

Лекция 5

**СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ
УРАВНЕНИЙ****С Л А У**

Дана система линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b, \text{ где}$$

A - вещественная квадратная матрица порядка n ,

$b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ - заданный вектор,

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ - искомый вектор.

Предполагается, что $\det A \neq 0$. Тогда для каждого вектора b система имеет единственное решение.

Вид системы в развернутом виде:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n = b_2$$

.....

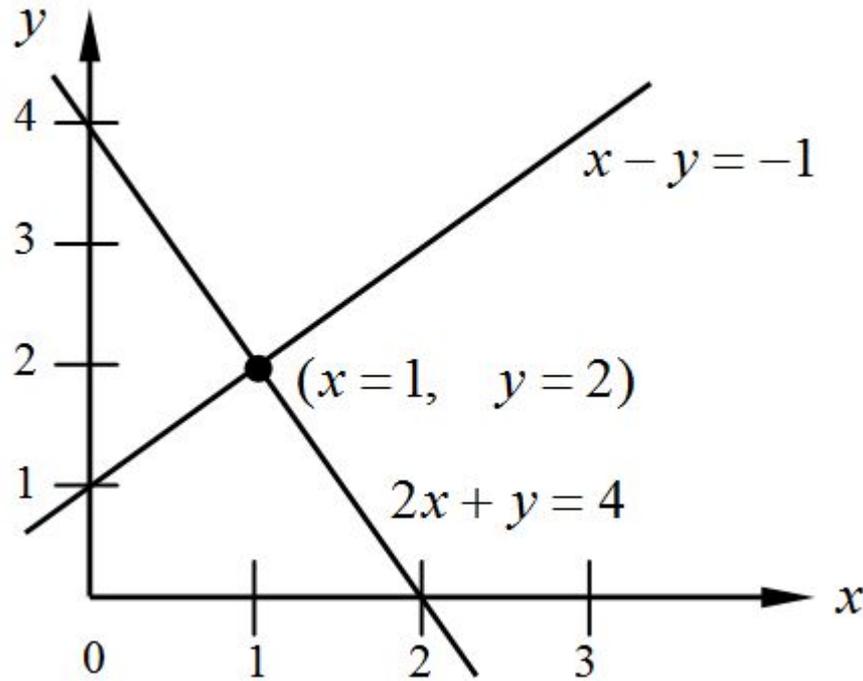
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots a_{nn}x_n = b_n.$$

Если задана некоторая произвольная система уравнений, то без предварительного исследования нельзя сказать, имеет ли она какое-либо решение и, в случае, если решение существует, является ли оно *единственным*. На этот вопрос существует три ответа.

1. Решение системы уравнений существует и является единственным. Например,

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - y = -1. \end{cases}$$

Решение этой системы $x = 1$ и $y = 2$.



Геометрическое представление системы двух линейных уравнений, имеющей единственное решение. Координаты точки пересечения представляют собой искомое решение.

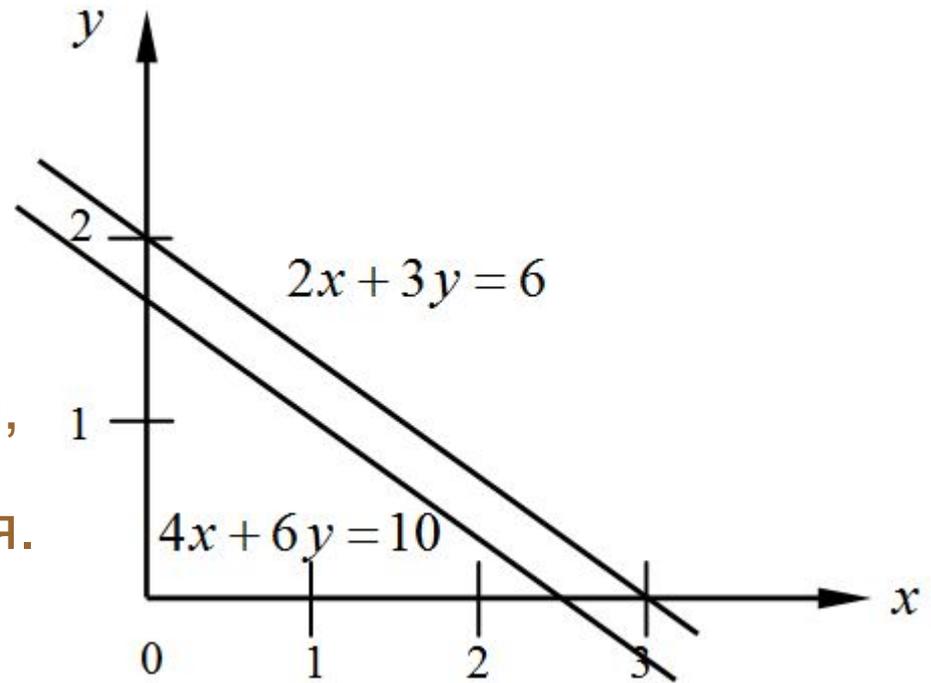
5

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Система уравнений вообще не имеет решения.

$$\begin{cases} 4x + 6y = 10 \\ 2x + 3y = 6. \end{cases}$$

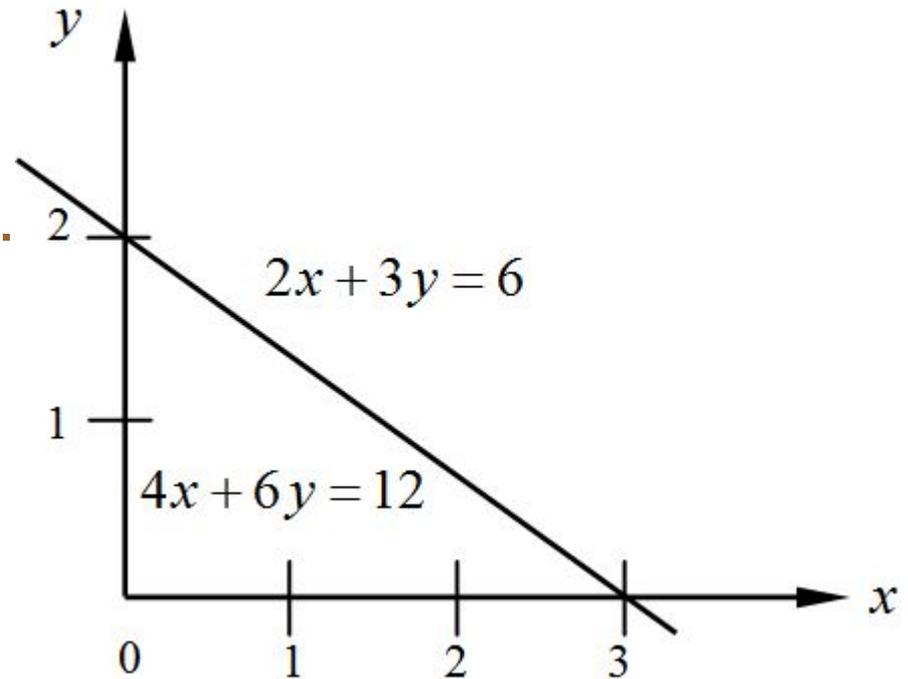
Две прямые параллельны,
они нигде не пересекаются,
и система не имеет решения.



Геометрическое представление системы двух линейных уравнений, не имеющей решения.

3. Система уравнений имеет бесконечное множество решений

Два уравнения описывают одну и ту же прямую линию. Любая точка, лежащая на этой линии, является решением этой системы.



Геометрическое представление системы двух линейных уравнений, имеющей бесконечное множество решений

Две последние системы уравнений называются *вырожденными*. С точки зрения обычной математики линейных уравнений всегда является или вырожденной или невырожденной. С точки же зрения вычислений могут существовать *почти* вырожденные системы, при решении которых получаются недостоверные значения неизвестных.

Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x + 7y = 12 \\ 7x + 10y = 17. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $x = 1, y = 1$.

Теперь рассмотрим пару значений $x = 2.415, y = 0$.

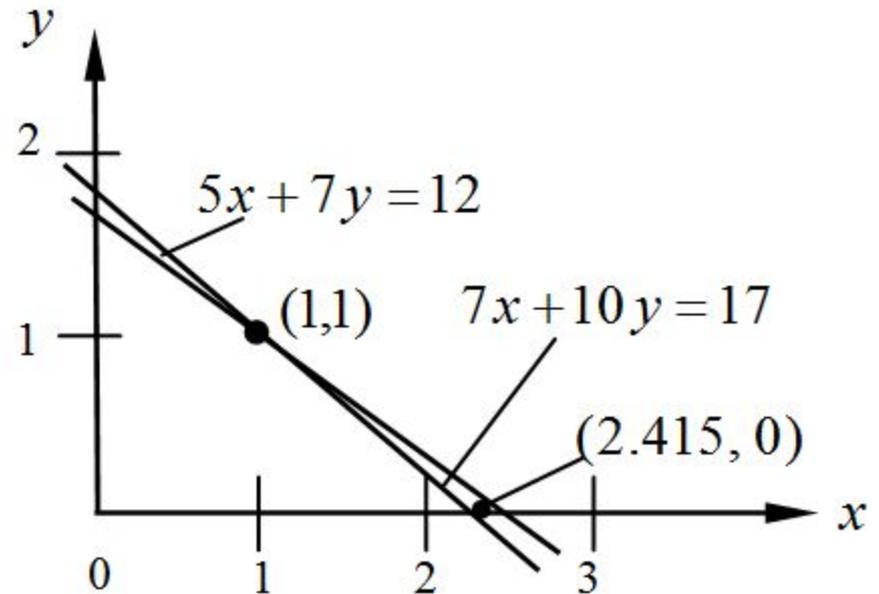
При подстановке этих значений в исходные уравнения получаем

$$\begin{cases} 5x + 7y = 12.075 \\ 7x + 10y = 16.905. \end{cases}$$

После округления до двух значащих цифр правые части равенств совпадают с правыми частями исходных уравнений.

Дело в том, что две прямые линии, описываемые двумя уравнениями этой системы, *почти* параллельны.

Системы такого типа называются *плохо обусловленными*.



Методы решения СЛАУ подразделяются на

- *прямые (конечные, точные);*
- *итерационные (бесконечные, приближенные).*

Прямые:

Гаусса

LU-разложений

Жордано

Квадратного корня

Итерационные:

Простых итераций

Зейделя

Релаксаций

МЕТОД ГАУССА

Метод основан на идее последовательного исключения неизвестных. Введем $n - 1$ множителей

$$m_i = \frac{a_{i1}}{a_{11}}, \quad i = 2, 3, \dots, n$$

и вычтем из каждого уравнения первое, умноженное на m_i

Обозначая

$$a_{ij}^1 = a_{ij} - m_i a_{1j}, \quad i = 2, 3, \dots, n,$$

$$b_i^1 = b_i - m_i b_1, \quad j = 2, 3, \dots, n,$$

для всех уравнений, начиная со второго, получаем

$$a_{i1}^1 = 0, \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

Преобразованная система запишется в виде:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n = b_1$$

$$0 \quad + a_{22}^1x_2 + \dots a_{2n}^1x_n = b_2^1$$

.....

$$0 \quad + a_{2n}^1x_n + \dots a_{nn}^1x_n = b_n^1.$$

Продолжая таким же образом на некотором k -м этапе мы исключаем x_k с помощью множителей

$$m_i^{(k-1)} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad i = k + 1, \dots, n, \quad a_{kk}^{(k-1)} \neq 0.$$

Тогда

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - m_i^{(k-1)} a_{kj}^{(k-1)}, \quad k = 1, \dots, n-1.$$
$$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - m_i^{(k-1)} b_k^{(k-1)}$$

При $k = n - 1$ происходит исключение x_{n-1} из последнего уравнения.

Окончательная треугольная система уравнений записывается следующим образом:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{22}^1x_2 + \dots a_{2n}^1x_n = b_2^1$$

.....

$$a_{nn}^{n-1}x_n = b_n^{n-1}$$

Такая система уравнений называется *треугольной*.

Приведение матрицы к треугольной называется *прямым ходом*.

Треугольная система легко решается *обратным ходом* по следующим формулам:

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}, \quad x_{n-1} = \frac{b_{n-1}^{(n-2)} - a_{n-1,n}^{(n-2)} x_n}{a_{n-1,n-1}^{(n-2)}}, \quad \dots,$$

$$x_j = \frac{(f_j^{(j-1)} - a_{jn}^{(j-1)} x_n - \dots - a_{j,j+1}^{(j-1)} x_{j+1})}{a_{jj}^{(j-1)}}, \quad j = n-2, n-3, \dots, 1.$$

В результате получаем искомое решение.

Вычисление определителя методом Гаусса

Для вычисления определителя матрицы A
решаем систему $Ax = b$ и выполняем прямой
ход метода Гаусса:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot a_{33}^{(2)} \cdot \dots \cdot a_{nn}^{(n-1)}.$$

Метод LU – разложений

Пусть A — данная матрица, а L и U - нижняя (левая) и верхняя (правая) треугольные матрицы:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Справедливо следующее утверждение:

Если все главные миноры квадратной матрицы A отличны от нуля, то существуют такие нижняя L и верхняя U треугольные матрицы, что $A = LU$.

Если элементы диагонали одной из матриц L или U фиксированы (ненулевые), то такое разложение единственно.

Перемножая нижнюю и верхнюю матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix}.$$

приходим к матрице уравнений размерностью $n*n$:

$$\begin{array}{ccc} u_{11} = a_{11}, & | & u_{12} = a_{12}, & & u_{1n} = a_{1n} \\ l_{21}u_{11} = a_{21}, & & l_{21}u_{12} + u_{22} = a_{22}, & & l_{21}u_{1n} + u_{2n} = a_{2n}, \\ \dots & & \dots & & \dots \\ l_{n1}u_{11} = a_{n1}, & & l_{n1}u_{12} + l_{n2}u_{22} = a_{n2}, & & l_{n1}u_{1n} + \dots + u_{nn} = a_{nn}. \end{array}$$

Элементы матриц L и U могут быть вычислены с помощью следующих формул:

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \quad (i \leq j),$$

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \right) \quad (i > j).$$

Запишем исходную систему $Ax = b$ так: $LUx = b$.
 Введем вспомогательный вектор $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$.
 решение системы сводится к решению двух систем с
 треугольными матрицами коэффициентов:

$$\begin{cases} Ly = b, \\ Ux = y. \end{cases}$$

Запишем уравнение $Ly = b$ в развернутом виде:

$$\begin{cases} y_1 = b_1 \\ l_{21}y_1 + y_2 = b_2 \\ \dots \\ l_{n1}y_1 + l_{n2}y_2 + \dots + l_{n,n-1}y_{n-1} = b_n \end{cases}$$

Метод Жордано

1. Выбирается первая колонка слева, в которой есть хоть одно отличное от нуля значение.
2. Если самое верхнее число в этой колонке есть нуль, то меняется вся первая строка матрицы с другой строкой матрицы, где в этой колонке нет нуля.
3. Все элементы первой строки делятся на верхний элемент выбранной колонки.

4. Из оставшихся строк вычитается первая строка, умноженная на первый элемент соответствующей строки, с целью получить первым элементом каждой строки (кроме первой) нуль.
5. Далее проводим такую же процедуру с матрицей, получающейся из исходной матрицы после вычёркивания первой строки и первого столбца.
6. После повторения этой процедуры $n-1$ раз получаем верхнюю треугольную матрицу.

7. Вычитаем из предпоследней строки последнюю строку, умноженную на соответствующий коэффициент, с тем, чтобы в предпоследней строке осталась только 1 на главной диагонали.

8. Повторяем предыдущий шаг для последующих строк. В итоге получаем единичную матрицу и решение на месте свободного вектора (с ним необходимо проводить все те же преобразования).

Пример.

Решить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 \quad \quad + x_3 = 3 \end{cases}$$

Прямой ход

÷

Исключим переменную x_1 из всех уравнений, за исключением первого. Поменяем местами 1 и 3 уравнения (порядок уравнений в системе не имеет значения).

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

Из уравнения 2 вычитаем уравнение 1, умноженное на 3.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 3 \\ x_2 - 5x_3 = -6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -6 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

5

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Из уравнения 3 вычитаем уравнение 1, умноженное на 2.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 3 \\ x_2 - 5x_3 = -6 \\ x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \end{array} \right)$$

Исключим переменную x_2 из последнего уравнения.

Из уравнения 3 вычитаем уравнение 2.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 3 \\ x_2 - 5x_3 = -6 \\ 2x_3 = 2 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

Обратный ход.

Коэффициенты уравнения 3 разделим на 2.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 3 \\ x_2 - 5x_3 = -6 \\ x_3 = 1 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Исключим переменную x_3 из 1 и 2 уравнений.

Из уравнения 1 вычитаем уравнение 3.

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 - 5x_3 = -6 \\ x_3 = 1 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

К уравнению 2 прибавим уравнение 3, умноженное на 5.

$$\begin{cases} x_1 & & = 2 \\ & x_2 & = -1 \\ & & x_3 = 1 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Получаем решение:

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -1$$

$$x_3 = 1 \quad .$$

Вычисление элементов обратной матрицы

Обратной к матрице A называют такую матрицу

A^{-1} для которой $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

Для вычисления элементов обратной матрицы A^{-1}

используем соотношение $A \cdot A^{-1} = E$.

Умножая матрицу A на A^{-1} и приравнивая каждый элемент произведения соответствующему элементу матрицы E получим систему из n^2 уравнений с n^2 неизвестными x_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$).

Так, умножая почленно каждую строку матрицы A на первый столбец матрицы A^{-1} и каждый раз приравнивая полученное произведение соответствующему элементу первого столбца матрицы E , получаем систему

$$a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + a_{13}x_{31} + \dots + a_{1n}x_{n1} = 1,$$

$$a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} + a_{23}x_{31} + \dots + a_{2n}x_{n1} = 0$$

.....

$$a_{n1}x_{11} + a_{n2}x_{21} + a_{n3}x_{31} + \dots + a_{nn}x_{n1} = 0$$

Аналогично при умножении строк матрицы A на второй столбец матрицы A^{-1} образуется еще одна система

$$a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} + a_{13}x_{32} + \dots + a_{1n}x_{n2} = 0,$$

$$a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} + a_{23}x_{32} + \dots + a_{2n}x_{n2} = 1$$

.....

$$a_{n1}x_{12} + a_{n2}x_{22} + a_{n3}x_{32} + \dots + a_{nn}x_{n2} = 0$$

и так далее...

Метод прогонки

Пусть матрица A содержит много нулевых элементов, расположенных в матрице не беспорядочно, а плотными массивами на заранее известных местах. Тогда расчет по методу Гаусса можно организовать так, чтобы не включать эти элементы. Тем самым объем вычислений и требуемая память уменьшаются, зачастую очень сильно. Наиболее важным случаем метода Гаусса является *метод прогонки*, применяемый к системам с трехдиагональной матрицей (они часто встречаются при решениях краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка).

Пусть A – трехдиагональная матрица, имеющая вид:

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & -b_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_2 & c_2 & -b_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a_3 & c_3 & -b_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -a_n & c_n \end{pmatrix}.$$

Обычно для систем с трехдиагональной матрицей, которые часто встречаются при решении краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка, используют метод прогонки.

Такие системы обычно записываются в каноническом виде

$$\begin{aligned} a_i x_{i-1} - b_i x_i + c_i x_{i+1} &= d_i, & 1 \leq i \leq n, \\ a_1 = c_n &= 0. \end{aligned} \quad (*)$$

Эта формула называется разностным уравнением второго порядка, или трехточечным уравнением. В этом случае прямой ход (без выбора главного элемента) сводится к исключению элементов a_i . Получается треугольная система, содержащая в каждом уравнении только два неизвестных x_i и x_{i+1} .

Поэтому формулы обратного хода имеют следующий вид:

$$x_i = \xi_{i+1} x_{i+1} + \eta_{i+1}, \quad i = n, n-1, \dots, 1. \quad (**)$$

Уменьшим в формуле (**) индекс на единицу и подставим в уравнение (*):

$$a_i (\xi_i x_i + \eta_i) - b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i.$$

выражая отсюда x_i , получим:

$$x_i = \frac{c_i}{b_i - a_i \xi_i} x_{i+1} + \frac{a_i \eta_i - d_i}{b_i - a_i \xi_i}.$$

Чтобы это выражение совпало с (**), надо, чтобы стоящие в его правой части дроби были равны соответственно ξ_{i+1} и η_{i+1} .

Отсюда получим удобную запись формул прямого хода

$$\xi_{i+1} = \frac{c_i}{(b_i - a_i \xi_i)}, \quad (***)$$

$$\eta_{i+1} = \frac{a_i \eta_i - d_i}{b_i - a_i \xi_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

В формулах прямого и обратного хода начало счета «замаскировано»: для начала (*развязки*) расчета формально требуется задать величины ξ_1 , η_1 и x_{n+1} , которые неизвестны. Однако перед этими величинами в формулах стоят множители a_1 или $\xi_{n+1} \approx c_n$, равные нулю. Это позволяет начать вычисления, полагая, например,

$$\xi_1 = \eta_1 = x_{n+1} = 0.$$

Вычисления по формулам прогонки (***) — (***) требуют всего $3n$ ячеек памяти и $9n$ арифметических действий, т.е. они гораздо экономнее общих формул метода исключения.

Попутно можно найти определитель трехдиагональной матрицы:

$$\det A = \prod_{i=1}^n (a_i \xi_i - b_i).$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \boxtimes \\ x_n \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \boxtimes \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

В результате получаем:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{1,1}} - \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}} x_2 - \dots - \frac{a_{1,n}}{a_{1,1}}$$

$$x_2 = \frac{b_2}{a_{2,2}} - \frac{a_{2,1}}{a_{2,2}} x_1 - \dots - \frac{a_{2,n}}{a_{2,2}}$$

.....

$$x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}} - \frac{a_{n,1}}{a_{n,n}} x_1 - \dots - \frac{a_{n,n+1}}{a_{n,n}} x_{n-1}.$$

Далее справа подставляем предыдущие приближения X^k начиная с X^0 и слева получаем последующие приближения X^{k+1} .

В результате получаем итерационные формулы вида:

$$X^{(k+1)} = C \cdot X^{(k)} + \beta$$

Начиная с X^0 , получим последовательность векторов $X^0, X^1, X^2, \dots, X^k, \dots$. Если эта последовательность сходится, то она сходится к решению системы.

В результате получаем формулы метода итерации.

Метод простой итерации

$$x_1^{(k+1)} = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2^{(k)} - \dots - \frac{a_{1,n}}{a_{11}} x_n^{(k)}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(k)} - \dots - \frac{a_{2,n}}{a_{22}} x_n^{(k)}$$

.....

$$x_n^{(k+1)} = \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{a_{n,1}}{a_{nn}} x_1^{(k)} - \dots - \frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} x_{n-1}^{(k)}$$

Или иначе:

$$x_i^{k+1} = \frac{b_i}{a_{i,i}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} x_j^k$$

Эти формулы используем при $k = 0, 1, \dots$ и получаем последовательность векторов $X^0, X^1, X^2, \dots, X^k$.

За начальный вектор X^0 будем брать столбец свободных членов β или $X^0 = 0$.

Условие окончания поиска: $|x_i^k - x_i^{k+1}| \leq \varepsilon, \quad i = \overline{1..n}$

Достаточные условия **сходимости метода**:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad \text{или} \quad |a_{jj}| > \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

Если условия выполнены, то процесс простой итерации сходится к единственному решению системы **независимо от выбора начального приближения**.

Говорят, что матрица A_{nn} обладает свойством диагонального преобладания, если

$$|a_{ii}| \geq \sum_{i \neq j} |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{причем хотя бы одно}$$

неравенство является строгим. Если все неравенства строгие, то говорят, что матрица A_{nn} обладает *строгим* диагональным преобладанием.

Метод Зейделя

Идея метода **Зейделя** заключается в том, что при вычислении $(k + 1)$ -го приближения неизвестной x_i учитываются уже вычисленные ранее $(k + 1)$ -е приближения неизвестных

$$x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$$

Итерационные формулы метода Зейделя будут иметь следующий вид:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{b_1}{a_{11}} - \sum_{j=2}^n \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j^{(k)},$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(k+1)} - \sum_{j=3}^n \frac{a_{2j}}{a_{22}} x_j^{(k)},$$

.....

$$x_n^{(k+1)} = \frac{b_n}{a_{nn}} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_{nj}}{a_{nn}} x_j^{(k+1)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Или иначе:

$$x_i^{k+1} = \frac{b_i}{a_{i,i}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} x_j^k$$

Условия сходимости метода Зейделя те же, что у метода простой итерации : преобладание диагональных элементов.

Для метода Зейделя имеется еще теорема о сходимости:

Пусть матрица A — вещественная, симметричная, определенная матрица. Тогда метод Зейделя сходится.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Метод релаксации (ослабления)

Пусть имеем систему линейных уравнений

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots a_{nn}x_n = b_n$$

Преобразуем эту систему с.о.: перенесем правую часть влево и разделим первое уравнение на $-a_{11}$, второе на $-a_{22}$ и т.д. Тогда получим систему, *приготовленную к релаксации*:

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

$$-x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n + d_1 = 0$$

$$c_{21}x_1 - x_2 + \dots + c_{2n}x_n + d_2 = 0$$

.....

$$c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \dots - x_n + d_n = 0$$

где

$$c_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \quad (i \neq j), \quad d_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$$

Пусть $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ - начальное приближение решения системы. Подставляя эти значения в систему, получим *невязки*

$$R_1^{(0)} = d_1 - x_1^{(0)} + \sum_{j=2}^n c_{1j} x_j^{(0)}$$

$$R_2^{(0)} = d_2 - x_2^{(0)} + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq 2}}^n c_{2j} x_j^{(0)}$$

.....

$$R_n^{(0)} = d_n - x_n^{(0)} + \sum_{j=1}^{n-1} c_{nj} x_j^{(0)}$$

Если одной из неизвестных $x_s^{(0)}$ дать приращение $\delta x_s^{(0)}$, то соответствующая невязка $R_s^{(0)}$ уменьшится на величину $\delta x_s^{(0)}$, а все остальные невязки $R_i^{(0)}$ ($i \neq s$) увеличатся на величину $c_{is} \delta x_s^{(0)}$. Таким образом, чтобы обратить очередную невязку $R_s^{(0)}$ в нуль, достаточно величине $x_s^{(0)}$ дать приращение $\delta x_s^{(0)} = R_s^{(0)}$.

И мы будем иметь: $R_s^{(1)} = 0$ и $R_i^{(1)} = R_i^{(0)} + c_{is} \delta x_s^{(0)}$ при $i \neq s$).

Метод релаксации заключается в том, что на каждом шаге обращают в нуль максимальную по модулю невязку путем изменения значения соответствующей компоненты приближения. Процесс заканчивается, когда все невязки будут равны нулю с заданной точностью $|R_j^{(k)}| < \varepsilon, \quad j = \overline{1, n}$.

Решение получаем по формулам: $|x_i \approx x_i^{(0)} + \sum_j \delta x_i^{(j)}$

Пример. Методом релаксации решить систему

$$10x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 6$$

$$-x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 7$$

$$-x_1 - x_2 + 10x_3 = 8$$

Производя вычисления с двумя десятичными знаками.

Решение.

Приводим систему к виду, удобному для релаксации

$$-x_1 + 0.2x_2 + 0.2x_3 + 0.6 = 0$$

$$-x_2 + 0.1x_1 + 0.2x_3 + 0.7 = 0$$

$$-x_3 + 0.1x_1 + 0.1x_2 + 0.8 = 0$$

Выбирая в качестве начальных приближений корней нулевые значения

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(00)} = 0,$$

Находим соответствующие невязки

$$R_1^{(0)} = 0.60; \quad R_2^{(0)} = 0.70; \quad R_3^{(0)} = 0.80.$$

Согласно теории полагаем:

$$\delta x_3^{(0)} = 0.80.$$

Отсюда получим невязки

$$R_1^{(1)} = R_1^{(0)} + 0.2 * 0.8 = 0.60 + 0.16 = 0.76$$

$$R_2^{(1)} = R_2^{(0)} + 0.2 * 0.8 = 0.70 + 0.16 = 0.86$$

$$R_3^{(1)} = 0$$

$k=1.$

$$\delta x_2^{(1)} = 0.86$$

$$R_1^{(2)} = R_1^{(1)} + 0.2 * 0.86 = 0.76 + 0.17 = 0.93$$

$$R_2^{(2)} = 0$$

$$R_3^{(2)} = R_3^{(1)} + 0.1 * 0.86 = 0.09$$

$k=2.$

$$\delta x_1^{(2)} = 0.93$$

$$R_1^{(3)} = 0$$

$$R_2^{(3)} = R_2^{(2)} + 0.93 * 0.1 = 0.09$$

$$R_3^{(3)} = R_3^{(2)} + 0.1 * 0.86 = 0.09 + 0.09 = 0.18$$

$k=3.$

$$\delta x_3^{(3)} = 0.18$$

$$R_1^{(4)} = R_1^{(3)} + 0.2 * 0.18 = 0 + 0.036 = 0.04$$

$$R_2^{(4)} = R_2^{(3)} + 0.2 * 0.18 = 0.09 + 0.04 = 0.13$$

$$R_3^{(4)} = 0$$

$k=4.$

$$\delta x_2^{(4)} = 0.13$$

$$R_1^{(5)} = R_1^{(4)} + 0.2 * 0.13 = 0.04 + 0.026 = 0.07$$

$$R_2^{(5)} = 0$$

$$R_3^{(5)} = R_3^{(4)} + 0.1 * 0.13 = 0.01$$

$k=5$

$$\delta x_1^{(5)} = 0.07$$

$$R_1^{(6)} = 0$$

$$R_2^{(6)} = R_2^{(5)} + 0.1 * 0.07 = 0 + 0.007 = 0.01$$

$$R_3^{(6)} = R_3^{(5)} + 0.1 * 0.07 = 0.01 + 0.01 = 0.02$$

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

x_1	R_1	x_2	R_2	x_3	R_3
0	0.60	0	0.70	0 0.80	0.80
	0.76	0.86	0.86		0
0.93	0.93		0		0.09
	0		0.09	0.18	0.18
	0.04	0.13	0.13		0
0.07	0.07		0		0.01
	0		0.01	0.02	0.02

$k=6.$

$$\delta x_3^{(6)} = 0.02$$

$$R_1^{(7)} = R_1^{(6)} + 0.2 * 0.02 = 0 + 0.004 = 0.00$$

$$R_2^{(7)} = R_2^{(6)} + 0.2 * 0.02 = 0.01 + 0.004 = 0.01$$

$$R_3^{(7)} = 0$$

$k=7.$

$$\delta x_2^{(7)} = 0.01$$

$$R_1^{(8)} = R_1^{(7)} + 0.2 * 0.01 = 0.00 + 0.002 = 0.00$$

$$R_2^{(8)} = 0$$

$$R_3^{(8)} = R_3^{(7)} + 0.1 * 0.01 = 0 + 0.001 = 0.00$$

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

x_1	R_1	x_2	R_2	x_3	R_3
0	0.60	0	0.70	0 0.80	0.80
	0.76	0.86	0.86		0
0.93	0.93		0		0.09
	0		0.09	0.18	0.18
	0.04	0.13	0.13		0
0.07	0.07		0		0.01
	0		0.01	0.02	0.02
	0	0.01	0.01		0
	0.00		0.00		0.00
1.00		1.00		1.00	

Суммируя все приращения $\delta x_i^{(k)}$, ($i = 1, 2, 3; k = 0, 1, \dots$),
получаем значения корней

$$x_1 = 0 + 0.93 + 0.07 = 1.00$$

$$x_2 = 0 + 0.86 + 0.18 + 0.01 = 1.00$$

$$x_3 = 0 + 0.80 + 0.18 + 0.02 = 1.00$$

```
Procedure Vvod(var a: matrix);  
Var i,j: integer;  
    s: real;  
begin  
    {Генерируем коэффициенты при неизвестных  
    (матрица A)}  
    Randomize;  
    for i:=1 to n do  
        for j:=1 to n do  
            if i <> j then a[i,j]:=random(7)+1  
                else a[i,j]:=(random(7)+1)*8;
```

{Генерируем корни}

for i:=1 to n do

 x1[i]:= random(5)-2;

{Считаем столбец свободных членов (вектор B)}

for i:=1 to n do begin

s:=0;

for j:=1 to n do s:=s+a[i,j]*x1[j];

b[i]:=s;

end {i};

end { Vvod };