Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

1. ***Постановка задачи***
2. ***Методы решения:***

метод Гаусса

метод ортогонализации

метод простой итерации (МПИ),

метод Зейделя, метод Монте-Карло,

итерационная схема метода ортогонализации.

Постановка задачи

Виды методов:

1. прямые (точные)

конечное число арифметических операций

метод Гаусса, метод Крамера, матричный метод, метод ортогонализации.

2. итерационные (приближённые)

решение - передел последовательных приближений, вычисляемых по единой схеме метод простой итерации (МПИ), метод Зейделя, метод Монте-Карло, итерационная схема метода ортогонализации.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = a_{1n+1}; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = a_{2n+1}; \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = a_{mn+1}. \end{cases} \qquad \textbf{(*)}$$

$$A \cdot X = a$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ - матрица системы

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$ - вектор пространства размерности *n*

$$a = \begin{pmatrix} a_{1n+1} \\ a_{2n+1} \\ \dots \\ a_{mn+1} \end{pmatrix}$$ - вектор пространства размерности *m*

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{1\mathrm{n}+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_{2\mathrm{n}+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & a_{\mathrm{mn}+1} \end{pmatrix}$$ - расширенная матрица системы

Матричный метод

$$A \cdot X = a \;\; / \cdot A^{-1} \;\; \text{слева}$$

$$\left(A^{-1} \cdot A\right) \cdot X = A^{-1} \cdot a$$

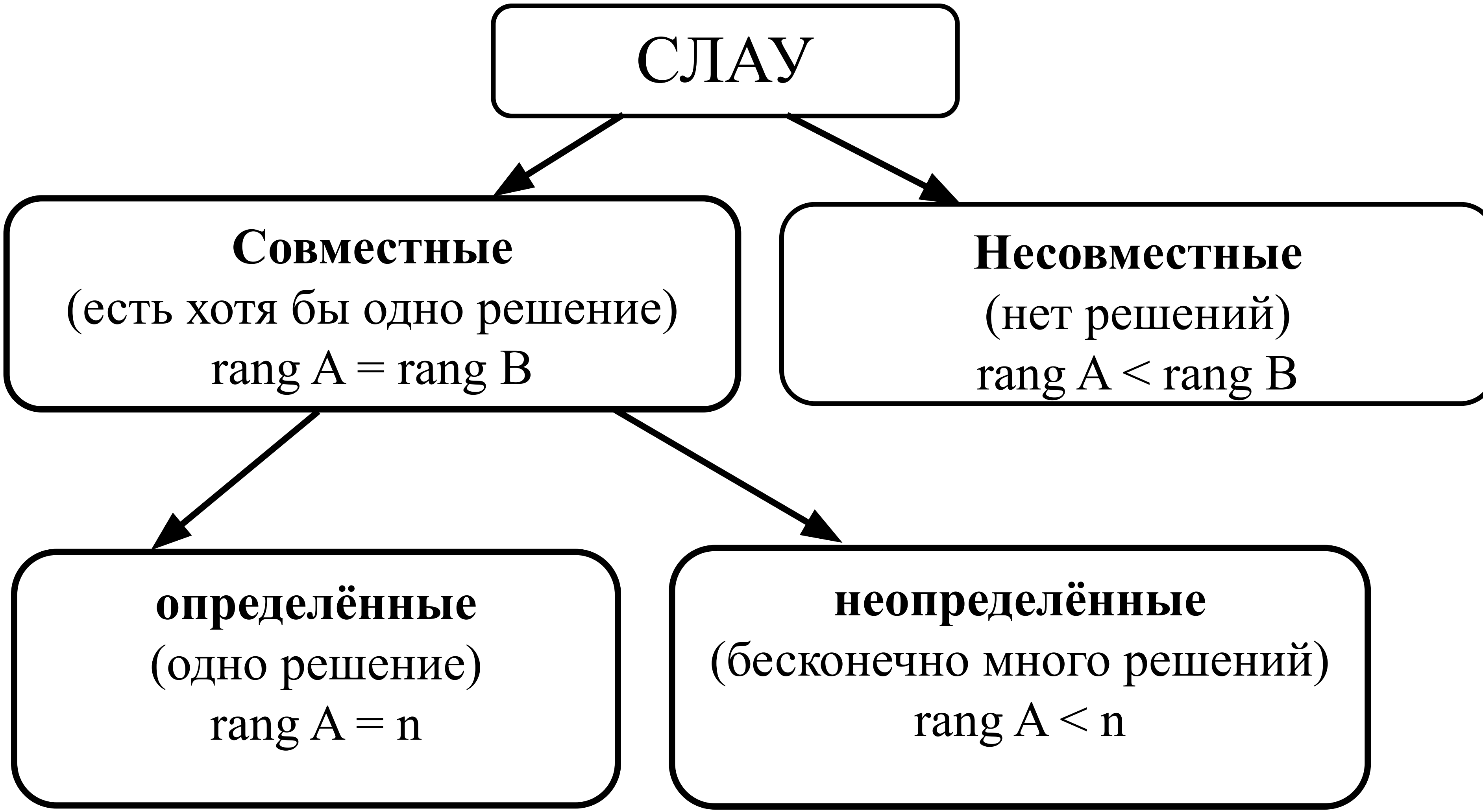
$$E$$

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot a$$

$$X = A^{-1} \cdot a$$

Решение системы (*)
- упорядоченная совокупность чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$

Равносильные системы уравнений
- решения одной являются решениями другой и наоборот.


СЛАУ
Совместные
(есть хотя бы одно решение)
rang A = rang B
Несовместные
(нет решений)
rang A < rang B
определённые
(одно решение)
rang A = n
неопределённые
(бесконечно много решений)
rang A < n

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = a_{1n+1}; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = a_{2n+1}; \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = a_{nn+1}. \end{cases} \quad (1)$$

Квадратная матрица A **невырожденная** если $|A| \neq 0$

Теорема. СЛАУ с n неизвестными, имеющая невырожденную матрицу, совместна и имеет единственное решение (т.е. является определённой).

A^T **транспонированная матрица**

$A = A^T$ **Симметрическая матрица** $a_{ij} = a_{ji}$

$A^T \cdot A = E$ **Ортогональная матрица**

A^{-1} **обратная матрица**

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

Метод Гаусса

этапы

- **прямой ход** – последовательное исключение неизвестных;
- **обратный ход** – последовательное нахождение неизвестных, начиная с $\boldsymbol{x_n}$

	a_{j1}	a_{j2}	a_{j3}	a_{j4}	Σ	S
A	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}		
	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}		
	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}		
B						
C						