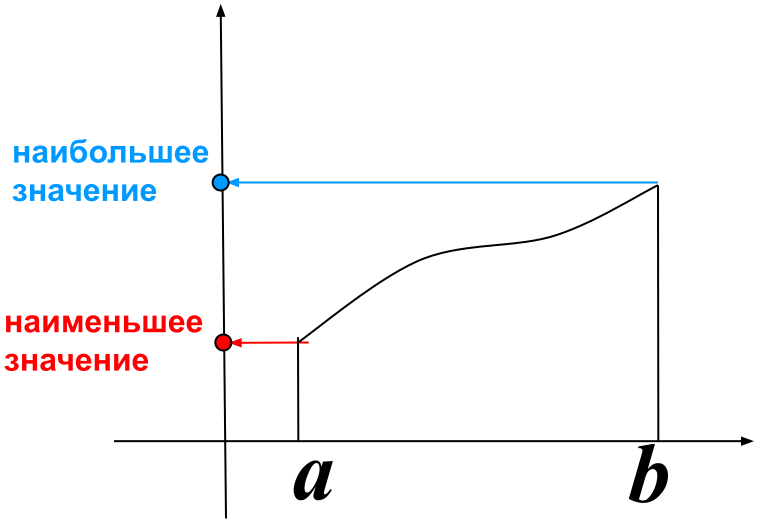
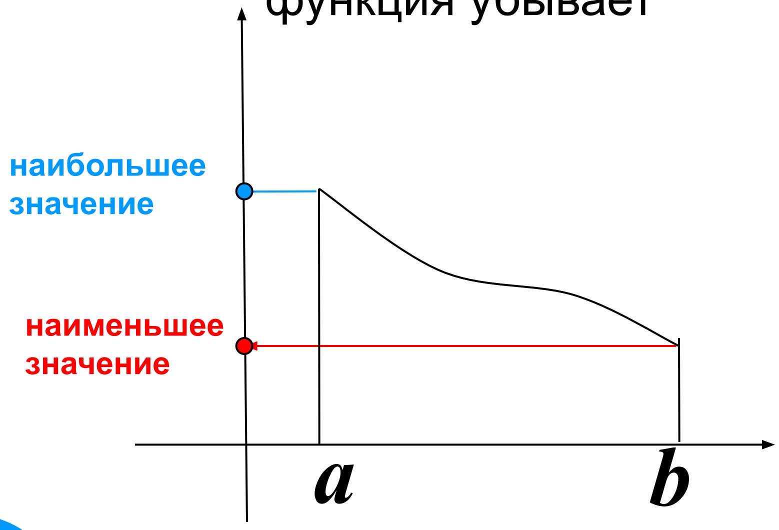
Наибольшее и наименьшее значение функции

функция возрастает



функция убывает



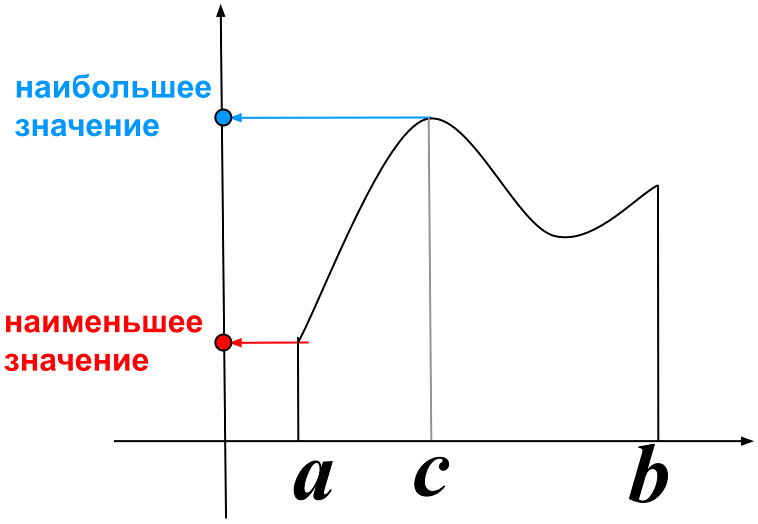
Предположим, что функция f не имеет на отрезке [a; b] критических точек.

Тогда она возрастает (рис. 1) или убывает (рис. 2) на этом отрезке.

Значит,

наибольшее и наименьшее значения функции f на отрезке [a; b] — это значения в концах a и b.

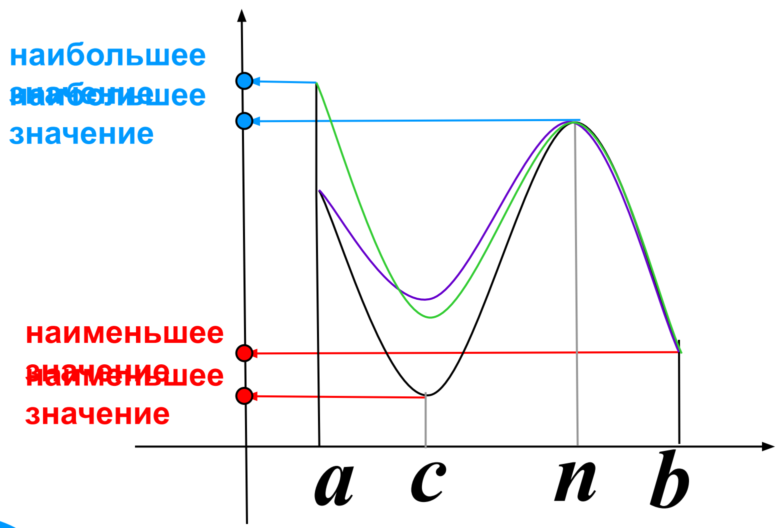
Примеры



Пусть теперь функция f имеет на отрезке [a; b] конечное число критических точек.

Наибольшее и наименьшее значения функция f может принимать в критических точках функции или в точках a и b.

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции, имеющей на отрезке конечное число критических точек, нужно вычислить значения функции во всех критических точках и на концах отрезка, а затем из полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее.



1.

Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 27x$ на отрезке $[0; 4]$

Значения функции в концах отрезка.

1) $y(0) = 0$

$y(4) = 4^3 - 27 \cdot 4 = -44$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

2) $y' = 3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9) = 3(x \overset{3}{-} 3)(x \overset{-3}{+} 3)$

$x = 3 \in [0; 4]$

$x = -3 \notin [0; 4]$

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

$y(3) = 3^3 - 27 \cdot 3 = -54$

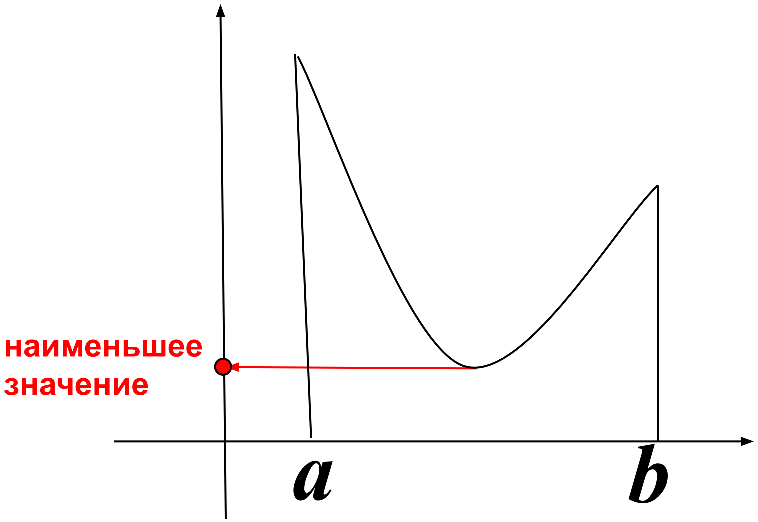
Выбрать наименьшее из полученных значений.

В 11	**-**	**5**	**4**			

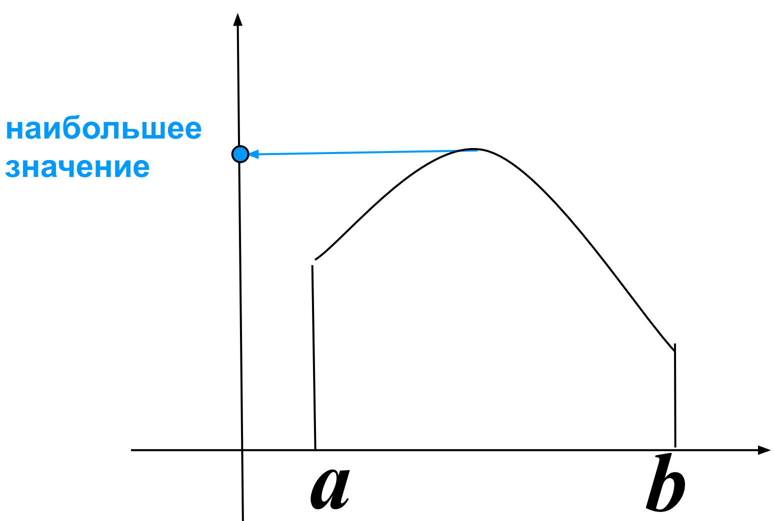
Выполнение этапов решения можно изменить, как вам удобно.

Этапы	Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 27x$ на отрезке $[0; 4]$
1. Найти $f'(x)$	1) $y' = 3x^2 - 27$
2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.	2) $y' = 3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9) = 3(\overset{3}{x - 3})(\overset{-3}{x + 3})$ $x = 3 \in [0; 4]$ $x = -3 \notin [0; 4]$
3. Вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка.	3) $y(0) = 0$ $y(4) = 4^3 - 27 \cdot 4 = -44$ $y(3) = 3^3 - 27 \cdot 3 = -54$
4. Из вычисленных значений выбрать наименьшее или наибольшее	В 11 | - | 5 | 4 | | |

Предположим, что функция f имеет на отрезке [a; b] **одну** точку экстремума.

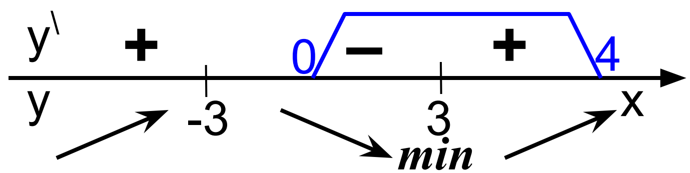


Если это точка минимума, то в этой точке функция будет принимать наименьшее значение.



Если это точка максимума, то в этой точке функция будет принимать наибольшее значение.

Другой способ решения

Этапы	Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 27x$ на отрезке [0; 4]
1. Найти $f'(x)$	1) $y' = 3x^2 - 27$
2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.	2) $y' = 3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9) = 3(\underset{3}{x - 3})(\underset{-3}{x + 3})$ 
3. Вычислить значения функции в критических точках ~~и на концах отрезка.~~	3) $y(3) = 3^3 - 27 \cdot 3 = -54$
~~4. Из вычисленных значений выбрать наименьшее и наибольшее~~	В 11 - 5 4 **Этот способ будет удобно вспомнить, когда вычисления значений функции в концах отрезка будет сложным.**

Наименьшее значение функция будет принимать в точке минимума. Можно сэкономить на вычислениях значений функции в концах отрезка.

2. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 3x + 4$ на отрезке $[-2; 0]$

Значения функции в концах отрезка.

1) $y(0) = 4$

$y(-2) = (-2)^3 - 3 \cdot (-2) + 4 = 2$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

2) $y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(\overset{1}{x - 1})(\overset{-1}{x + 1})$

$x = 1 \notin [-2; 0]$

$x = -1 \in [-2; 0]$

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

$y(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 4 = 6$

Выбрать наибольшее из полученных значений.

В 11	6					

3. Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 2x^2 + x + 3$ на отрезке $[\,1;\ 4\,]$

Значения функции в концах отрезка.

1) $y(1) = 1 - 2 + 1 + 3 = 3$

$y(4) = 4^3 - 2 \cdot 4^2 + 4 + 3 = 39$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

2) $y' = 3x^2 - 4x + 1 = 3(x-1)(x - \frac{1}{3})$

$3x^2 - 4x + 1 = 0$

$D = 16 - 4*3*1 = 4$

$x_1 = \frac{4+2}{6} = 1 \in [1;\ 4]$

$x_2 = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3} \notin [1;\ 4]$

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

$y(1) = 3$

Выбрать наименьшее из полученных значений.

В 11	3					

4. Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{x^3}{3} - 9x - 7$ на отрезке [-3; 3]

Значения функции в концах отрезка.

$$y(-3) = \frac{(-3)^3}{3} - 9(-3) - 7 = -9 + 27 - 7 = 11$$

$$y(3) = \frac{3^3}{3} - 9 \cdot 3 - 7 = 9 - 27 - 7 = -25$$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y' = \frac{3x^2}{3} - 9 = x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$$

x = 3 $\in$ [-3; 3]

x = –3 $\in$ [-3; 3]

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

y(-3) = 11

y(-3) = -25

Выбрать наибольшее из полученных значений.

В 11	1	1				

5. Найдите наибольшее значение функции $y = x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1$ на отрезке [1; 9]

Значения функции в концах отрезка.

$$y(1) = 1^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot 1 + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$$

$$y(9) = 9^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot 9 + 1 = (3^2)^{\frac{3}{2}} - 27 + 1 =$$

$$= 27 - 27 + 1 = 1$$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} - 3 = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 3$$

$$\frac{3}{2}\sqrt{x} - 3 = 0 \quad / \cdot 2$$

$$3\sqrt{x} - 6 = 0$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 4 \quad \in [1; 9]$$

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y(4) = 4^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot 4 + 1 = (2^2)^{\frac{3}{2}} - 12 + 1 =$$

$$= 8 - 12 + 1 = -3$$

Выбрать наибольшее из полученных значений.

В 11	1					

6. Найдите наименьшее значение функции $y = x\sqrt{x} - 3x + 1$ на отрезке [1; 9]

$$y = x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1$$

$$y = x \cdot x^{\frac{1}{2}} - 3x + 1$$

$$y = x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1$$

Запишем функцию в удобном для дифференцирования виде

Значения функции в концах отрезка.

$$y(1) = 1^{\frac{3}{2}} - 3\cdot 1 + 1 = -1$$

$$y(9) = 9^{\frac{3}{2}} - 3\cdot 9 + 1 = (3^2)^{\frac{3}{2}} - 27 + 1 =$$

$$= 27 - 27 + 1 = 1$$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 3 = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 3$$

$$\frac{3}{2}\sqrt{x} - 3 = 0 \quad \Big| \cdot 2$$

$$3\sqrt{x} - 6 = 0$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 4 \in [1; 9]$$

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

Выбрать наименьшее из полученных значений.

$$y(4) = 4^{\frac{3}{2}} - 3\cdot 4 + 1 = (2^2)^{\frac{3}{2}} - 12 + 1 =$$

$$= 8 - 12 + 1 = -3$$

В 11	-	3				

7. Найдите наименьшее значение функции $y=\dfrac{x^2+25}{x}$ на отрезке [-10; 1]

8. Найдите наибольшее значение функции $y = x + \frac{36}{x}$ на отрезке [1; 9]