Компьютерный практикум по математическому анализу в среде Matlab

Практическое занятие 8

http://serjmak.com/2students/matlabma/seminarhttp://serjmak.com/2students/matlabma/seminar8http://serjmak.com/2students/matlabma/seminar8.ppt

Темы

Вычисления, связанные с рядами. Числовые ряды, определение сходимости ряда с помощью признаков сходимости. Функциональные ряды, степенные ряды. Разложение функций в степенной ряд.

Теория:

http://serjmak.com/2students/matlabma/1.%20Matlab7_Anufr.pdf

[1] (стр. 767-769)

http://serjmak.com/2students/matlabma/Polovko_Butusov_MATLAB_dlya_studenta.pdf (стр. 72-77)

http://pandia.ru/text/79/302/12002.php

http://www.studfiles.ru/preview/4437092/

http://mathprofi.ru/ryady_dlya_chainikov.html

Matlab: краткая теория

Разложение функции $y = f(x)$ в степенной ряд осуществляется по *формуле Тейлора*:

$$f(x) = f(a) + (x-a)\frac{f'(a)}{1!} + (x-a)^2\frac{f''(a)}{2!} + \ldots + (x-a)^n\frac{f_{(a)}^{(n)}}{n!} + \ldots .$$

В формуле используются следующие обозначения:

- a — значение аргумента x функции $y = f(x)$, вокруг которого происходит разложение в ряд;
- $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$, ..., $f_{(a)}^{(n)}$ — значения функции и ее производных в точке a.

При $a = 0$ формула называется *рядом Маклорена* и имеет вид:

$$f(x) = f(0) + x\frac{f'(0)}{1!} + x^2\frac{f''(0)}{2!} + \ldots + \frac{x^n\ f_{(0)}^{(n)}}{n!}.$$

Matlab: краткая теория

Сходимость и расходимость положительных числовых рядов

Необходимый признак сходимости ряда:

Общий член ряда стремится к 0. Например, (1/n^2)->0 при n->Inf.
Если общий член ряда не стремится к нулю, то ряд расходится.
Или по-другому: если предел общего члена ряда (или выражения, стоящего под знаком суммы) не стремится к 0 при n->Inf, то ряд расходится. В частности, возможна ситуация, когда предела не существует вообще, как, например, предела ряда (-1)^n, или когда предел равен конкретному значению, например 1/8. Так как 1/8 не равно 0, ряд будет расходиться.
Однако некоторые ряды ведут себя странно, например (1/n)->0 при n->Inf, тем не менее этот ряд является гармоническим и расходится. Существует также обобщённый гармонический ряд: (1/n^a), который сходится при a>1 и расходится при a<=1. Поэтому для доказательства сходимости ряда используются дополнительные признаки: Даламбера, Коши или предельный.

Предельный признак сравнения числовых положительных рядов:

Есть два ряда: a_n и b_n. Если предел отношения a_n/b_n при n->Inf равен конечному, отличному от нуля числу, то оба ряда сходятся или расходятся одновременно. Т.е. берём эталон, про который мы знаем, что он , например, сходится (1/n^2), и находим предел отношения, чтобы определить, сходится ли исследуемый ряд (1/(n^2-n)). Предел отношения этих рядов равен 1 при n->Inf, значит, ряд 1/(n^2-n) тоже сходится!

Matlab: краткая теория

Возможные функции для выполнения заданий:

taylor(a,b,c,d) – разложение математических функций в ряд Тейлора:

```
f=str2sym('1/x');
tf=taylor(f);
pretty(tf)
```

функция pretty отображает результат в более понятном, красивом, "естественном" с точки зрения человека виде.

a – сама функция; b – по какой переменной производить разложение, если a – это функция нескольких переменных; c – точка, в окрестности которой проводится разложение; d – параметры (например: 'Order',5- количество членов разложения 5 (максимальная степень ряда)).

В составе Symbolic Math Toolbox есть Taylor tool, который позволяет наглядно экспериментировать с разложением функция в ряд Тейлора.

symsum(a,b,c,d) – нахождение символьных выражений для сумм, в том числе и бесконечных; a – слагаемое, зависящее от суммы (символьное выражение, стоящее под знаком суммы); b – индекс; c – нижний предел суммы; d – верхний предел суммы, например:

```
syms k; s=symsum('(-1)^k/k^2',k,1,Inf)
```

Если в выражение a входит факториал, то применяется sym: sym('(k)!') или функция factorial(k)

Matlab: задание

1) Разложите функцию 1/(1+x) в ряд Тейлора и представьте результат в красивом виде.
2) Разложите функцию 1/(x+y) в ряд Тейлора с 7 членами разложения сначала по x, затем – по y.
3) Разложите в ряд Тейлора функцию x*sin(x) с 10 членами разложения в окрестности x=2.
4) Найдите суммы: $s=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}$ $\quad s=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$.
5) Определите, сходится ли ряд, сумма которого задана формулой (1/2)*(1-(1/3)^n). Найдите эту сумму.
6) Создайте функцию, которая строит в одной системе координат график последовательности членов ряда и график последовательности частичных сумм ряда; входные параметры функции – формула общего члена последовательности и число рассматриваемых членов; выходные параметры – значение суммы. Примените эту функцию для исследования следующих рядов:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}0{,}3^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}1{,}5^n$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2n}$.