Лекция 5

# СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

С Л А У

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Дана система линейных алгебраических уравнений

$Ax = b$ , где

$A$ - вещественная квадратная матрица порядка $n$,

$b = (b_1, b_2, ..., b_n)^T$ - заданный вектор,

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ - искомый вектор.

Предполагается, что $\det A \neq 0.$ Тогда для каждого

вектора $b$ система имеет единственное решение.

Вид системы в развернутом виде:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x = b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{1n}x_1 + a_{2n}x_n + \ldots a_{nn}x = b_n.$$

5

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Если задана некоторая произвольная система уравнений, то без предварительного исследования нельзя сказать, имеет ли она какое-либо решение и, в случае, если решение существует, является ли оно *единственным*. На этот вопрос существует три ответа.

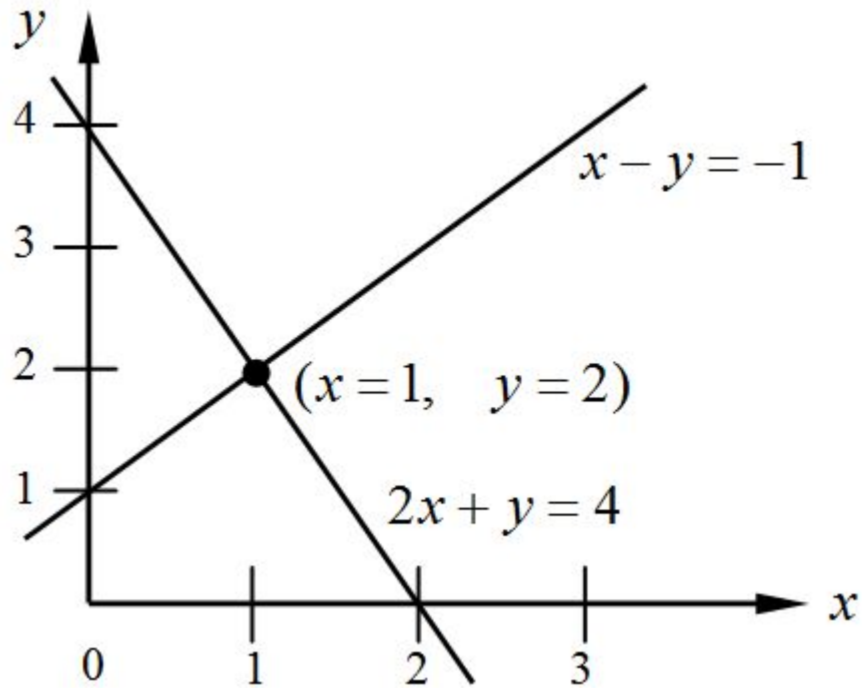
1. Решение системы уравнений существует и является единственным. Например,

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - y = -1. \end{cases}$$

5

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Решение этой системы $x = 1$ и $y = 2$.




Геометрическое представление системы двух линейных уравнений, имеющей единственное решение. Координаты точки пересечения представляют собой искомое решение.

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

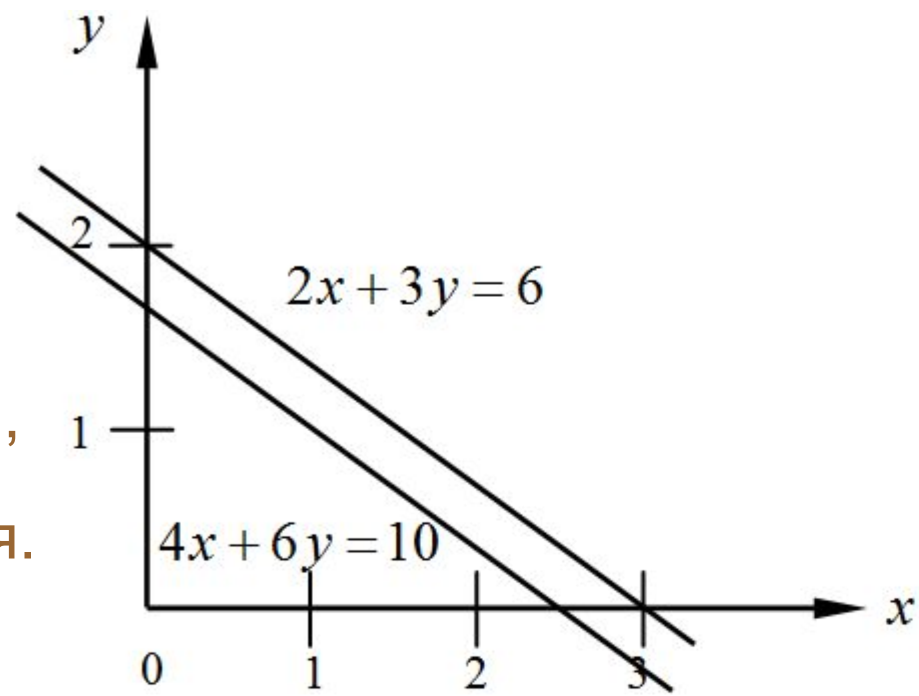
Система уравнений вообще не имеет решения.

$$\begin{cases} 4x + 6y = 10 \\ 2x + 3y = 6. \end{cases}$$

Две прямые параллельны,

они нигде не пересекаются,

и система не имеет решения.

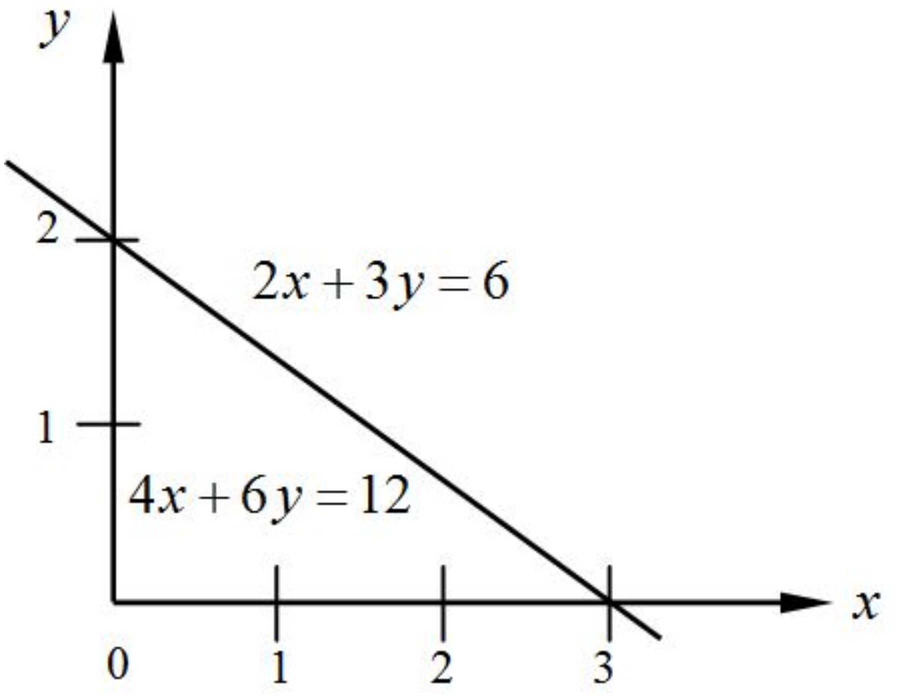



Геометрическое представление системы двух линейных уравнений, не имеющей решения.

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

3. Система уравнений имеет бесконечное множество решений

Два уравнения описывают одну и ту же прямую линию. Любая точка, лежащая на этой линии, является решением этой системы.




Геометрическое представление системы двух линейных уравнений, имеющей бесконечное множество решений

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Две последние системы уравнений называются *вырожденными*. С точки зрения обычной математики линейных уравнений всегда является или вырожденной или невырожденной. С точки же зрения вычислений могут существовать *почти* вырожденные системы, при решении которых получаются недостоверные значения неизвестных.

Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x + 7y = 12 \\ 7x + 10y = 17. \end{cases}$$

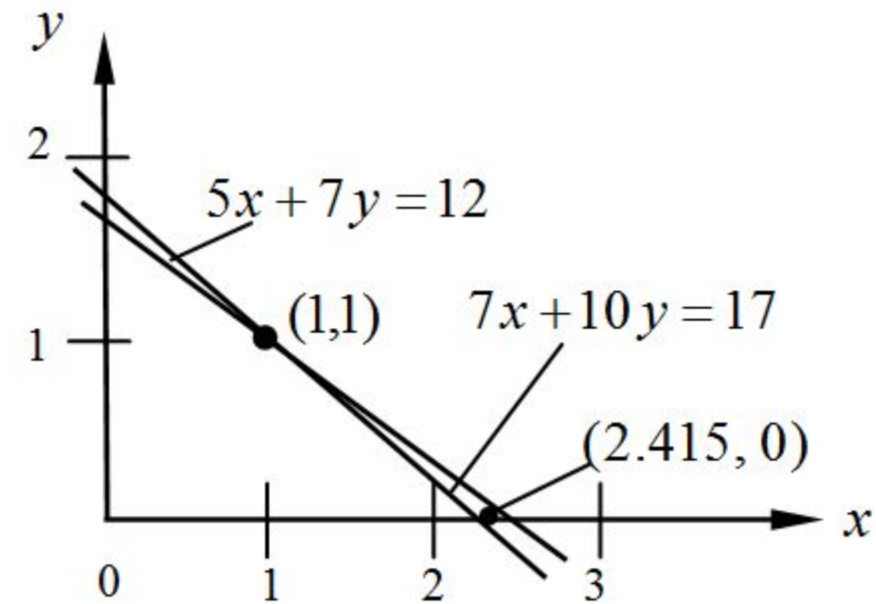
# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Эта система имеет единственное решение $x=1,\ y=1.$

Теперь рассмотрим пару значений $x=2.415,\quad y=0.$

При подстановке этих значений в исходные уравнения получаем

$$\begin{cases} 5x+7y=12.075 \\ 7x+10y=16.905. \end{cases}$$




После округления до двух значащих цифр правые части равенств совпадают с правыми частями исходных уравнений. Дело в том, что две прямые линии, описываемые двумя уравнениями этой системы, *почти* параллельны.

Системы такого типа называются *плохо обусловленными*.

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Методы решения СЛАУ подразделяются на

- *прямые (конечные, точные);*
- *итерационные (бесконечные, приближенные).*

Прямые:

Гаусса

LU-разложений

Жордано

Квадратного корня

Итерационные:

Простых итераций

Зейделя

Релаксаций

# МЕТОД ГАУССА

Метод основан на идее последовательного исключения неизвестных. Введем $n-1$ множителей

$$m_i = \frac{a_{i1}}{a_{11}}, \quad i = 2, 3, \dots, n$$

и вычтем из каждого уравнения первое, умноженное на $m_i$

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Обозначая

$$a^1_{ij} = a_{ij} - m_i a_{1j}, \quad i = 2, 3, \ldots, n,$$

$$b^1_i = b_i - m_i b_i, \qquad j = 2, 3, \ldots., n,$$

для всех уравнений, начиная со второго, получаем

$$a^1_{i1} = 0, \quad i = 2, 3, \ldots, n.$$

Преобразованная система запишется в виде:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x = b_1$$

$$0 \qquad + a^1_{22}x_2 + \ldots a^1_{2n}x = b^1_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$0 \qquad + a^1_{2n}x_n + \ldots a^1_{nn}x = b^1_n.$$

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Продолжая таким же образом на некотором $k$ -м этапе мы исключаем $x_k$ с помощью множителей

$$m_i^{(k-1)} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad i = k+1, \ldots, n, \qquad a_{kk}^{(k-1)} \neq 0.$$

Тогда

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - m_i^{(k-1)} a_{kj}^{(k-1)},$$
$$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - m_i^{(k-1)} b_k^{(k-1)} \qquad k = 1, \ldots, n-1.$$

При $k = n-1$ происходит исключение $x_{n-1}$

из последнего уравнения.

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Окончательная треугольная система уравнений записывается следующим образом:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x = b_1$$

$$a_{22}^1 x_2 + \ldots a_{2n}^1 x = b_2^1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{nn}^{n-1} x = b_n^{n-1}$$

Такая система уравнений называется *треугольной.*

Приведение матрицы к треугольной называется *прямым ходом.*

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Треугольная система легко решается *обратным ходом* по следующим формулам:

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}, \qquad x_{n-1} = \frac{b_{n-1}^{(n-2)} - a_{n-1,n}^{(n-2)} x_n}{a_{n-1,n-1}^{(n-2)}}, \quad \ldots,$$

$$x_j = \frac{(f_j^{(j-1)} - a_{jn}^{(j-1)} x_n - \ldots - a_{j,j+1}^{(j-1)} x_{j+1})}{a_{jj}^{(j-1)}}, \quad j = n-2, n-3, \ldots, 1.$$

В результате получаем искомое решение.

# Вычисление определителя методом Гаусса

Для вычисления определителя матрицы $A$ решаем систему $Ax = b$ и выполняем прямой ход метода Гаусса:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot a_{33}^{(2)} \cdot \ldots \cdot a_{nn}^{(n-1)}.$$

# М е т о д LU – р а з л о ж е н и й

Пусть $A$ — данная матрица, а $L$ и $U$ - нижняя (левая) и верхняя (правая) треугольные матрицы:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Справедливо следующее утверждение:

*Если все главные миноры квадратной матрицы* $A$ *отличны от нуля, то существуют такие нижняя* $L$ *и верхняя* $U$ *треугольные матрицы, что* $A = LU$.

Если элементы диагонали одной из матриц $L$ или $U$ фиксированы (ненулевые), то такое разложение единственно.

Перемножая нижнюю и верхнюю матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a\grave{}_{nn} \end{pmatrix}.$$

приходим к матрице уравнений размерностью *n*n* :

$$\begin{array}{lll} u_{11} = a_{11}, & u_{12} = a_{12}, & u_{1n} = a_{1n} \\ l_{21}u_{11} = a_{21}, & l_{21}u_{12} + u_{22} = a_{22}, & l_{21}u_{1n} + u_{2n} = a_{2n}, \\ \dots & \dots & \dots \\ l_{n1}u_{11} = a_{n1}, & l_{n1}u_{12} + l_{n2}u_{22} = a_{n2}, & l_{n1}u_{1n} + \dots + u_{nn} = a_{nn}. \end{array}$$

Элементы матриц $L$ и $U$ могут быть вычислены с помощью следующих формул:

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \quad (i \le j),$$

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \right) \quad (i > j).$$

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Запишем исходную систему $Ax = b$ так: $LUx = b$.

Введем вспомогательный вектор $y = \left(y_{1,} y_2, \dots, y_n\right)^T$

решение системы сводится к решению двух систем с треугольными матрицами коэффициентов:

$$\begin{cases} Ly = b, \\ Ux = y. \end{cases}$$

Запишем уравнение $Ly = b$ в развернутом виде:

$$\begin{cases} y_i = b_1 \\ l_{21} y_1 + y_2 = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ l_{n1} y_1 + l_{n2} y_2 + \dots + l_{n,n-1} y_{n-1} = b_n \end{cases}$$

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Все $y_i$ могут быть найдены по формуле:

$$y_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Развернем теперь векторно-матричное уравнение $Ux = y$

$$\begin{cases} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \ldots + u_{1n}x_n = y_1 \\ \qquad u_{22}x_2 + \ldots + u_{2n}x_n = y_2 \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad u_{nn}x_n = y_n \end{cases}$$

Значения неизвестных $x_i$ находятся в обратном порядке:

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left( y_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik} x_k \right), \qquad i = n, n-1, \ldots, 1$$

5



## Метод Жордано

1. Выбирается первая колонка слева, в которой есть хоть одно отличное от нуля значение.

2. Если самое верхнее число в этой колонке есть нуль, то меняется вся первая строка матрицы с другой строкой матрицы, где в этой колонке нет нуля.

3. Все элементы первой строки делятся на верхний элемент выбранной колонки.

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

4. Из оставшихся строк вычитается первая строка, умноженная на первый элемент соответствующей строки, с целью получить первым элементом каждой строки (кроме первой) нуль.

5. Далее проводим такую же процедуру с матрицей, получающейся из исходной матрицы после вычёркивания первой строки и первого столбца.

6. После повторения этой процедуры *n-1* раз получаем верхнюю треугольную матрицу.

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

7. Вычитаем из предпоследней строки последнюю строку, умноженную на соответствующий коэффициент, с тем, чтобы в предпоследней строке осталась только 1 на главной диагонали.

8. Повторяем предыдущий шаг для последующих строк. В итоге получаем единичную матрицу и решение на месте свободного вектора (с ним необходимо проводить все те же преобразования).

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

*Пример.*

Решить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 \qquad\qquad + x_3 = 3 \end{cases}$$

<u>Прямой ход</u>

Исключим переменную $x_1$ из всех уравнений, за исключением первого. Поменяем местами 1 и 3 уравнения (порядок уравнений в системе не имеет значения).

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Из уравнения 2 вычитаем уравнение 1, умноженное на 3.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 3 \\ x_2 - 5x_3 = -6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -6 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Из уравнения 3 вычитаем уравнение 1, умноженное на 2.

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + x_3 = 3 \\ \qquad x_2 - 5x_3 = -6 \\ \qquad x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \end{array}\right)$$

Исключим переменную $x_2$ из последнего уравнения.

Из уравнения 3 вычитаем уравнение 2.

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + x_3 = 3 \\ \qquad x_2 - 5x_3 = -6 \\ \qquad\qquad 2x_3 = \ \ 2 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Обратный ход.

Коэффициенты уравнения 3 разделим на 2.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 3 \\ x_2 - 5x_3 = -6 \\ x_3 = 1 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Исключим переменную $x_3$ из 1 и 2 уравнений.

Из уравнения 1 вычитаем уравнение 3.

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 - 5x_3 = -6 \\ x_3 = 1 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

5

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

К уравнению 2 прибавим уравнение 3, умноженное на 5.

$$\begin{cases} x_1 & & & = 2 \\ & x_2 & & = -1 \\ & & x_3 & = 1 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Получаем решение:

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -1$$

$$x_3 = 1 \quad .$$

5

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

# Вычисление элементов обратной матрицы

Обратной к матрице $A$ называют такую матрицу

$A^{-1}$ для которой $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ , где

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

Для вычисления элементов обратной матрицы $A^{-1}$

используем соотношение $A \cdot A^{-1} = E.$

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Умножая матрицу $A$ на $A^{-1}$ и приравнивая каждый элемент произведения соответствующему элементу матрицы $E$ получим систему из $n^2$ уравнений с $n^2$ неизвестными $x_{ij}$ $(i, j = 1,2,\dots,n)$.

Так, умножая почленно каждую строку матрицы $A$ на первый столбец матрицы $A^{-1}$ и каждый раз приравнивая полученное произведение соответствующему элементу первого столбца матрицы $E$, получаем систему

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

$$a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + a_{13}x_{31} + \ldots + a_{1n}x_{n1} = 1,$$

$$a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} + a_{23}x_{31} + \ldots + a_{2n}x_{n1} = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{n1}x_{11} + a_{n2}x_{21} + a_{n3}x_{31} + \ldots + a_{nn}x_{n1} = 0$$

5

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Аналогично при умножении строк матрицы $A$ на второй столбец матрицы $A^{-1}$ образуется еще одна система

$$a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} + a_{13}x_{32} + ... + a_{1n}x_{n2} = 0,$$

$$a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} + a_{23}x_{32} + ... + a_{2n}x_{n2} = 1$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{n1}x_{12} + a_{n2}x_{22} + a_{n3}x_{32} + ... + a_{nn}x_{n2} = 0$$

и так далее…

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

### Метод прогонки

Пусть матрица $A$ содержит много нулевых элементов, расположенных в матрице не беспорядочно, а плотными массивами на заранее известных местах. Тогда расчет по методу Гаусса можно организовать так, чтобы не включать эти элементы. Тем самым объем вычислений и требуемая память уменьшаются, зачастую очень сильно. Наиболее важным случаем метода Гаусса является ***метод прогонки***, применяемый к системам с трехдиагональной матрицей (они часто встречаются при решениях краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка).

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Пусть $A$ – трехдиагональная матрица, имеющая вид:

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & -b_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_2 & c_2 & -b_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a_3 & c_3 & -b_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -a_n & c_n \end{pmatrix}.$$

Обычно для систем с трехдиагональной матрицей, которые часто встречаются при решении краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка, используют метод прогонки.

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Такие системы обычно записываются в каноническом виде

$$a_i x_{i-1} - b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i, \quad 1 \le i \le n, \qquad (*)$$
$$a_1 = c_n = 0.$$

Эта формула называется разностным уравнением второго порядка, или трехточечным уравнением. В этом случае прямой ход (без выбора главного элемента) сводится к исключению элементов $a_i$. Получается треугольная система, содержащая в каждом уравнении только два неизвестных $x_i$ и $x_{i+1}$.

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Поэтому формулы обратного хода имеют следующий вид:

$$x_i = \xi_{i+1} x_{i+1} + \eta_{i+1}, \quad i = n, n-1, \ldots, 1. \quad (**)$$

Уменьшим в формуле (**) индекс на единицу и подставим в уравнение (*):

$$a_i(\xi_i x_i + \eta_i) - b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i.$$

выражая отсюда $x_i$, получим:

$$x_i = \frac{c_i}{b_i - a_i\xi_i} x_{i+1} + \frac{a_i\eta_i - d_i}{b_i - a_i\xi_i}.$$

Чтобы это выражение совпало с (**), надо, чтобы стоящие в его правой части дроби были равны соответственно $\xi_{i+1}$ и $\eta_{i+1}$.

5

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Отсюда получим удобную запись формул прямого хода

$$\xi_{i+1} = \frac{c_i}{(b_i - a_i \xi_i)},$$

$$\eta_{i+1} = \frac{a_i \eta_i - d_i}{b_i - a_i \xi_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (***)$$

В формулах прямого и обратного хода начало счета «замаскировано»: для начала (*развязки*) расчета формально требуется задать величины $\xi_1$, $\eta_1$ и $x_{n+1}$, которые неизвестны. Однако перед этими величинами в формулах стоят множители $a_1$ или $\xi_{n+1} \approx c_n$, равные нулю. Это позволяет начать вычисления, полагая, например, $\xi_1 = \eta_1 = x_{n+1} = 0$.

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Вычисления по формулам прогонки (**) — (***) требуют всего $3n$ ячеек памяти и $9n$ арифметических действий, т.е. они гораздо экономнее общих формул метода исключения.

Попутно можно найти определитель трехдиагональной матрицы:

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} (a_i \xi_i - b_i).$$

# Итерационные методы решения СЛАУ

Дана система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \quad \det A \neq 0$$

Для построения итерационных формул нужно систему

привести к виду: $X = C \cdot X + \beta$ , где

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

В результате получаем:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{1,1}} - \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}} x_2 - \ldots - \frac{a_{1,n}}{a_{1,1}}$$

$$x_2 = \frac{b_2}{a_{2,2}} - \frac{a_{2,1}}{a_{2,2}} x_1 - \ldots - \frac{a_{2,n}}{a_{2,2}}$$

.............................................

$$x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}} - \frac{a_{n,1}}{a_{n,n}} x_1 - \ldots - \frac{a_{n,n+1}}{a_{n,n}} x_{n-1}.$$

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Далее справа подставляем предыдущие приближения $X^k$ начиная с $X^0$ и слева получаем последующие приближения $X^{k+1}$.

В результате получаем итерационные формулы вида:

$$X^{(k+1)} = C \cdot X^{(k)} + \beta$$

Начиная с $X^0$, получим последовательность векторов $X^0, X^1, X^2, ..., X^k, ...$ Если эта последовательность сходится, то она сходится к решению системы.

В результате получаем формулы метода итерации.

# Метод простой итерации

$$x_1^{(k+1)} = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2^{(k)} - \ldots - \frac{a_{1,n}}{a_{11}} x_n^{(k)}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(k)} - \ldots - \frac{a_{2,n}}{a_{22}} x_n^{(k)}$$

..........................................................

$$x_n^{(k+1)} = \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{a_{n,1}}{a_{nn}} x_1^{(k)} - \ldots - \frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} x_{n-1}^{(k)}.$$

Или иначе:

$$x_i^{k+1} = \frac{b_i}{a_{i,i}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} x_j^k$$

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Эти формулы используем при $k = 0, 1,...$ и получаем последовательность векторов $X^0, X^1, X^2, ..., X^k$.

За начальный вектор $X^0$ будем брать столбец свободных членов $\beta$ или $X^0 = 0$.

Условие окончания поиска: $\left| x_i^k - x_i^{k+1} \right| \le \varepsilon, \quad i = \overline{1..n}$

Достаточные условия сходимости метода:

$$\left| a_{ii} \right| > \sum_{j=1}^{n} \left| a_{ij} \right| \quad \text{или} \quad \left| a_{jj} \right| > \sum_{i=1}^{n} \left| a_{ij} \right|$$

Если условия выполнены, то процесс простой итерации сходится к единственному решению системы *независимо от выбора начального приближения*.

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Говорят, что матрица $A_{nn}$ обладает свойством диагонального преобладания, если

$$|a_{ii}| \geq \sum_{i \neq j} |a_{ij}|, i = 1, \ldots, n$$

, ***причем хотя бы одно неравенство является строгим***. Если все неравенства строгие, то говорят, что матрица $A_{nn}$ обладает ***строгим*** диагональным преобладанием.

# Метод Зейделя

Идея метода Зейделя заключается в том, что при вычислении $(k+1)$-го приближения неизвестной $x_i$ учитываются уже вычисленные ранее $(k+1)$-е приближения неизвестных

$$x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$$

Итерационные формулы метода Зейделя будут иметь следующий вид:

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

$$x_1^{(k+1)} = \frac{b_1}{a_{11}} - \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j^{(k)},$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(k+1)} - \sum_{j=3}^{n} \frac{a_{2j}}{a_{22}} x_j^{(k)},$$

..............................................................

$$x_n^{(k+1)} = \frac{b_n}{a_{nn}} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_{nj}}{a_{nn}} x_j^{(k+1)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Или иначе:

$$x_i^{k+1} = \frac{b_i}{a_{i,i}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} x_j^{k}$$

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Условия сходимости метода Зейделя те же, что у метода простой итерации : преобладание диагональных элементов.

Для метода Зейделя имеется еще теорема о сходимости:

***Пусть матрица $A$ — вещественная, симметричная, определенная матрица. Тогда метод Зейделя сходится.***

# Метод релаксации (ослабления)

Пусть имеем систему линейных уравнений

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n = b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nn}x_n = b_n$$

Преобразуем эту систему с.о.: перенесем правую часть налево и разделим первое уравнение на $-a_{11}$, второе на $-a_{22}$ и т.д. Тогда получим систему, *приготовленную к релаксации*:

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

$$
\begin{aligned}
-x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n + d_1 &= 0 \\
c_{21}x_1 - \quad x_2 + \ldots + c_{2n}x_n + d_2 &= 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \ldots - x_n + \quad d_n &= 0
\end{aligned}
$$

где

$$c_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \quad (i \neq j), \qquad d_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$$

5

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Пусть $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \quad x_2^{(0)}, \quad ..., x_n^{(0)})$ - начальное приближение решения системы. Подставляя эти значения в систему, получим *невязки*

$$R_1^{(0)} = d_1 - x_1^{(0)} + \sum_{j=2}^{n} c_{1j} x_j^{(0)}$$

$$R_2^{(0)} = d_2 - x_2^{(0)} + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq 2}}^{n} c_{2j} x_j^{(0)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$R_n^{(0)} = d_n - x_n^{(0)} + \sum_{j=1}^{n-1} c_{nj} x_j^{(0)}$$

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Если одной из неизвестных $x_s^{(0)}$ дать приращение $\delta x_s^{(0)}$, то соответствующая невязка $R_s^{(0)}$ уменьшится на величину $\delta x_s^{(0)}$, а все остальные невязки $R_i^{(0)}\ (i \neq s)$ увеличатся на величину $c_{is}\delta x_s^{(0)}$. Таким образом, чтобы обратить очередную невязку $R_s^{(0)}$ в нуль, достаточно величине $x_s^{(0)}$ дать приращение $\delta x_s^{((0)} = R_s^{(0)}$,

И мы будем иметь: $R_s^{(1)} = 0$ и $R_i^{(1)} = R_i^{(0)} + c_{is}\delta x_s^{(0)}$ при $i \neq s)$.

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Метод релаксации заключается в том, что на каждом шаге обращают в нуль максимальную по модулю невязку путем изменения значения соответствующей компоненты приближения. Процесс заканчивается, когда все невязки будут равны нулю с заданной точностью $\left|R_j^{(k)}\right| < \varepsilon, \quad j = \overline{1,n}$.

Решение получаем по формулам: $\left| x_i \approx x_i^{(0)} + \sum_j \delta x_i^{(j)} \right.$

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

*Пример.* Методом релаксации решить систему

$$10x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 6$$
$$-x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 7$$
$$-x_1 - x_2 + 10x_3 = 8$$

Производя вычисления с двумя десятичными знаками.

*Решение.*

Приводим систему к виду, удобному для релаксации

$$-x_1 + 0.2x_2 + 0.2x_3 + 0.6 = 0$$
$$-x_2 + 0.1x_1 + 0.2x_3 + 0.7 = 0$$
$$-x_3 + 0.1x_1 + 0.1x_2 + 0.8 = 0$$

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Выбирая в качестве начальных приближений корней нулевые значения

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(00} = 0,$$

Находим соответствующие невязки

$$R_1^{(0)} = 0.60; \quad R_2^{(0)} = 0.70; \quad R_3^{(0)} = 0.80.$$

Согласно теории полагаем:

$$\delta x_3^{(0)} = 0.80.$$

Отсюда получим невязки

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

$$R_1^{(1)} = R_1^{(0)} + 0.2 * 0.8 = 0.60 + 0.16 = 0.76$$

$$R_2^{(1)} = R_2^{(0)} + 0.2 * 0.8 = 0.70 + 0.16 = 0.86$$

$$R_3^{(1)} = 0$$

k=1.

$$\delta x_2^{(1)} = 0.86$$

$$R_1^{(2)} = R_1^{(1)} + 0.2 * 0.86 = 0.76 + 0.17 = 0.93$$

$$R_2^{(2)} = 0$$

$$R_3^{(2)} = R_3^{(1)} + 0.1 * 0.86 = 0.09$$

5

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

| $x_1$ | $R_1$ | $x_2$ | $R_2$ | $x_3$ | $R_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.60 | 0 | 0.70 | 0<br>0.80 | 0.80 |
| | 0.76 | 0.86 | 0.86 | | 0 |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

k=2.

$$\delta x_1^{(2)} = 0.93$$

$$R_1^{(3)} = 0$$

$$R_2^{(3)} = R_2^{(2)} + 0.93 * 0.1 = 0.09$$

$$R_3^{(3)} = R_3^{(2)} + 0.1 * 0.86 = 0.09 + 0.09 = 0.18$$

k=3.

$$\delta x_3^{(3)} = 0.18$$

$$R_1^{(4)} = R_1^{(3)} + 0.2 * 0.18 = 0 + 0.036 = 0.04$$

$$R_2^{(4)} = R_2^{(3)} + 0.2 * 0.18 = 0.09 + 0.04 = 0.13$$

$$R_3^{(4)} = 0$$

5

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

| $x_1$ | $R_1$ | $x_2$ | $R_2$ | $x_3$ | $R_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.60 | 0 | 0.70 | 0<br>0.80 | 0.80 |
| | 0.76 | 0.86 | 0.86 | | 0 |
| 0.93 | 0.93 | | 0 | | 0.09 |
| | 0 | | 0.09 | 0.18 | 0.18 |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

k=4.

$$\delta x_2^{(4)} = 0.13$$

$$R_1^{(5)} = R_1^{(4)} + 0.2 * 0.13 = 0.04 + 0.026 = 0.07$$

$$R_2^{(5)} = 0$$

$$R_3^{(5)} = R_3^{(4)} + 0.1 * 0.13 = 0.01$$

k=5

$$\delta x_1^{(5)} = 0.07$$

$$R_1^{(6)} = 0$$

$$R_2^{(6)} = R_2^{(5)} + 0.1 * 0.07 = 0 + 0.007 = 0.01$$

$$R_3^{(6)} = R_3^{(5)} + 0.1 * 0.07 = 0.01 + 0.01 = 0.02$$

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

| $x_1$ | $R_1$ | $x_2$ | $R_2$ | $x_3$ | $R_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.60 | 0 | 0.70 | 0<br>0.80 | 0.80 |
| | 0.76 | 0.86 | 0.86 | | 0 |
| 0.93 | 0.93 | | 0 | | 0.09 |
| | 0 | | 0.09 | 0.18 | 0.18 |
| | 0.04 | 0.13 | 0.13 | | 0 |
| 0.07 | 0.07 | | 0 | | 0.01 |
| | 0 | | 0.01 | 0.02 | 0.02 |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

k=6.

$$\delta x_3^{(6)} = 0.02$$

$$R_1^{(7)} = R_1^{(6)} + 0.2 * 0.02 = 0 + 0.004 = 0.00$$

$$R_2^{(7)} = R_2^{(6)} + 0.2 * 0.02 = 0.01 + 0.004 = 0.01$$

$$R_3^{(7)} = 0$$

k=7.

$$\delta x_2^{(7)} = 0.01$$

$$R_1^{(8)} = R_1^{(7)} + 0.2 * 0.01 = 0.00 + 0.002 = 0.00$$

$$R_2^{(8)} = 0$$

$$R_3^{(8)} = R_3^{(7)} + 0.1 * 0.01 = 0 + 0.001 = 0.00$$

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

| $x_1$ | $R_1$ | $x_2$ | $R_2$ | $x_3$ | $R_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.60 | 0 | 0.70 | 0<br>0.80 | 0.80 |
| | 0.76 | 0.86 | 0.86 | | 0 |
| 0.93 | 0.93 | | 0 | | 0.09 |
| | 0 | | 0.09 | 0.18 | 0.18 |
| | 0.04 | 0.13 | 0.13 | | 0 |
| 0.07 | 0.07 | | 0 | | 0.01 |
| | 0 | | 0.01 | 0.02 | 0.02 |
| | 0 | 0.01 | 0.01 | | 0 |
| | 0.00 | | 0.00 | | 0.00 |
| **1.00** | | **1.00** | | **1.00** | |

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Суммируя все приращения $\delta x_i^{(k)}$, $(i = 1,2,3;\ k = 0,1...)$,

получаем значения корней

$$x_1 = 0 + 0.93 + 0.07 = 1.00$$

$$x_2 = 0 + 0.86 + 0.18 + 0.01 = 1.00$$

$$x_3 = 0 + 0.80 + 0.18 + 0.02 = 1.00$$

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

```
Procedure Vvod(var a: matrix);
Var   i,j: integer;
      s: real;
begin
 {Генерируем коэффициенты при неизвестных
   (матрица A)}
 Randomize;
  for i:=1 to n do
    for j:=1 to n do
      if i<>j then a[i,j]:=random(7)+1
            else a[i,j]:=(random(7)+1)*8;
```

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

```
{Генерируем  корни}
 for i:=1 to n do
    x1[i]:= random(5)-2;

 {Считаем столбец свободных членов (вектор B)}
 for i:=1 to n do begin
   s:=0;
   for j:=1 to n do s:=s+a[i,j]*x1[j];
     b[i]:=s;
   end {i};
end { Vvod };
```