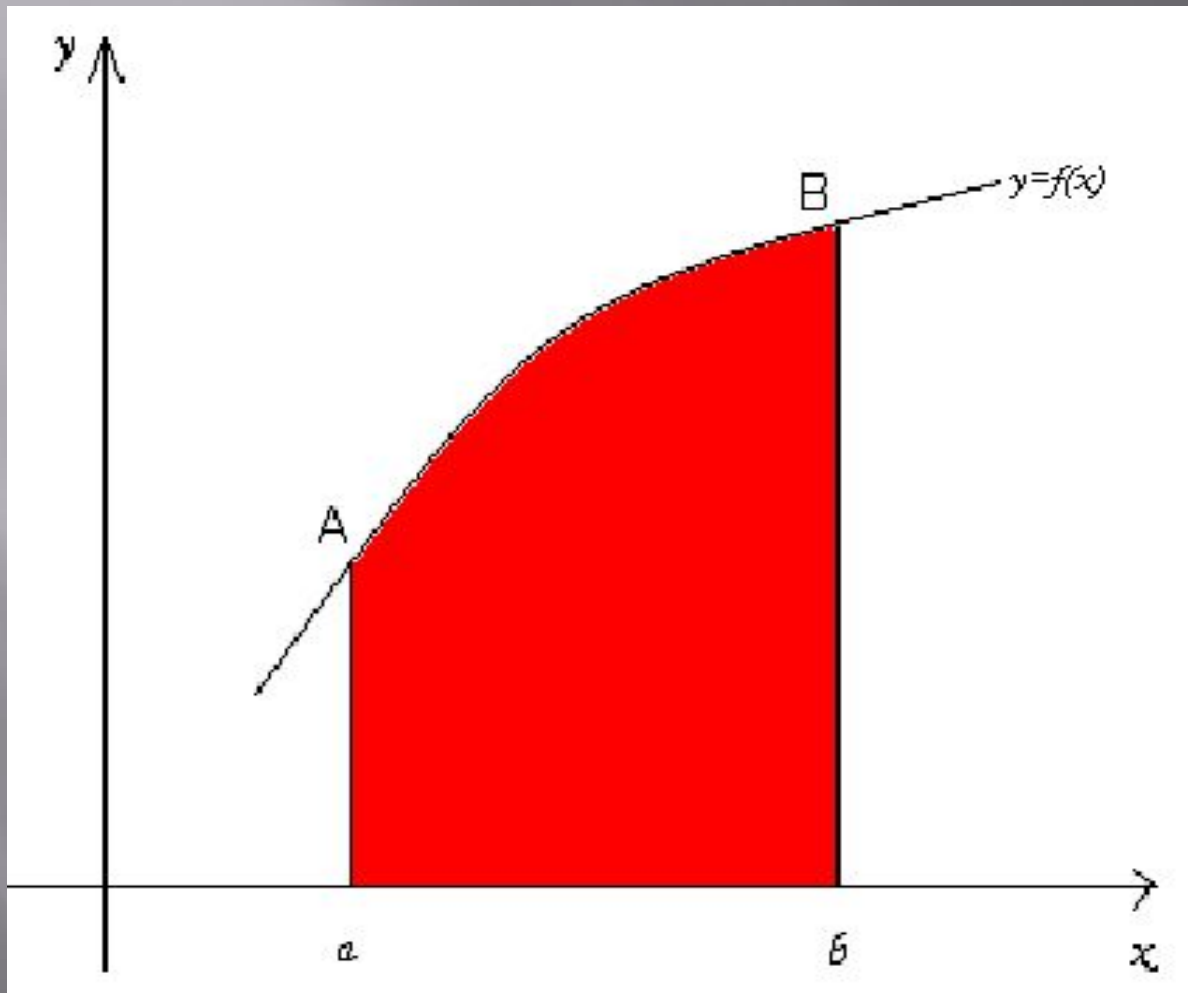
# 1. Понятие определенного интеграла

- ▣ К понятию определенного интеграла приводит задача нахождения площади криволинейной трапеции.
- ▣ Пусть на некотором интервале  $[a, b]$  задана непрерывная функция  $y = f(x) > 0$

## **Задача:**

Построить ее график и найти  $F$  площадь фигуры, ограниченной этой кривой, двумя прямыми  $x = a$  и  $x = b$ , а снизу – отрезком оси абсцисс между точками  $x = a$  и  $x = b$ .

Фигура  $aABb$  называется  
криволинейной трапецией



# Def.

- Под определенным интегралом  $\int_a^b f(x)dx$
- от данной непрерывной функции  $f(x)$  на данном отрезке  $[a;b]$  понимается соответствующее приращение ее первообразной, то есть
- Числа  $a$  и  $b$  – пределы интегрирования,  $[a;b]$  – промежуток интегрирования.  
 $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$

## Правило:

- ▣ Определенный интеграл равен разности значений первообразной подынтегральной функции для верхнего и нижнего пределов интегрирования.
- ▣ Введя обозначения для разности

$$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

**Формула Ньютона – Лейбница.**

# Готфрид Вильгельм Лейбниц



Выдающийся немецкий мыслитель Готфрид Вильгельм Лейбниц принадлежал к роду, известному своими учеными и политическими деятелями. Он изобретал всевозможные универсальные приемы для решения всех задач сразу и, может быть, поэтому вслед за Паскалем стал строить вычислительные устройства.

# Исаак НЬЮТОН (Newton)

(04.01.1643 - 31.03.1727)



Английский физик и математик, создатель теоретических основ механики и астрономии. Он открыл закон всемирного тяготения, разработал (наряду с Г. Лейбницем) дифференциальное и интегральное исчисления, изобрел зеркальный телескоп и был автором важнейших экспериментальных работ по оптике. Ньютона по праву считают создателем "классической физики".

## 2. Основные свойства определенного интеграла.

1) Величина определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования, т.е.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$$

где  $x$  и  $t$  – любые буквы.

2) Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю

$$\int_a^a f(x) dx = F(a) - F(a) = 0$$



- 3) При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет свой знак на обратный

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)] = -\int_b^a f(x)dx$$

(свойство аддитивности)

- 4) Если промежуток  $[a;b]$  разбит на конечное число частичных промежутков, то определенный интеграл, взятый по промежутку  $[a;b]$ , равен сумме определенных интегралов, взятых по всем его частичным промежуткам.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

- 5) Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла.
- 6) Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен такой же алгебраической сумме определенных интегралов от этих функций.

### 3. Замена переменной в определенном интеграле.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

$$a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta), \varphi(t) \in [a; b]$$

$t \in [\alpha; \beta]$ , функции  $\varphi(t)$  и  $\varphi'(t)$  непрерывны на  $[\alpha; \beta]$

**Пример**  $\int_1^5 \sqrt{x-1} dx =$

x	1	5
t	0	4

$$x-1 = t$$

$$dt = dx$$

$$\int_0^4 \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \frac{2}{3} t \sqrt{t} \Big|_0^4 = \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 2 - 0 = \frac{16}{3} = 5 \frac{1}{3}$$

## 4. Несобственные интегралы.

**Def:** Пусть функция  $f(x)$  определена на бесконечном интервале  $[a; +\infty)$  и интегрируется на любом интервале  $[a; b]$ , где  $b < +\infty$ . Если существует

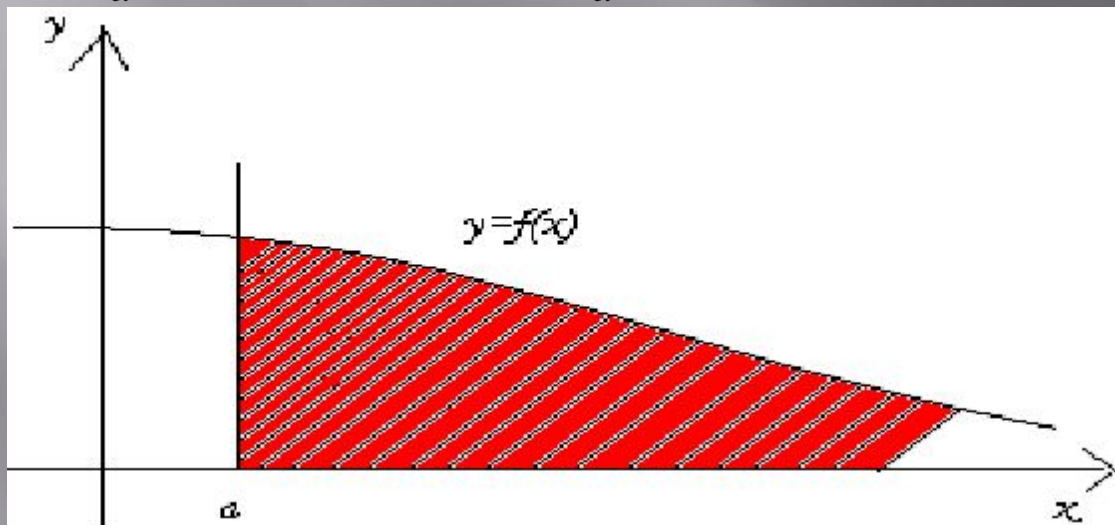
$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

то этот предел называется несобственным интегралом функции  $f(x)$  на интервале

$[a; +\infty)$  и обозначается  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$

□ Таким образом, по определению,

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (F(b) - F(a))$$



которое

расходится, если предела  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  не существует. Говорят, что интеграл

расходится.

# ПУАССОН, СИМЕОН ДЕНИ (Poisson, Simeon-Denis)



Французский математик,  
физик. В 1811 он вывел  
формулу для широкого применения  
теоремы, связывающее  
электрический потенциал с  
плотностью  
равномерного распределения заряда  
(формула Пуассона).

# Интеграл Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx$$

- если  $a = 1$ , то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

- Интеграл сходится, и его значение

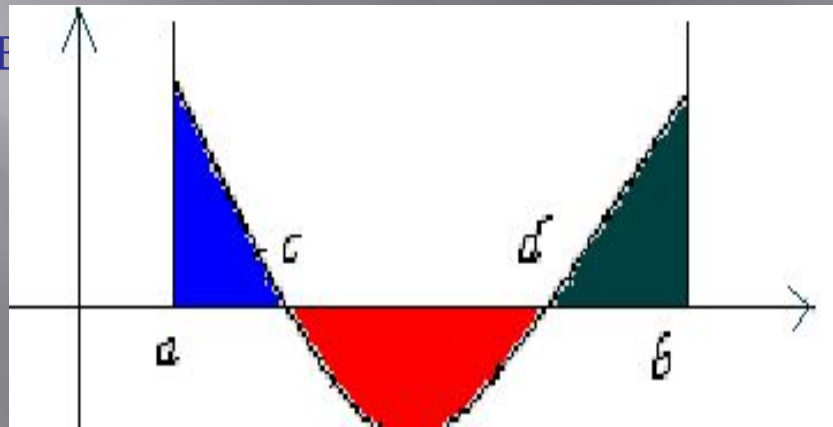
$$= \sqrt{\pi}$$

# 5. Приложения определенного интеграла

1) Площадь плоских фигур.

а) если  $f(x) \geq 0 \Rightarrow S = \int_a^b f(x) dx$

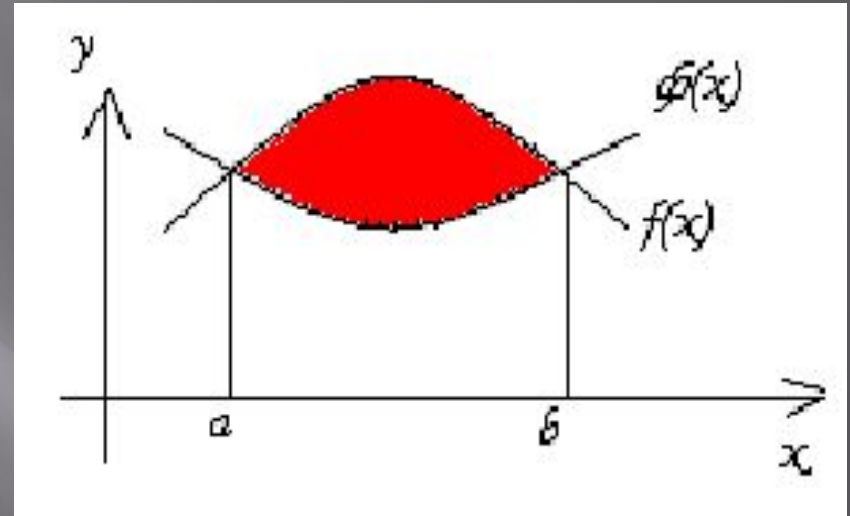
б) если  $f(x) < 0 \Rightarrow S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$



$$S = \int_a^c f(x) dx + \left| \int_c^d f(x) dx \right| + \int_d^b f(x) dx$$



$$\Gamma) S = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)] dx$$



2)  $A = \int_a^b F(x) dx$  интеграл от  
величины силы по длине пути.

### 3) Прирост численности популяции.

$N(t)$  прирост численности за промежуток времени от  $t_0$  до  $T$ ,  $v(t)$  – скорость роста некоторой популяции.

$$N(t) = \int_{t_0}^T v(t) dt$$

интеграл от скорости  
по интервалу времени ее размножения.