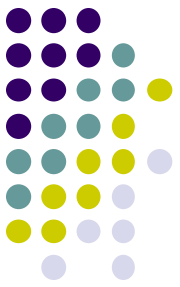


Компьютерный практикум по математическому анализу в

среде Matlab Практическое занятие 8



<http://serjmak.com/2students/matlabma/seminar8>
<http://serjmak.com/2students/matlabma/seminar8.ppt>

Темы

Вычисления, связанные с рядами. Числовые ряды, определение сходимости ряда с помощью признаков сходимости. Функциональные ряды, степенные ряды. Разложение функций в степенной ряд.

Теория:

http://serjmak.com/2students/matlabma/1.%20Matlab7_Anufr.pdf

[1] (стр. 767-769)

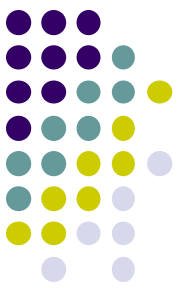
http://serjmak.com/2students/matlabma/Polovko_Butusov_MATLAB_dlya_studenta.pdf (стр. 72-77)

<http://pandia.ru/text/79/302/12002.php>

<http://www.studfiles.ru/preview/4437092/>

http://mathprofi.ru/ryady_dlya_chainikov.html

Matlab: краткая теория



Разложение функции $y = f(x)$ в степенной ряд осуществляется по формуле Тейлора:

$$f(x) = f(a) + (x-a) \frac{f'(a)}{1!} + (x-a)^2 \frac{f''(a)}{2!} + \dots + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \dots$$

В формуле используются следующие обозначения:

- ◆ a — значение аргумента x функции $y = f(x)$, вокруг которого происходит разложение в ряд;
- ◆ $f(a), f'(a), f''(a), \dots, f^{(n)}(a)$ — значения функции и ее производных в точке a .

При $a = 0$ формула называется *рядом Маклорена* и имеет вид:

$$f(x) = f(0) + x \frac{f'(0)}{1!} + x^2 \frac{f''(0)}{2!} + \dots + \frac{x^n f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Matlab: краткая теория

Сходимость и расходимость положительных числовых рядов



Необходимый признак сходимости ряда:

Общий член ряда стремится к 0. Например, $(1/n^2) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \text{Inf}$.

Если общий член ряда не стремится к нулю, то ряд расходится.

Или по-другому: если предел общего члена ряда (или выражения, стоящего под знаком суммы) не стремится к 0 при $n \rightarrow \text{Inf}$, то ряд расходится. В

частности, возможна ситуация, когда предела не существует вообще, как, например, предела ряда $(-1)^n$, или когда предел равен конкретному значению, например $1/8$. Так как $1/8 \neq 0$, ряд будет расходиться.

Однако некоторые ряды ведут себя странно, например $(1/n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \text{Inf}$, тем не менее этот ряд является гармоническим и расходится. Существует также обобщённый гармонический ряд: $(1/n^a)$, который сходится при $a > 1$ и расходится при $a \leq 1$. Поэтому для доказательства сходимости ряда используются дополнительные признаки: Даламбера, Коши или предельный.

Предельный признак сравнения числовых положительных рядов:

Есть два ряда: a_n и b_n . Если предел отношения a_n/b_n при $n \rightarrow \text{Inf}$ равен конечному, отличному от нуля числу, то оба ряда сходятся или расходятся одновременно. Т.е. берём эталон, про который мы знаем, что он, например, сходится $(1/n^2)$, и находим предел отношения, чтобы определить, сходится ли исследуемый ряд $(1/(n^2-n))$. Предел отношения этих рядов равен 1 при

Matlab: краткая теория



Возможные функции для выполнения заданий:

`taylor(a,b,c,d)` – разложение математических функций в ряд Тейлора:

```
f=str2sym('1/x');
```

```
tf=taylor(f);
```

```
pretty(tf)
```

функция `pretty` отображает результат в более понятном, красивом, “естественном” с точки зрения человека виде.

`a` – сама функция; `b` – по какой переменной производить разложение, если `a` – это функция нескольких переменных; `c` – точка, в окрестности которой проводится разложение; `d` – параметры (например: ‘Order’,5- количество членов разложения 5 (максимальная степень ряда)).

В составе Symbolic Math Toolbox есть Taylor tool, который позволяет наглядно экспериментировать с разложением функция в ряд Тейлора.

`symsum(a,b,c,d)` – нахождение символьных выражений для сумм, в том числе и бесконечных; `a` – слагаемое, зависящее от суммы (символьное выражение, стоящее под знаком суммы); `b` – индекс; `c` – нижний предел суммы; `d` – верхний предел суммы, например:

```
syms k; s=symsum('(-1)^k/k^2',k,1,Inf)
```

Если в выражение `a` входит факториал, то применяется `sym`: `sym('(k)!')` или функция `factorial(k)`

Matlab: задание



- 1) Разложите функцию $1/(1+x)$ в ряд Тейлора и представьте результат в красивом виде.
- 2) Разложите функцию $1/(x+y)$ в ряд Тейлора с 7 членами разложения сначала по x , затем – по y .
- 3) Разложите в ряд Тейлора функцию $x*\sin(x)$ с 10 членами разложения в окрестности $x=2$.

4) Найдите суммы: $s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ $s = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

- 5) Определите, сходится ли ряд, сумма которого задана формулой $(1/2)*(1-(1/3)^n)$. Найдите эту сумму.
- 6) Создайте функцию, которая строит в одной системе координат график последовательности членов ряда и график последовательности частичных сумм ряда; входные параметры функции – формула общего члена последовательности и число рассматриваемых членов; выходные параметры – значение суммы. Примените эту функцию для исследования следующих рядов:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} 0,3^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} 1,5^n$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n}$.