



РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПО ПРАВИЛУ КРАМЕРА, МАТРИЧНЫМ МЕТОДОМ, МЕТОДОМ ГАУССА

**ПОЛНАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМ
ЛИНЕЙНЫХ
АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**

- расширенная матрица системы: $\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right);$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right);$$

- однородная СЛАУ:

[illegible]

Методы решения СЛАУ:

- правило Крамера;
- матричный метод;
- метод Гаусса

Правило Крамера

- Решает системы n – линейных алгебраических уравнений с n – неизвестными общего вида

[illegible]

причем определитель основной матрицы системы отличен от нуля.



Определение. Определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных системы называется *главным определителем системы*, обозначается Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$



Правило Крамера

Вспомогательный определитель Δ_i получается из определителя Δ путем замены соответствующего i -го столбца столбцом свободных членов:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Теорема (*правило Крамера*)

- ✓ Если главный определитель Δ системы размерности $n \times n$ отличен от нуля, то система имеет решение, и притом, единственное. Это решение можно найти по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots \quad x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$





Алгоритм решения СЛАУ матричным методом:

1. Вычисляем главный определитель Δ системы, убеждаемся, что он отличен от нуля.
2. Находим матрицу A^{-1} , обратную основной матрице системы.
3. Находим решение системы по формуле

$$X = A^{-1} \cdot B \cdot$$

4. Делаем проверку, подставляя полученное решение в исходную систему.







Метод Гаусса решения СЛАУ

Суть метода Гаусса

Чтобы решить систему m – линейных алгебраических уравнений с n – неизвестными методом Гаусса, необходимо записать расширенную матрицу системы и, используя элементарные преобразования расширенной матрицы системы, привести ее к трапециевидной форме.

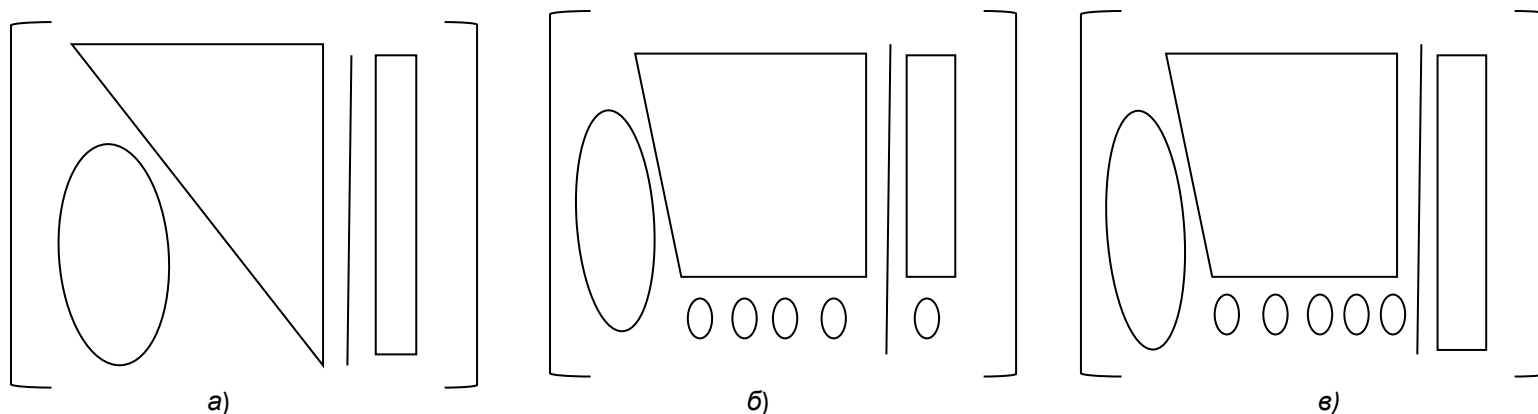
Элементарные преобразования расширенной матрицы системы :

1. перестановка строк (столбцов) матрицы;
2. умножение строки матрицы на действительное число отличное от нуля и сложение с другой строкой;
3. вычеркивание строки матрицы, все элементы которой равны нулю;
4. вычеркивание одной из пропорциональных строк матрицы;
5. умножение строки матрицы на число отличное от нуля.





В результате этих преобразований матрица примет один из трех видов:



- ✓ Если матрицу можно свести к виду **а)**, то система совместна и имеет **единственное решение**.
- ✓ Если матрицу можно свести к виду **б)**, то система совместна и имеет **множество решений**.
- ✓ Если матрицу можно свести к виду **в)**, то система **несовместна**.

Теорема Кронекера-Капелли

Для того чтобы СЛАУ была совместной, необходимо и достаточно, чтобы **ранг основной матрицы системы был равен рангу расширенной матрицы**, то есть $\text{rang}(A) = \text{rang}(\overline{A}) = r$, причем, если $r = n$ — числу неизвестных, то система имеет единственное решение, если $r < n$, то система имеет множество решений.

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ТЕОРЕМЫ КРОНЕКЕРА-КАПЕЛЛИ	Ранг	Система неоднородная $AX=B$, где m – уравнений, n – неизвестных	Система однородная $AX=0$, где m – уравнений, n – неизвестных
1.	$\text{rang}(A) \neq \text{rang}(\overline{A})$	Система несовместна	Это невозможно при $b_1=b_2=\dots=b_n=0$, то есть однородная система всегда совместна
2.	$\text{rang}(A) = \text{rang}(\overline{A})$	Система совместна	Совместна
	а) $r = n$	Решение единственное	Решение только тривиальное ($x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$)
	б) $r < n$	Решений множество	Имеются нетривиальные решения (решений множество)

Общая схема исследования и решения систем линейных алгебраических уравнений

1. Записываем СЛАУ в *матричном виде*.
2. Выписываем *расширенную матрицу* системы.
3. Находим *ранг основной и расширенной матриц* системы:
 - а) если *ранги* матриц *различны*, то система *несовместна*;
 - б) если *ранги* матриц *равны*, причем $r = n$, где n — число неизвестных, то система *совместна*, имеет *единственное решение*, которое может быть найдено с помощью методов: правила Крамера, матричного метода, метода Гаусса;
 - в) если *ранги* матриц *равны*, но $r < n$, то система *совместна*, имеет *множество решений*, которое можно найти только методом Гаусса, вводя r — базисных переменных и n — свободных переменных.







Спасибо за внимание!!! =)