# РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПО ПРАВИЛУ КРАМЕРА, МАТРИЧНЫМ МЕТОДОМ, МЕТОДОМ ГАУССА

## ПОЛНАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

# Основные обозначения:

- система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

- матричная запись СЛАУ: $A \cdot X = B$ ,

  где

*Основная матрица системы*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

*Столбец неизвестных системы* , *Столбец свободных членов*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

- расширенная матрица системы: $$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right);$$

- однородная СЛАУ: $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0\,; \end{cases}$$

# Методы решения СЛАУ:

- правило Крамера;
- матричный метод;
- метод Гаусса

# Правило Крамера

- Решает системы $n$ – линейных алгебраических уравнений с $n$ – неизвестными общего вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

причем определитель основной матрицы системы отличен от нуля.

**Определение.** Определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных системы называется ***главным определителем системы***, обозначается Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1i} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2i} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{ni} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

# Теорема (*правило Крамера*)

- Если главный определитель Δ системы размерности $n \times n$ отличен от нуля, то система имеет решение, и притом, единственное. Это решение можно найти по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \ldots \quad x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где каждый определитель $\Delta i$ получается из определителя Δ путем замены соответствующего *i*-го столбца столбцом свободных членов:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

# Метод Гаусса решения СЛАУ

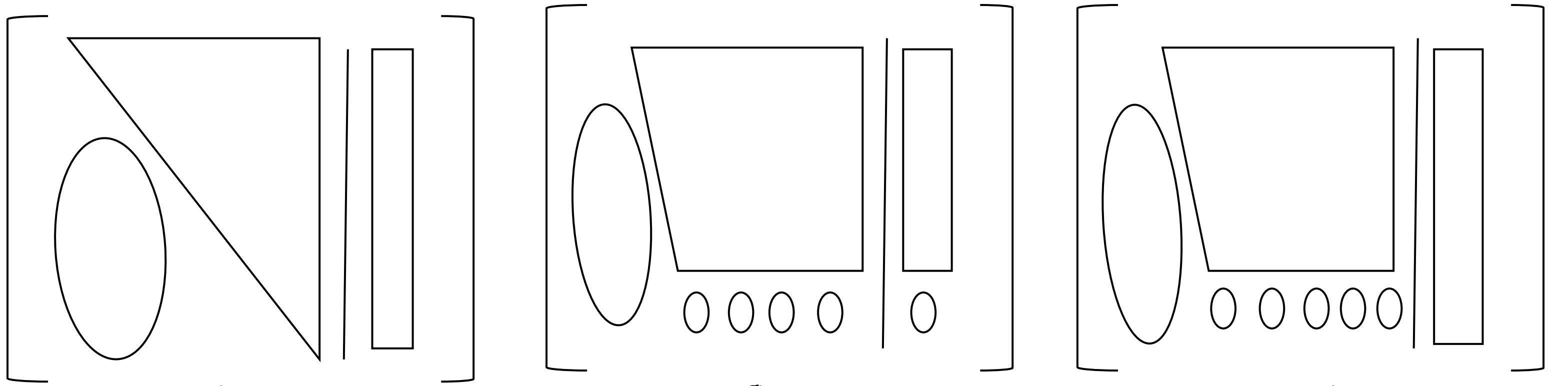
# *Суть метода Гаусса*

Чтобы решить систему $m$ – линейных алгебраических уравнений с $n$ – неизвестными методом Гаусса, необходимо записать расширенную матрицу системы и, используя элементарные преобразования расширенной матрицы системы, привести ее к трапециевидной форме.

# ***Элементарные преобразования расширенной матрицы системы*** :

1. перестановка строк (столбцов) матрицы;
2. умножение строки матрицы на действительное число отличное от нуля и сложение с другой строкой;
3. вычеркивание строки матрицы, все элементы которой равны нулю;
4. вычеркивание одной из пропорциональных строк матрицы;
5. умножение строки матрицы на число отличное от нуля.

В результате этих преобразований матрица примет один их трех видов:



а) б) в)

- Если матрицу можно свести к виду ***а)*** , то система совместна и имеет ***единственное решение***.
- Если матрицу можно свести к виду ***б)*** , то система совместна и имеет ***множество решений***.
- Если матрицу можно свести к виду ***в)*** , то система ***несовместна***.

# Теорема Кронекера-Капелли

Для того чтобы СЛАУ была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы системы был равен рангу расширенной матрицы, то есть $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(\overline{A}) = r$, причем, если $r = n$ – числу неизвестных, то система имеет единственное решение, если $r < n$, то система имеет множество решений.

$\overline{A}$

| **ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ТЕОРЕМЫ КРОНЕКЕРА-КАПЕЛЛИ** | Ранг | Система неоднородная $AX=B$, где $m$ – уравнений, $n$ – неизвестных | Система однородная $AX=0$, где $m$ – уравнений, $n$ – неизвестных |
|---|---|---|---|
| 1. | $\text{rang}(A) \neq \text{rang}(\overline{A})$ | Система несовместна | Это невозможно при $b_1=b_2=\ldots=b_n=0$, то есть однородная система всегда совместна |
| 2. | $\text{rang}(A) = \text{rang}(\overline{A})$ | Система совместна | Совместна |
| | а) $r = n$ | Решение единственное | Решение только тривиальное ($x_1=x_2=\ldots=x_n=0$) |
| | б) $r < n$ | Решений множество | Имеются нетривиальные решения (решений множество) |

# Общая схема исследования и решения систем линейных алгебраических уравнений

1. Записываем СЛАУ в ***матричном виде***.
2. Выписываем ***расширенную матрицу*** системы.
3. Находим ***ранг основной и расширенной матриц*** системы:

а) если ***ранги*** матриц ***различны***, то система ***несовместна***;

б) если ***ранги*** матриц ***равны***, причем $\boldsymbol{r = n}$, где $n$ – число неизвестных, то система ***совместна***, имеет ***единственное решение***, которое может быть найдено с помощью методов: <u>правила Крамера, матричного метода, метода Гаусса;</u>

в) если ***ранги*** матриц ***равны***, но $\boldsymbol{r < n}$, то система ***совместна***, имеет ***множество решений***, которое можно найти <u>только методом Гаусса</u>, вводя $r$ – базисных переменных и $n$ – свободных переменных.

# Пример. Решить СЛАУ:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = -1 \\ 2x - y + 3z = 13 \\ x + 2y - z = 9 \end{cases}$$

**Запишем расширенную матрицу системы, составленную из коэффициентов системы и свободных слагаемых.**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right)$$

**С помощью элементарных преобразований сведем расширенную матрицу к подобной матрице ступенчатого вида:**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Получаем систему линейных уравнений, эквивалентную исходной системе уравнений.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 9 \\ \qquad\quad y - z = 1 \\ \qquad\qquad\quad z = 4 \end{cases}$$

**Ответ:** $x = 3, y = 5, z = 4$

# Самостоятельная работа

## 1 вариант

Решить СЛАУ методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 5 \\ 5x + y + 4z = 1 \\ x + 6y + 7z = 0 \end{cases}$$

## 2 вариант

Решить СЛАУ методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = -5 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$