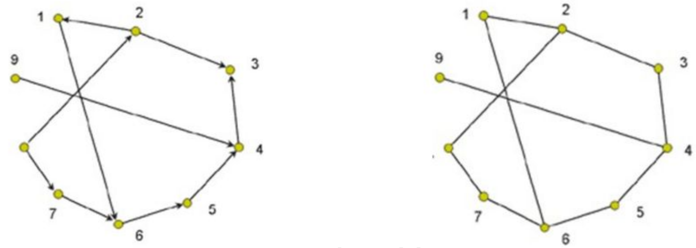
Графы

Подготовил
Студент группы ПС-13
Щербаков Егор

Основные понятия теории графов

- **Теория графов** – обширный самостоятельный раздел дискретной математики. Используется при проектировании компьютерных сетей, трубопроводов, строительстве дорог для минимизации затрат на прокладку коммуникаций.
- Граф это конечное множество вершин V и множество ребер R, соединяющих пары вершин, G=(V,R). Мощности множеств V и R равны N и M. Множество ребер может быть пустым. Примеры вершин – объекты любой природы (населенные пункты, компьютерные сети). Примеры ребер – дороги, стороны, линии.
- Вершины, соединенные ребром, называются **смежными**. Ребра, имеющие общую вершину, также называются **смежными**. Ребро и любая из его двух вершин называются **инцидентными**. **Степень** вершины – количество инцидентных ей ребер. Каждый граф можно представить на плоскости множеством точек, соответствующих вершинам, которые соединены линиями, соответствующими ребрам.



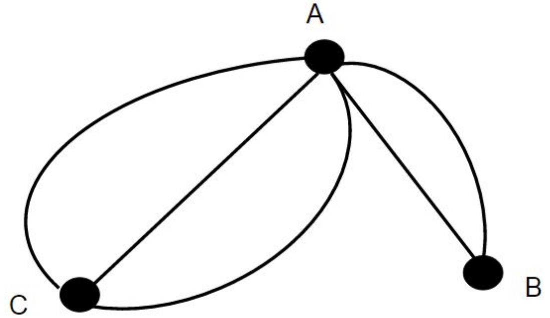
Ориентированныи граф и Неориентированный граф

Основные понятия теории графов

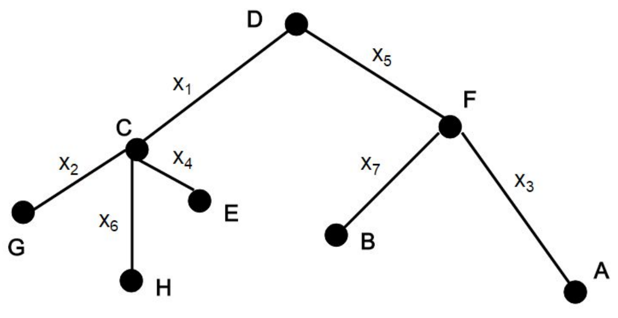
- В орграфе ребро называют **дугой**.
- **Маршрут** графа – последовательность вершин и ребер.
- Маршрут **замкнутый** (циклический), если начальная и конечная вершины совпадают.
- Маршрут – **простая цепь**, если все вершины и ребра различны.
- Граф **связный**, если каждая вершина достижима из любой другой.
- Вершины, не имеющие инцидентных ребер, называются **изолированными**.
- **Взвешенный** граф (сеть) – граф, ребрам или дугам которого поставлены в соответствие числа (вес).
- **Вес сети** равен сумме весов ее ребер.

Примеры графов

- Вершины A и B смежные

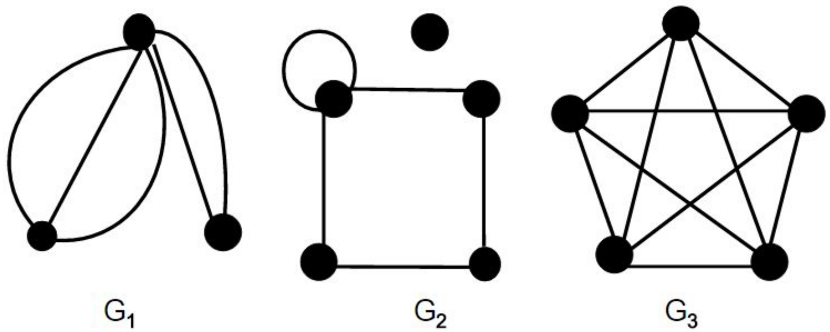


- Ребра x_1 и x_2 с общей вершиной C смежные

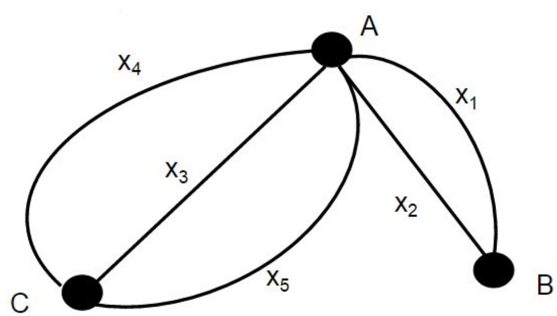


Примеры графов

- Графы G1 и G3 – связанные, а граф G2 – несвязанный



- На рисунке кратными являются, например, рёбра x_1 (A, B), x_2 (A, B). Вершинам A и C инцидентны рёбра x_3, x_4, x_5. Следовательно, ребро AC имеет кратность, равную 3, а ребро AB – кратность, равную 2.



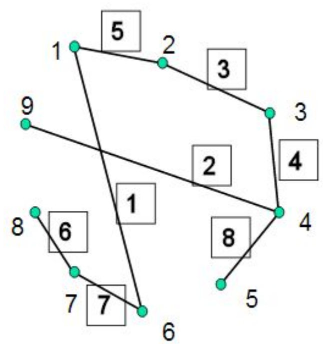
Способы описания графов

- Матрица инциденций
- Матрица смежности
- Списки связи
- Перечни ребер

Матрица инциденций

- N – количество вершин
- M – количество ребер
- Матрица инциденций – это двумерный массив размерности N×M

$$W[i,j]=\begin{cases}1, \text{вершина с номером } i \\ \quad \text{инцидентна ребру с номером } j \\ 0, \text{в противном случае}\end{cases}$$

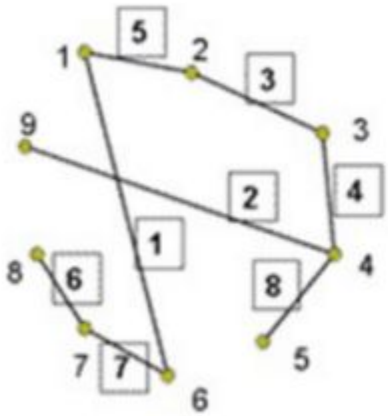


	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0	0	0	1	0	0	0
2	0	0	1	0	1	0	0	0
3	0	0	1	1	0	0	0	0
4	0	1	0	1	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0	0	0	1
6	1	0	0	0	0	0	1	0
7	0	0	0	0	0	1	1	0
8	0	0	0	0	0	1	0	0
9	0	1	0	0	0	0	0	0

Матрица смежности

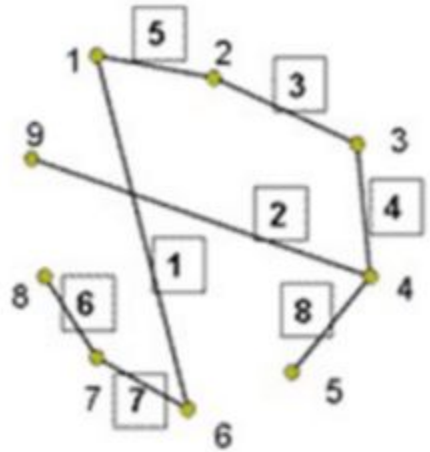
- Матрица смежности – это двумерный массив N*N.

$$A[i,j]=\begin{cases}1, \text{если вершины с данными номерами смежны}\\0, \text{в противном случае}\end{cases}$$



	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
2	1	0	1	0	0	0	0	0	0
3	0	1	0	1	0	0	0	0	0
4	0	0	1	0	1	0	0	0	1
5	0	0	0	1	0	0	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0	1	0	0
7	0	0	0	0	0	1	0	1	0
8	0	0	0	0	0	0	1	0	0
9	0	0	0	1	0	0	0	0	0

Матрица смежности сети(с учетом весов ребер)



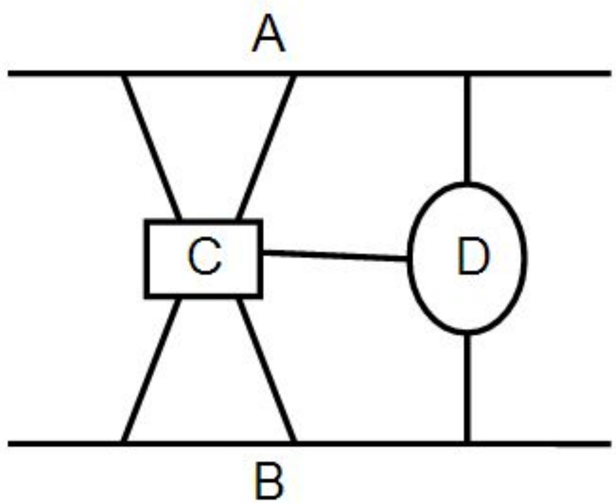
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	5	0	0	0	1	0	0	0
2	5	0	3	0	0	0	0	0	0
3	0	3	0	4	0	0	0	0	0
4	0	0	4	0	8	0	0	0	2
5	0	0	0	8	0	0	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0	7	0	0
7	0	0	0	0	0	7	0	6	0
8	0	0	0	0	0	0	6	0	0
9	0	0	0	2	0	0	0	0	0

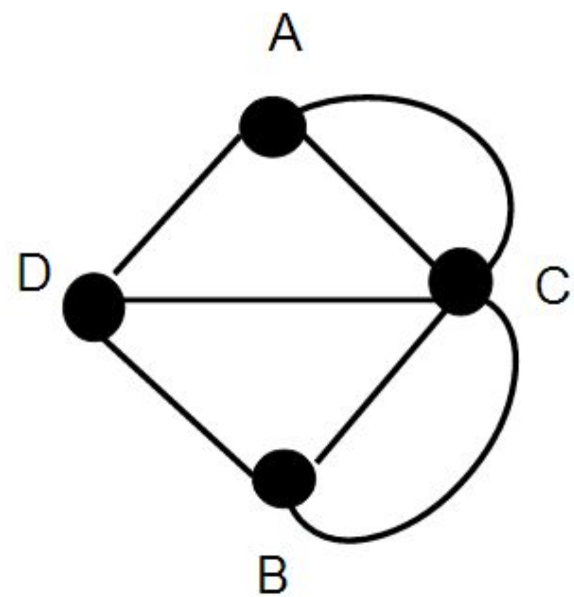
Эйлеровы графы

- **Эйлеровым путем** в графе называется путь, содержащий все ребра графа.
- **Эйлеровым циклом** или **эйлеровой цепью** называется цикл, содержащий все ребра графа и притом по одному разу. Граф, обладающий эйлеровым циклом, называется эйлеровым графом.
- Замкнутую линию, если ее можно начертить, не отрывая карандаша от бумаги, проходя при этом каждый участок в точности один раз, принято называть уникурсальной. Рисунок графа, обладающего эйлеровым путем или циклом, является уникурсальной линией.
- **Теорема 1**. Если граф G(V,R) обладает эйлеровым циклом, то он связный и все его вершины четные.
- **Теорема 2**. Если граф G(V,R) связный и все его вершины четные, то он обладает эйлеровым циклом.

Задача о Кенигсбергских мостах

- Необходимо обойти все 7 мостов так, чтобы на каждом побывать только один раз и вернуться к началу пути.





Решение задачи

- Представим задачу в виде графа, в котором острова и берега обозначим точками, т.е. они будут вершинами графа. Мосты будут рёбрами графа. Поскольку необходимо пройти по всем мостам по одному разу и вернуться туда, откуда начали обход мостов, это значит, что нужно по всем рёбрам графа пройти по одному разу, т.е. образовать эйлеров цикл. Следовательно, нужно проверить, является ли рассматриваемый граф эйлеровым.
- Но в теореме говорится о том, что для того чтобы граф был эйлеровым необходимо и достаточно, чтобы граф был связным, и все вершины были чётные, т.е. чтобы из каждой вершины исходило чётное количество рёбер. Если посчитать рёбра, то увидим, что вершины A и B, которыми обозначены берега, имеют степень 3, следовательно, они нечётные. Таким образом, условие теоремы не выполнено, значит ответ задачи отрицательный: невозможно обойти все мосты по одному разу и вернуться в исходную точку.

Гамильтоновы графы

- Граф, обладающий гамильтоновым циклом, называется гамильтоновым графом. Гамильтоновым циклом, называется цикл, или путь, проходящий через каждую вершину графа в точности по одному разу.
- Эйлеровы и гамильтоновы пути сходны по способу задания. Первые содержат все ребра, и притом по одному разу, вторые – все вершины по одному разу. Для решения вопроса о существовании эйлерова цикла в графе достаточно выяснить, все ли его вершины четные.

Условия существования гамильтоновых циклов

- Всякий полный граф является гамильтоновым, так как содержит простой цикл, которому принадлежат все вершины данного графа.
- Если граф, помимо простого цикла, проходящего через все его вершины, содержит и другие ребра, то он также является гамильтоновым.
- Если граф имеет один гамильтонов цикл, то он может иметь и другие гамильтоновы циклы.

Спасибо за внимание