



**БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ**



**УНИВЕРСИТЕТ**



# **кафедра информационно- телекоммуникационных систем и технологий**

**Дисциплина Анализ информационной безопасности  
телекоммуникационных систем**

**Тема 2 Методы помехоустойчивого приема дискретных  
сообщений**

**СОХРАНИМ ЛУЧШЕЕ!  
ПРИУМНОЖИМ ДОСТИГНУТОЕ!  
СДЕЛАЕМ ЭТО ВМЕСТЕ!**



**профессор  
Белов Сергей Павлович**

# **Лекция №2 Основные сведения о различения двух сигналов при наличии аддитивного белого шума**

## **ВОПРОСЫ**

- 1. Оптимальный алгоритм различения двух сигналов при наличии аддитивного белого шума.**
- 2. Структура оптимальных приемников различения двух сигналов при наличии аддитивного белого шума.**

**ЦЕЛЮ лекции является изучение принципов различения двух сигналов при наличии аддитивного белого шума.**

**Задачи лекции: изложение особенностей решения задачи оптимального приема сигналов при наличии помех в виде белого шума.**

## **Литература:**

- 1 Белов, С.П., Жиляков, Е.Г. Анализ информационной безопасности телекоммуникационных систем: Учебно-методический комплекс. : <http://pegas.bsu.edu.ru/course/view.php?id=8360>  
Белгород, 2015 год.**
- 2 Скляр, Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение СПб, Киев, 2003 год.**

## Вопрос 1 Оптимальный алгоритм различения двух сигналов при наличии аддитивного белого шума

Результаты, полученные в предыдущей лекции, дают возможность установить структуру оптимального приемника различения двух сигналов на фоне белого гауссовского шума. Чтобы конкретизировать эти выражения, необходимо знать функции  $W(y|s_1)$  и  $W(y|s_2)$ . Рассмотрим сначала функцию  $W(y|s_1)$ . Так как сигнал  $s_1$  является детерминированным, т.е. все его параметры известны точно, то очевидно, что в данном случае закон распределения колебания  $y(t) = s_1(t) + n(t)$  полностью определяется многомерным законом распределения помехи  $n(t)$ , которая присутствует в колебании  $y(t)$ .

Следовательно, 
$$W(y|s_1) = W_m(n) = W_m(y - s_1). \quad (1)$$

и для сигнала  $s_2$  
$$W(y|s_2) = W_m(n) = W_m(y - s_2). \quad (2)$$

В этих выражениях  $W_m(n)$  - многомерное распределение нормального белого шума, рассматриваемого в некоторой полосе частот  $\Delta f$ .

Как известно, такое распределение может быть записано в виде:

$$W_m(n) = \prod_{k=1}^m W_1(n_k) = \frac{1}{(2\pi\sigma_{ш}^2)^{m/2}} \exp\left(-\frac{\sum_{k=1}^m n_k^2}{2\sigma_{ш}^2}\right), \quad (3)$$

где  $m$  - размерность пространства шума;  $W_1(n)$  - одномерная плотность распределения шума;  $\sigma_{ш}^2$  - (мощность шума в полосе  $\Delta f$ ).

## Вопрос1 Оптимальный алгоритм различения двух сигналов при наличии аддитивного белого шума

Выражение (3) представляет собой определенную идеализацию, так как оно предполагает замену непрерывных реализаций белого шума набором случайных независимых значений этого шума, взятых в  $m$  точках интервала анализа  $0 \leq t \leq \tau_0$ . Эти значения берутся в соответствии с теоремой Котельникова, и их число равно

$$m = 2 \cdot \Delta f \cdot \tau_0 \quad (4)$$

Чем больше величина  $m$ , тем точнее выражение (3) определяет многомерное распределение белого шума. С физической точки зрения требуемое условие ( $m \gg 1$ ) означает, что искажения сигнала до начала анализа колебания  $y(t)$  на интервале времени  $0 \leq t \leq \tau_0$  должны полностью отсутствовать. Естественно, что искажения сигнала до начала анализа тем меньше, чем шире полоса частот  $\Delta f$ , в которой рассматривается колебание  $y(t)$ . При достаточно больших значениях  $m$  ( $m \gg 1$ ), что соответствует условию, когда шум может считаться белым, справедливо равенство

$$\frac{1}{2\Delta f} \sum_{k=1}^m n^2_k = \int_0^{\tau_0} n^2(t) dt \quad (5)$$

Тогда выражение (3) принимает вид

$$W_m(n) = \frac{1}{(2\pi\sigma_{uu}^2)^{m/2}} \exp\left[-\frac{1}{N_0} \int_0^{\tau_0} n^2(t) dt\right], \quad (6)$$

где учтено, что  $\sigma_{uu}^2 = N_0 \Delta f$ .

# Вопрос1 Оптимальный алгоритм различения двух сигналов при наличии аддитивного белого шума

Принимая во внимание (3), имеем

$$W(y | s_1) = \frac{1}{(2\pi\sigma_u^2)^{m/2}} \exp\left\{-\frac{1}{N_0} \int_0^{\tau_0} [y(t) - s_1(t)]^2 dt\right\}, \quad (7)$$

$$W(y | s_2) = \frac{1}{(2\pi\sigma_u^2)^{m/2}} \exp\left\{-\frac{1}{N_0} \int_0^{\tau_0} [y(t) - s_2(t)]^2 dt\right\} \quad (8)$$

Используя эти выражения, образуем отношение правдоподобия

$$\Lambda_{12} = \frac{p(s_1)}{p(s_2)} \exp\left\{\frac{1}{N_0} \int_0^{\tau_0} [y(t) - s_2(t)]^2 dt - \frac{1}{N_0} \int_0^{\tau_0} [y(t) - s_1(t)]^2 dt\right\} \quad (9)$$

Полученное выражение для  $\Lambda_{12}$  принципиально уже решает задачу оптимального различения двух сигналов. Действительно, в этом выражении функционально связаны все известные и неизвестные величины. Поэтому, зная  $\Lambda_{12}$  и поступая в соответствии с байесовским правилом, можно решить, какой из двух возможных сигналов ( $s_1$  или  $s_2$ ) был передан, а, следовательно, какой из элементов сообщения ( $x_1$  или  $x_2$ ) необходимо воспроизвести на выходе канала. Сказанное можно условно записать так:

принят сигнал  $s_1(t)$ , если  $\Lambda_{12} > 1$

(10)

принят сигнал  $s_2(t)$ , если  $\Lambda_{12} < 1$

Таким образом, (10) с учетом (9) можно рассматривать как искомый

## Вопрос 2 Структура оптимальных приемников различения двух сигналов при наличии аддитивного белого шума

Результаты, полученные в предыдущем вопросе, дают возможность установить структуру оптимального приемника различия двух сигналов при наличии белого гауссовского шума. Однако полученный алгоритм довольно сложен и неудобен для применения. Для упрощения этого алгоритма изменим форму байесовского правила (10), логарифмируя обе части неравенства. Тогда правило примет следующую форму:

принят сигнал  $s_1(t)$ , если  $\ln \Lambda_{12} > 0$

(11)

принят сигнал  $s_2(t)$ , если  $\ln \Lambda_{12} < 0$

Такое преобразование не меняет сути правила: решение, определяемое неравенствами (11), всегда будет таким же, как и решение на основании неравенств (12), поскольку логарифм величины  $\ln \Lambda_{12}$  является монотонно изменяющейся функцией этой величины и, следовательно, сохраняет все особенности ее изменения. Взяв логарифм отношения правдоподобия (9) и поступив в соответствии с правилом (11), можно получить алгоритм оптимального различения двух сигналов в виде:

принят сигнал  $S_1(t)$ ,

$$\frac{1}{N_0} \int_0^{\tau_0} [y(t) - s_2(t)]^2 dt - \frac{1}{N_0} \int_0^{\tau_0} [y(t) - s_1(t)]^2 dt \stackrel{\text{M}}{\geq} \ln \frac{p(s_2)}{p(s_1)} \quad (12)$$

принят сигнал  $S_2(t)$

## Вопрос 2 Структура оптимальных приемников различения двух сигналов при наличии аддитивного белого шума

Если учесть, что при передаче информации в двоичной цифровой форме почти всегда имеет место условие

$$P(S1) \approx P(S2) = 0.5 \quad (13)$$

т. е. передаваемые сигналы равновероятны, то выражение (12) упрощается:

принят сигнал  $S1(t)$ ,

$$\int_0^{\tau_0} [y(t) - s_2(t)]^2 dt \approx \int_0^{\tau_0} [y(t) - s_1(t)]^2 dt \quad (14)$$

принят сигнал  $S2(t)$ .

Это выражение имеет ясный физический смысл: наиболее вероятным переданным сигналом является тот сигнал, который меньше отличается (в среднеквадратичном смысле) от входного колебания  $y(t)$ . В соответствии с этим алгоритмом можно построить оптимальный приемник различения двух сигналов, т. е. представить найденный алгоритм в виде некоторой структурной схемы.

Структура оптимального приемника в соответствии с (14) показана на рисунке 1.

## Вопрос 2 Структура оптимальных приемников различения двух сигналов при наличии аддитивного белого шума

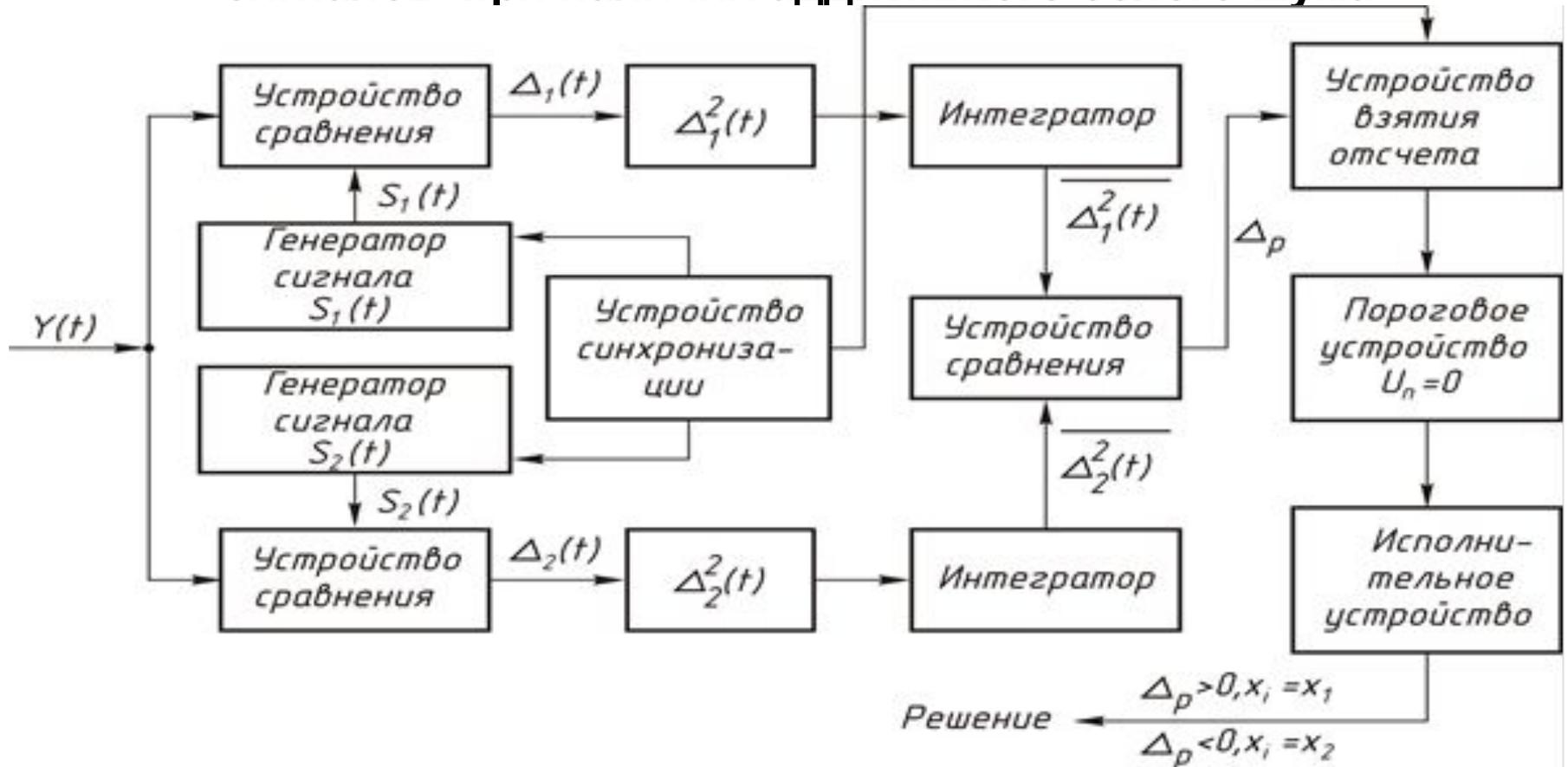


Рисунок 1

Приемник имеет две ветви, в каждой из которых вычисляется среднеквадратичная величина отличия принятого колебания  $y(t)$  от известного сигнала: в первой ветви от сигнала  $s_1(t)$ , во второй – от  $s_2(t)$ . Решение принимается по той ветви, где это отличие меньше.

$$\xi(s_i) = \int_0^{\tau_0} y(t) \cdot s_i(t) \cdot dt, i = 1, 2$$

(15)

## Вопрос 2 Структура оптимальных приемников различения двух сигналов при наличии аддитивного белого шума

Величина  $\zeta$  характеризует взаимную корреляцию между  $y(t)$  и  $s_i(t)$  и называется корреляционным интегралом. Величина  $E_i$  определяет удельную энергию (энергию на активном сопротивлении 1 Ом) сигнала  $s_i(t)$ . С учетом этих обозначений выражение (14) можно преобразовать к виду

$$\zeta(s_1) - \zeta(s_2) \geq (E_1 - E_2) / 2 \quad (16)$$

принят сигнал  $s = s_1$

где

$$E_i = \int_0^{t_0} s_i^2(t) \cdot dt, i = 1, 2$$

Устройство, непосредственно вычисляющее скалярное произведение (15) называют активным фильтром, или коррелятором, поэтому приемник, реализующий алгоритм (14), называют корреляционным. Скалярное произведение (15) можно вычислить не только с помощью активного фильтра (коррелятора), описанного выше, но и с помощью пассивного линейного фильтра с постоянными параметрами. Если на вход фильтра подать принимаемый сигнал  $y(t)$ , то напряжение на выходе фильтра будет иметь вид:

$$Z(t) = \int_0^{\tau} g(\tau) * y(t - \tau) \cdot d\tau$$

где  $g(\tau)$ —импульсная реакция фильтра.

## Вопрос 2 Структура оптимальных приемников различения двух сигналов при наличии аддитивного белого шума

Выберем ее такой, чтобы в момент  $t=T$  получить значение  $z(T)$ , совпадающее со скалярным произведением (15). Легко видеть, что это будет выполнено, если  $g(\tau)=S_i(T-\tau)$ . Действительно, при этом

$$Z(T) = \int_0^T S_i(T - \tau) \cdot y(T - \tau) \cdot d\tau = \int_0^T S_i(t) \cdot y(t) \cdot dt$$

Такой фильтр называется согласованным с сигналом  $S_i(t)$ . В более общем смысле фильтром, согласованным с сигналом  $s(t)$ , называют линейный фильтр с постоянными параметрами и импульсной реакцией:

$$g(\tau)=a \cdot S(t_0-T), \quad (17)$$

где  $a, t_0$  - постоянные. Функция  $g(t)$  оказывается зеркальным отображением  $s(t)$  относительно оси, проведенной через точку  $t_0/2$  (Рисунок 2).

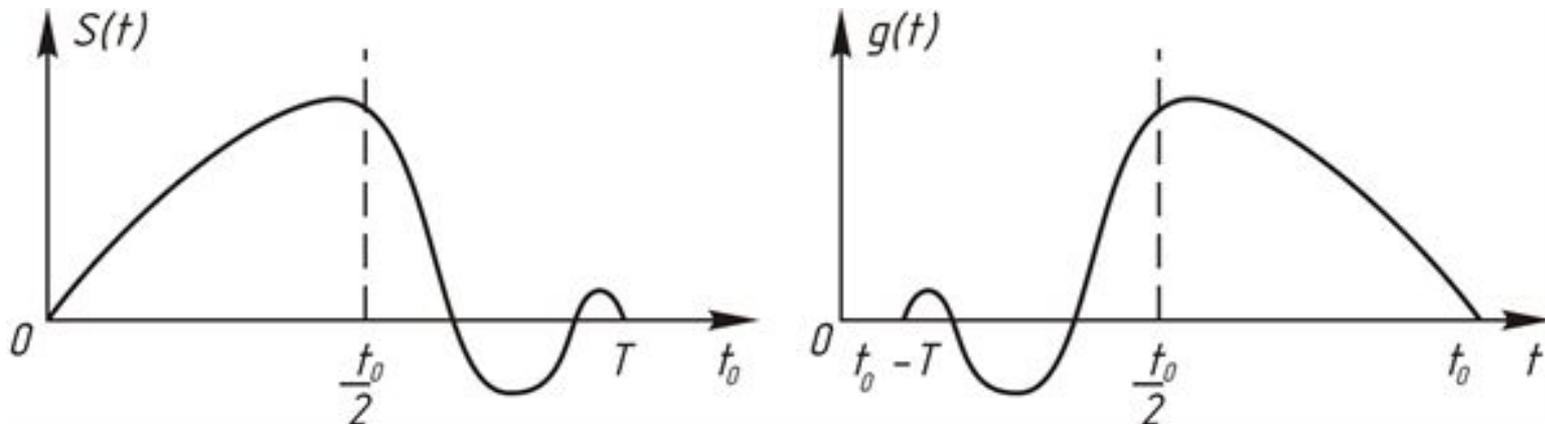


Рисунок 2. Сигнал  $s(t)$  и импульсная реакция  $g(t)$  линейного фильтра, согласованного с этим сигналом

## Вопрос 2 Структура оптимальных приемников различения двух сигналов при наличии аддитивного белого шума

Для физической реализуемости фильтра необходимо и достаточно, чтобы  $g(\tau) = 0$  при  $\tau < 0$ . В частности, для финитного сигнала  $s(t)$ , поступающего на вход фильтра в момент  $t = 0$  и заканчивающегося в момент  $T$ , условие физической реализуемости согласованного фильтра заведомо выполняется, если постоянная  $t_0$  (называемая моментом отсчета) удовлетворяет условию  $t_0 > T$ .

Действительно, при этом  $(t_0 - \tau) > T$  и  $s(t_0 - \tau) = 0$ , если  $\tau < 0$ . Реакция согласованного фильтра на финитный сигнал  $s(t)$  длительностью  $T$  существует лишь на финитном интервале протяженностью  $2T$ .

Структурная схема с согласованными фильтрами представлена на рисунке 3.

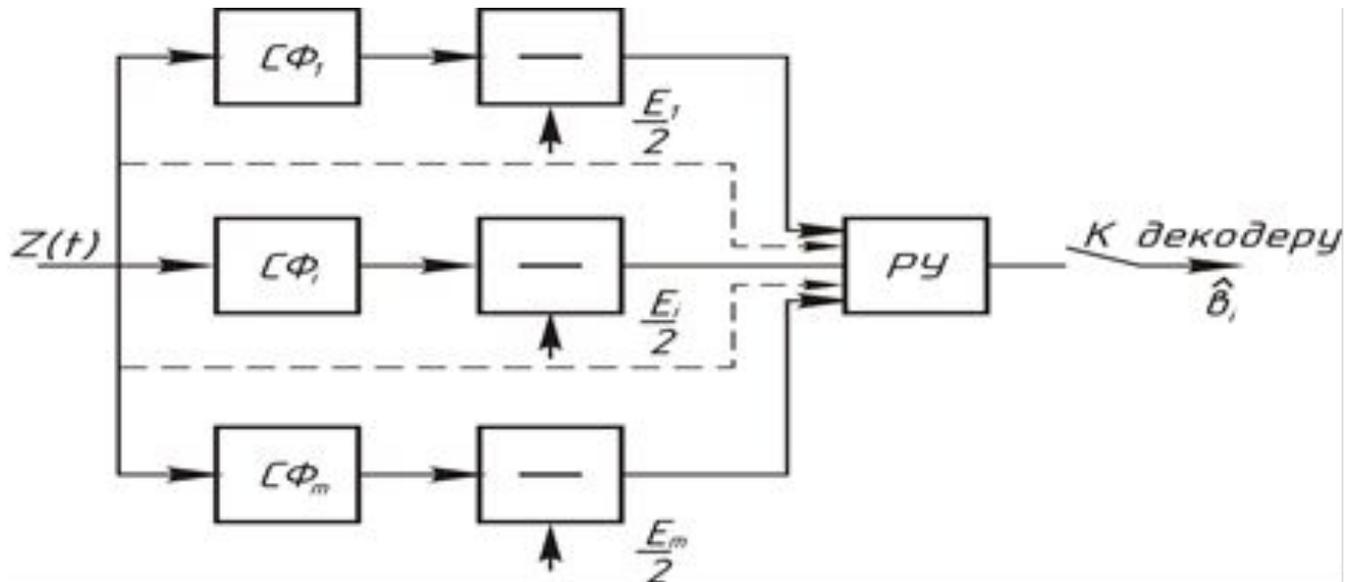


Рисунок 3. Оптимальный демодулятор на основе согласованных фильтров

## **Вопрос 2 Структура оптимальных приемников различения двух сигналов при наличии аддитивного белого шума**

### **Особенности функционирования оптимальных приемников**

Несмотря на простоту структуры оптимальных приемников их реализация оказывается во многих случаях сложной технической проблемой. Это объясняется тем, что для построения оптимального приемника необходимо точно знать несущую частоту принимаемого сигнала и его начальную фазу, а также быть уверенным в неизменности амплитуды принимаемых сигналов на интервале анализа. Строго говоря, реальных каналов с постоянными параметрами не существует. В реальных каналах параметры принимаемых сигналов всегда приобретают некоторые случайные отклонения, обусловленные нестабильностью характеристик передающего устройства, механическими колебаниями антенных устройств, изменениями параметров среды распространения, перемещениями передатчика или приемника в пространстве (при связи с подвижными объектами) и т. д. Такие отклонения приводят к «рассогласованию» между параметрами принятого сигнала и характеристиками оптимального приемника, построенного в соответствии с заранее известными «образцами» посылок сигнала.

Оптимальные приемники весьма чувствительны к такому «рассогласованию», и, если оно превышает некоторое значение, их показатели резко ухудшаются. В зависимости от структуры оптимального приемника указанное рассогласование проявляет себя по-разному. Приемники с согласованными фильтрами очень критичны к небольшим рассогласованиям между моментом взятия отсчета выходного напряжения и моментом, когда это напряжение достигает максимума.

## Вопрос 2 Структура оптимальных приемников различения двух сигналов при наличии аддитивного белого шума

Сказанное поясняется на рисунке 4.

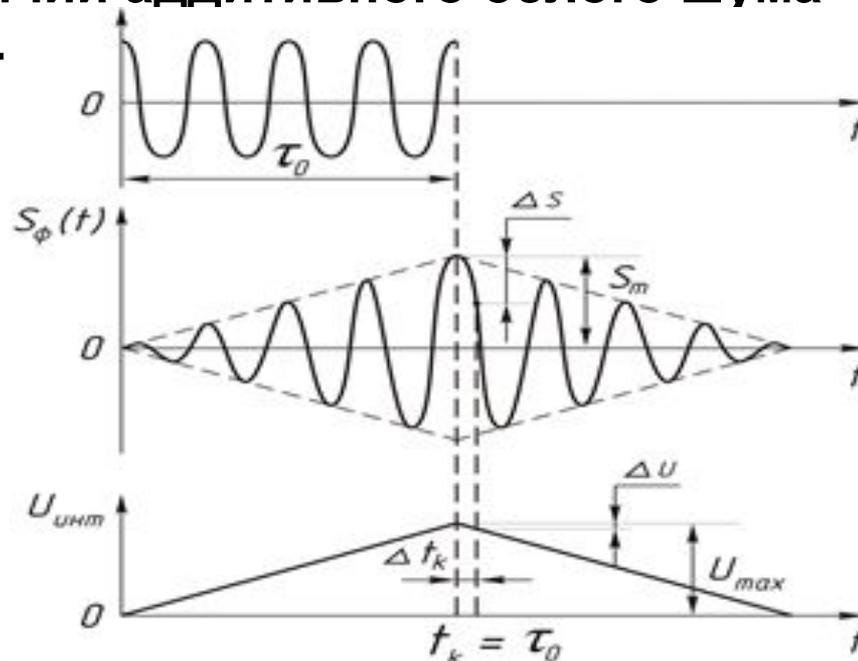


Рисунок 4

- а) Сигнал на входе приемника, б) Сигнал на выходе согласованного фильтра, в) Огибающая сигнала на выходе коррелятора

При незначительном отклонении момента взятия отсчета от значения  $t_k = \tau_0$  величина отсчета может резко уменьшиться по сравнению с максимальным значением и даже изменить свой знак (рисунок 4, б). Вместе с тем, согласованные фильтры менее критичны к небольшим рассогласованиям по частоте и фазе. Приемники с корреляторами наоборот менее критичны к нестабильности момента взятия отсчета (рисунок 4, в), но весьма критичны к рассогласованию между параметрами принимаемого сигнала и параметрами «образцов» посылок сигнала, формируемых в корреляционном приемнике.

## **Вопрос 2 Структура оптимальных приемников различения двух сигналов при наличии аддитивного белого шума**

**Для уменьшения влияния указанных видов рассогласования при реализации оптимальных приемников необходимо непрерывно оценивать (измерять) параметры принимаемого сигнала и устранять появляющееся рассогласование. Эта процедура связана с заметным усложнением приемного устройства и увеличением его стоимости, что в ряде случаев не оправдывается тем повышением помехоустойчивости, которое достигается по сравнению с более простым приемником. Поэтому при реализации приемных устройств в каналах с незначительными изменениями параметров часто и не стремятся к тому, чтобы полностью сохранить структуру приемников, обеспечивающих оптимальный прием с учетом этих изменений. Комбинируя положительные свойства оптимальных приемников с согласованными фильтрами и корреляторами, можно создать приемное устройство, в котором основную фильтрацию сигнала от помехи выполняет квазиоптимальный фильтр, а отсчет в конце интервала анализа входного колебания  $y(t)$  берется по огибающей посылки.**

## Контрольные вопросы

1. С использованием какого математического выражения можно решить задачу оптимального различия двух сигналов
2. Сформулируйте алгоритм оптимальной процедуры различения двух сигналов при наличии в канале белого шума.
3. Назовите основные блоки оптимального приемника
4. Нарисуйте схему оптимального приемника
5. Изложите особенности функционирования оптимального приемника
6. Какие операции выполняет коррелятор оптимального приемника
7. Что представляет собой согласованный фильтр